И·М·МАКАРОВ, Б·М·МЕНСКИЙ

ЛИНЕЙНЫЕ АВТОМАТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ



И·М·МАКАРОВ Б·М·МЕНСКИЙ ЛИНЕЙНЫЕ АВТОМАТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

И. М. МАКАРОВ, Б. М. МЕНСКИЙ

ЛИНЕЙНЫЕ АВТОМАТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

(ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ, МЕТОДЫ РАСЧЕТА И СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ)

*Допущено Министерством высшего
и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия для студентов
высших технических учебных заведений*



Москва «МАШИНОСТРОЕНИЕ» 1977

6Ф6.5
М15
УДК 62—50

Редактор **Э. Л. Наппельбаум**
Рецензент чл. кор. АН СССР **В. В. Петров**

Макаров И. М. и **Менский Б. М.**

М15 Линейные автоматические системы (элементы теории, методы расчета и справочный материал). Учебное пособие для вузов. М., «Машиностроение», 1977.

464 с. с ил.

Книга содержит краткие сведения из теории стационарных линейных систем автоматического регулирования и справочный материал для их анализа и синтеза при непрерывных детерминированных внешних воздействиях. Содержится значительное число примеров расчета.

Книга может быть использована инженерами и научными работниками различных специальностей, встречающимися с проектированием и выполнением линейных автоматических систем.

М $\frac{30501\text{-}053}{038(01)\text{-}77}$ 53-77 **6Ф6.5**

ПРЕДИСЛОВИЕ

XXV съезд КПСС определил, что успешное решение многообразных социальных и экономических задач, стоящих перед нашей страной, и главной из них — подъема материального и культурного уровня жизни народа, может быть обеспечено только за счет быстрого роста производительности труда, повышения эффективности общественного производства, ускорения научно-технического прогресса, улучшения качества работы во всех звеньях народного хозяйства.

При интенсификации промышленности возникают проблемы резкого сокращения доли ручного труда, комплексной механизации и автоматизации производства. Вследствие этого широкие круги инженеров и научных работников самых различных специальностей будут все чаще сталкиваться с необходимостью использовать в своей научной и практической деятельности теорию и методы проектирования, создания и эксплуатации систем автоматического регулирования и управления.

Современные учебные программы вузов учитывают эту необходимость. Вопросы автоматического регулирования и управления рассматриваются как отдельными дисциплинами, так и при изучении соответствующих отраслей техники.

Быстрые темпы роста производства, использование более совершенной техники и технологии, автоматизация научного эксперимента требуют от многих специалистов приобретения и расширения знаний в области автоматики. Прежде всего это необходимо инженерам, которые не имеют базового образования в области автоматики, и специалистам, которые в силу сложившихся обстоятельств ранее не соприкасались с автоматическими приборами, аппаратурой, системами управления и методами их расчета.

Имеющаяся литература по автоматическому регулированию и управлению не всегда в полной мере удовлетворяет запросы указанной категории специалистов, которые в своей практической работе часто используют лишь конечные результаты излагаемых проблем и закономерностей.

В книге изложены основные сведения о линейных непрерывных системах автоматического регулирования, т. е. охвачен первый раздел теории автоматического регулирования и управления, который имеет весьма большое значение и широко применяется как студентами при курсовом и дипломном проектировании, так и в инженерной практике. При этом сделана попытка изложить материал в наиболее удобной форме.

Общие концепции теории приводятся без их доказательства. Используемый математический аппарат дан в соответствующих разделах основного текста и в приложениях.

Основным содержанием являются различные методы расчета и достаточно обширный справочный материал. Для решения одной и той же задачи указаны, как правило, несколько применяемых на практике методов, что позволяет в зависимости от конкретных условий использовать наиболее удобный из них. Кроме того, владение различными методами позволяет быстро проверить полученные результаты и убедиться в правильности расчета.

В пособии приведено незначительное число примеров расчета. Они носят достаточно общий характер и помогут читателю при анализе и синтезе систем автоматического регулирования, применяемых в различных отраслях современной техники. Расчеты в книге проводятся на базе гипотетических систем регулирования вместо упрощенного анализа и синтеза конкретных систем, так как последнее, по мнению авторов, может создать у читателя неполное представление об инженерных расчетах. Для их проведения, кроме материала, изложенного в данной книге, необходимы еще знания соответствующей отрасли техники.

Все методы расчета, приведенные в книге, позволяют решать задачи с использованием средств электронной вычислительной техники.

При написании пособия был использован многолетний опыт работы авторов со студентами дипломниками, а также студентами на факультете усовершенствования дипломированных инженеров Всесоюзного заочного энергетического института и на факультете повышения квалификации Московского института радиотехники, электроники и автоматики.

Все замечания и пожелания по содержанию книги и изложению материала просим направлять в адрес издательства.

Глава 1

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Технические устройства, чрезвычайно широко используемые в современном обществе, имеют различную физическую основу, предназначены для решения всевозможных задач и разными методами. Но можно заметить, что при конструировании каждого устройства обеспечивалась возможность воздействия на него для изменения режима работы. Воздействия необходимы, в частности, для того, чтобы цель достигалась при минимальных затратах времени, материалов, энергии и т. д.

Токарный станок, например, позволяет обрабатывать детали. Однако для того, чтобы получался нужный эффект, необходимо предусмотреть возможность изменения подачи резца и скорости перемещения детали. Автомобиль дает возможность передвижения по земной поверхности, но автомобилист должен иметь возможность изменять по своему усмотрению скорость и направление движения.

Все операции, позволяющие нужным образом модифицировать поведение технических устройств, называются операциями управления. Они необходимы прежде всего потому, что на каждое техническое устройство влияют внешние факторы. В приведенных ранее примерах такими факторами являются соответственно качество обрабатываемого металла и рельеф пути следования автомобиля.

Кроме того, обычно каждое техническое устройство создается не для решения одной строго определенной задачи, а рассчитано на ряд иногда значительно различающихся между собой задач. Так, токарный станок позволяет выполнять многие операции и автомобиль может двигаться по самым разнообразным маршрутам и с различными скоростями.

Поэтому, если мы хотим при любом вероятном сочетании внешних условий получить любой из возможных результатов работы технического устройства, то в его поведении нужно что-то изменять или в некоторые моменты времени или даже непрерывно, т. е. осуществлять управление.

В настоящее время еще во многих технических устройствах функции управления остаются за человеком. Именно человек решает, как и когда менять поведение устройства, чтобы получить желаемый результат. Однако увеличение мощности и быстродействия машин и механизмов, повышение требований к точности различных процессов и появление новых, более сложных процессов приводят к тому, что человек становится не в состоянии управлять ими с необходимой быстротой и точностью. Таким образом, в ходе технического прогресса возникла необходимость в исключении человека из операций управления для более совершенного их выполнения.

Устройство, выполняющее операции управления без непосредственного и непрерывного участия человека, называется автоматическим управляющим устройством. Замена труда человека в процессе управления действием автоматических управляющих устройств называется автоматизацией.

Автоматизация ведет к значительному повышению производительности машин и механизмов, улучшает качество выпускаемой продукции, расширяет возможности воздействия человека на природу и облегчает труд человека (и не только физический, но и умственный).

В Программе КПСС сказано, что автоматизация и комплексная механизация служат материальной основой для постепенного перерастания социалистического труда в труд коммунистический.

Эта задача тем более важна, что рост масштабов и темпов производства, резкое усложнение технических устройств и технологических процессов приводят к принципиальной невозможности их реализации без автоматического управления. Для каждого очевидно, что полеты космических кораблей и действие атомных электростанций совершенно невозможны при ручном управлении.

1.1. ПРИНЦИПЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Постараемся теперь уточнить, в чем же заключается задача автоматического управления.

При решении задачи управления обязательно есть объект управления (управляемый объект), т. е. некий механизм, агрегат или устройство, некоторый технологический, энергетический или транспортный процесс, желаемое поведение или протекание которого должно быть обеспечено. Поведение объекта управления, результат его деятельности определяются некоторыми показателями. Чаще всего ими являются значения каких-то физических величин, которые принято называть выходными величинами объекта управления. Чем сложнее объект, тем большее число показателей характеризует его деятельность и тем труднее следить за всей их совокупностью. Поэтому к выходным величинам относят лишь наиболее важные для оценки поведения объекта и его практического использования.



Рис. 1.1. Схематическое изображение объекта управления

На каждое техническое устройство и на каждый процесс в реальных условиях многочисленные воздействия оказывает внешняя среда. Все эти воздействия также практически невозможно учесть. Поэтому в поле зрения оставляют лишь те, которые оказывают наибольшее влияние на выходные величины, и называют их входными воздействиями.

Изменения во времени входных воздействий и выходных величин некоторого объекта управления характеризуют его поведение. Поэтому условно объект управления изображают так, как показано на рис. 1.1.

Входные воздействия, с точки зрения влияния на выходные величины объекта, разделяют на две принципиально отличные группы. Некоторые из входных воздействий обеспечивают, как уже отмечалось, желаемое изменение поведения объекта, достижение поставленных целей. Такие входные воздействия принято называть управляющими и при их отсутствии задача управления вообще не имеет решения. При ручном управлении оператор должен иметь возможность изменять управляющие воздействия на объект. При автоматическом управлении изменения этих воздействий создаются управляющим устройством.

Другие входные воздействия, напротив, мешают достижению поставленной цели, искажают влияние управляющих воздействий и изменять их, как правило, невозможно. Такие воздействия принято называть возмущающими (короче, возмущениями) или помехами.

Задача управления, по сути дела, заключается в формировании такого закона изменения управляющих входных воздействий, при котором желаемое поведение объекта достигается независимо от изменения поступающих на него возмущений. Такая постановка задачи управления является весьма общей и поэтому будем рассматривать лишь более конкретную и более узкую задачу регулирования, которая в настоящее время имеет наибольшее практическое значение.

Задача регулирования заключается в том, чтобы одну или несколько выходных величин объекта регулирования сделать равными некоторым эталонным функциям времени (задающим воздействиям), которые могут быть постоянными (задача стабилизации), меняться во времени по заранее известному закону (задача программного регулирования) или же изменяться по закону, который задается каким-то внешним независимым процессом (задача слежения). В простейшем случае у объекта регулирования одна выходная величина.

В зависимости от ситуации используют различные методы решения задачи регулирования. Самый простой метод, рассчитанный

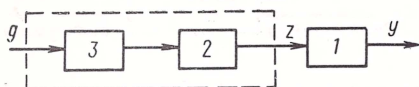


Рис. 1.2. Функциональная схема разомкнутой системы регулирования

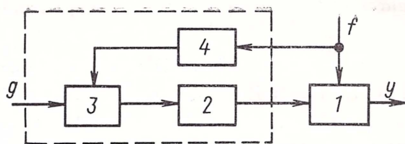


Рис. 1.3. Функциональная схема разомкнутой системы регулирования с измерением основного возмущения

на несложную ситуацию, неявно основывается на предположении, что влиянием всех возмущений можно пренебречь и регулирующее воздействие на объект необходимо лишь тогда, когда должен измениться результат деятельности объекта, т. е. должна измениться регулируемая величина. В этом случае необходимы преобразовательный элемент и исполнительный механизм. Преобразовательный элемент *3* (рис. 1.2) в соответствии с задающим воздействием $g = g(t)$ вырабатывает необходимое «указание» исполнительному механизму *2*. Последний создает регулирующее воздействие $z = z(t)$ на объект регулирования *1*. В результате регулируемая величина $y = y(t)$ приближается с той или иной точностью к требуемому значению.

Преобразовательный элемент и исполнительный механизм составляют регулятор. Регулятор и объект в совокупности образуют систему регулирования.

Заметим, что при конструировании регулятора рассмотренной системы необходимо знать все свойства объекта регулирования. Только при выполнении этого условия (и отсутствии возмущений) можно правильно предвидеть влияние задающего воздействия на регулируемую величину.

Область применения описанной простейшей системы регулирования ограничена прежде всего из-за того, что нельзя пренебречь влиянием возмущений. При определенном задающем воздействии и различных возмущениях выходная величина будет иметь разные значения и, следовательно, задача регулирования не будет решена. В связи с этим возникает необходимость контроля возмущений или хотя бы основного из них $f = f(t)$. Нужно измерять это возмущение и учитывать его значение при действии регулятора. В регуляторе оказывается необходимым (рис. 1.3) еще измерительный элемент *4* в цепи возмущения, который влияет на преобразовательный элемент, вырабатывающий «указание» исполнительному механизму.

Рассмотренные системы регулирования одинаковы, так как обе являются разомкнутыми. Это означает, что характер регулирующих воздействий зависит от свойств объекта лишь в той степени, в какой это было учтено при конструировании регулятора. Действительное значение регулируемой величины, даже если оно значительно отличается от желаемого, совершенно не влияет на работу системы. Чтобы подчеркнуть это свойство разомкнутой системы регулирования, иногда говорят, что она устроена по бал-

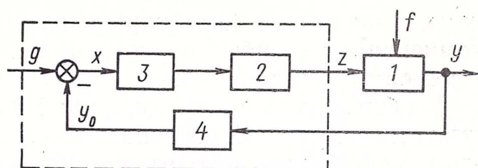


Рис. 1.4. Функциональная схема замкнутой системы автоматического регулирования

листическому принципу. Действительно, регулятор при создании регулирующего воздействия напоминает стрелка́, который теряет всякую возможность влиять на результат выстрела после наведения оружия и спуска курка. Разница между двумя системами, изображенными на рис. 1.2 и 1.3, лишь в том, что в последней системе учитывается влияние возмущения подобно тому, как стрелок делает поправку на ветер.

В подавляющем случае отсутствует исчерпывающая и достоверная информация о свойствах объекта регулирования и о характере возмущений и разомкнутые системы регулирования оказываются неэффективными. Поэтому прибегают к созданию конструктивно более сложных, но и значительно более совершенных замкнутых систем автоматического регулирования.

В замкнутой системе использован принцип обратной связи, возможно самый мощный принцип автоматического регулирования и управления. Такая система в простейшем случае (рис. 1.4) состоит из объекта регулирования *1* и регулятора, который, кроме исполнительного элемента *2* и усилительно-преобразовательного элемента *3*, имеет еще измерительный элемент *4* (иногда регулятором называют усилительно-преобразовательный элемент *3*).

Измерительный элемент осуществляет обратную связь в системе: подает на ее вход сигнал y_0, пропорциональный регулируемой величине y. В результате этого на вход преобразовательного элемента поступает сигнал рассогласования (сигнал ошибки) $x = g - y_0$.

Таким образом, в замкнутой системе воздействие на объект формируется не только в зависимости от задающего воздействия, но и от состояния объекта. Точнее, регулирующее воздействие определяется отклонением регулируемой величины от заданного значения. Поэтому принцип обратной связи позволяет успешно решать задачу регулирования, несмотря на некоторую неопределенность (количественную, но, вообще говоря, не любую и тем более не качественную) или неточность в известных конструктору характеристиках объекта регулирования и исполнительного механизма, а также сведениях о возмущениях.

Итак, в замкнутой системе нет необходимости получать информацию непосредственно о задающем воздействии (оно используется лишь для сравнения с сигналом обратной связи) и о возмущениях. Однако это допустимо не всегда. В некоторых случаях качество такого регулирования оказывается неприемлемо низким. Тогда используют комбинированное регулирование, т. е. сочетание принципов замкнутой и разомкнутой систем. При этом разомкнутая часть системы обеспечивает решение задачи регулирования «в основ-

ном», а замкнутая часть корректирует это «грубое» регулирование, компенсируя ошибки первого приближения, в частности ошибки измерения возмущений.

В общем случае информация об изменениях задающего воздействия и возмущений поступает в регулятор лишь по мере того, как эти изменения происходят, причем изменения возмущений воспринимаются сначала объектом регулирования. Очевидно, если предвидеть изменения внешних воздействий, то система сможет «подготовляться к ним заранее и регулирование будет осуществляться более успешно. Такая ситуация оказывается в какой-то степени достижимой, если регулятор получает некоторую информацию о будущих изменениях задающего воздействия или возмущений. В простейшем, но и широко распространенном случае такой информацией является значение первой производной от соответствующего воздействия по времени. Более высокие результаты могут быть получены при использовании первой и второй производных.

1.2. НЕКОТОРЫЕ ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

До сих пор речь шла об основных принципиальных схемах систем автоматического регулирования, отобранных в результате многолетней практики. Однако для решения задач автоматического регулирования одного знания этих схем недостаточно. Необходимо еще в каждом случае правильно выбрать элементы регулятора. Совокупность методов, позволяющих исследовать, анализировать свойства отдельных элементов и выполненных систем автоматического регулирования, а также рассчитывать и конструировать новые системы по заданным требованиям к качеству регулирования, составляет предмет теории автоматического регулирования.

Каждая теория технических наук формирует математический аппарат, специально приспособленный к ее задачам. В классической теории автоматического регулирования используются дифференциальные уравнения. Дело в том, что подавляющее большинство объектов регулирования, исполнительных механизмов и других элементов регуляторов имеет инерционность. Изменение их входных воздействий отражается на выходных величинах не сразу, а постепенно, и характер реакции зависит, вообще говоря, от предыстории поведения системы. Минимальная информация о предыстории, которой необходимо располагать для того, чтобы иметь возможность по будущим значениям входных воздействий однозначно определять будущие значения выходных величин, называется информацией о состоянии системы. И для большинства случаев, имеющих практический интерес, информация о состоянии системы содержится в значениях выходных величин и некоторого числа их производных по времени. Потому и описание поведения системы (изменения ее состояния) должно включать в себя выход-

ные величины и их производные, т. е. представлять собой дифференциальное уравнение.

Несмотря на то, что дифференциальные уравнения являются математическим аппаратом, принципиально вполне достаточным для классической теории автоматического регулирования, его практическое использование сопряжено со значительными трудностями и аналитические решения дифференциальных уравнений многих типов просто неизвестны.

Однако в практике автоматического регулирования наибольшее распространение получили линейные системы, т. е. системы, поведение которых описывается линейными дифференциальными уравнениями, имеющими аналитические решения. Для таких систем достаточно определять реакции на некоторые эталонные воздействия и затем делать выводы относительно влияния воздействий произвольного вида. На этом основании частотный метод и метод передаточных функций широко используют при инженерных расчетах линейных систем автоматического регулирования.

Одна из теорем линейной теории систем утверждает, что если система в целом линейна, то должны быть линейными все ее динамические подсистемы. Это означает, то для линейности рассматриваемой системы автоматического регулирования должен быть линейным ее объект (обеспечить линейность характеристики регулятора можно при его конструировании). Конечно, такое требование сужает область применения методов, излагаемых в данной книге, но не исключает их. Дело в том, что в большинстве случаев при проектировании объекта обеспечивается «приблизительное» решение задачи регулирования. Тогда регулятору остается лишь задача «тонкой доводки» и при действии объекта все его переменные незначительно отличаются от некоторых базисных значений. Поэтому в таких случаях исходные нелинейные уравнения объекта можно заменить приближенными линейными уравнениями для приращений переменных, т. е. линеаризовать уравнения. В этом случае становятся применимыми все методы линейной теории автоматического регулирования.

Выше было сказано, что большим преимуществом замкнутых систем является их способность обеспечивать решение задачи регулирования даже в том случае, когда информация об объекте регулирования не вполне точная. Это свойство имеют не всякие замкнутые системы, а лишь те их них, которые являются устойчивыми. Поэтому свойство устойчивости имеет важнейшее значение для работоспособности системы и анализ устойчивости — это одна из важнейших задач анализа систем автоматического регулирования. Собственно решение проблемы устойчивости и послужило началом теории автоматического регулирования.

Первые автоматические регуляторы, имевшие промышленное значение, появились в VIII в. (1765 г. — поплавковый регулятор уровня воды в паровом котле И. И. Ползунова; 1784 г. — центробежный регулятор скорости вращения паровой машин Джемса Уатта). Дальнейшее развитие регуляторов паровых

котлов, машин и турбин выявило противоречие: попытки повысить точность регуляторов приводили к неустойчивости. В 1876 г. профессор Петербургского технологического института И. А. Вышнеградский в своей работе «О регуляторах прямого действия» впервые заметил, что объект регулирования и регулятор составляют единую динамическую систему, которую и нужно исследовать для решения вопроса об устойчивости. Он нашел критерий устойчивости линейной системы третьего порядка, не потерявший своего значения и до настоящего времени.

За два века развития автоматического регулирования и главным образом за последние два-три десятилетия созданы весьма разнообразные системы автоматического регулирования. Они различаются по назначению (классификация систем по этому признаку чрезвычайно обширна, а возможно просто неосуществима), по физической природе сигналов в регуляторе (системы с электрическим, пневматическим, электропневматическим и электрогидравлическим регуляторами), по конструкции регуляторов и по их общеинженерным свойствам. Однако все эти весьма существенные различия совершенно не имеют значения при исследовании динамических свойств систем методами теории автоматического регулирования.

С этой точки зрения решающее значение имеет разделение систем по принципу действия на разомкнутые, замкнутые и комбинированные и по цели регулирования на системы стабилизации, системы программного регулирования и следящие.

Большое значение имеет классификация систем автоматического регулирования еще по нескольким следующим признакам.

По характеру сигналов в регуляторе системы разделяют на непрерывные, релейные и дискретные (импульсные и цифровые). У непрерывной системы в каждом элементе непрерывному изменению во времени входного воздействия соответствует непрерывное изменение выходной величины.

По классу дифференциальных уравнений, описывающих динамические процессы, системы разделяют на линейные и нелинейные. У линейной системы динамика всех элементов описывается линейными дифференциальными и алгебраическими уравнениями. Если это обыкновенные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, то систему называют стационарной (или обыкновенной) линейной системой. Систему, все элементы которой описываются алгебраическими уравнениями, называют статической. Если среди уравнений имеются дифференциальные, то система динамическая.

Выделяют также особые линейные системы: нестационарные, когда в уравнении какого-либо элемента имеется хотя бы один коэффициент, изменяющийся во времени; с распределенными параметрами, когда динамика какого-либо из элементов описывается линейным дифференциальным уравнением с частными производными; с запаздыванием, когда динамика хотя бы одного из элементов описывается линейным уравнением с запаздывающим аргументом (элемент имеет временное запаздывание); импульсные,

когда динамика какого-либо элемента описывается линейным разностным уравнением (элемент дискретного действия).

По источнику энергии, поступающей в регулятор, системы автоматического регулирования разделяют на системы прямого действия, получающие энергию от регулируемого объекта, и системы непрямого действия, получающие энергию от постороннего источника энергии.

Системы разделяют еще на одномерные с одной регулируемой величиной и многомерные (многосвязные) с несколькими регулируемыми величинами. Имеет место также классификация систем по статическим свойствам (статические и астатические системы) и по закону регулирования, т. е. по характеру преобразования сигнала рассогласования в регуляторе. Закон регулирования может быть пропорциональным: сигнал рассогласования только усиливается в регуляторе; интегральным: сигнал рассогласования интегрируется; пропорционально-интегральным: на выходе преобразовательного элемента регулятора две составляющих, из которых одна пропорциональна рассогласованию и другая есть интеграл от рассогласования; пропорционально-дифференциальным: кроме составляющей, пропорциональной рассогласованию, на выходе преобразовательного элемента есть еще составляющая, пропорциональная производной от рассогласования; пропорционально-интегрально-дифференциальным: на выходе преобразовательного элемента три соответствующих составляющих.

Значительное число систем, существенно различающихся с точки зрения теории автоматического регулирования, привело к созданию многих методов их анализа и синтеза. Ниже рассмотрим методы, используемые для анализа и синтеза обыкновенных линейных одномерных замкнутых систем. Однако и для этого класса систем используют ряд методов, так как в инженерной практике возникает необходимость в решении различных задач и при различном подходе.

Не будем перечислять изложенные ниже методы и задачи, для решения которых они могут быть использованы, уточним только, что задачи анализа — это исследование процессов, происходящих в заданной системе (в системе с известной структурой и параметрами) при различных внешних воздействиях, и задачи синтеза — это рациональное построение системы (выбор ее структуры и параметров), отвечающей заданным требованиям.

Следует еще остановиться на вопросе о литературе по автоматическому регулированию и управлению, которая достаточно обширна. Для предварительного ознакомления с предметом целесообразно воспользоваться источником [91]. Основные сведения об автоматическом регулировании популярно изложены также в книге [28].

Достаточно полное изложение основ теории автоматического регулирования и управления на высоком научном уровне содержится в работе [57], а также в [18], [24—26].

Наиболее полно современная теория автоматического регулирования представлена в первых трех книгах серии инженерных монографий «Техническая кибернетика» [113—115].

1.3. УНИФИЦИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ ЭЛЕМЕНТОВ

Один из первых регуляторов — регулятор паровой машины Уатта — являлся единым устройством. И в течение достаточно длительного периода развития автоматизации для каждого нового объекта регулирования изобретали новый регулятор. В настоящее время подобный неэкономичный подход ограниченно используют в инженерной практике. Он вытеснен более прогрессивным и экономичным агрегатно-модульным подходом, который опирается на важную идею кибернетики. Эта идея заключается в том, что воздействия на входе регулятора и между его элементами по своей физической природе могут отличаться от воздействия, которое должно быть приложено к объекту регулирования. Важна не физическая природа воздействий на входе регулятора и внутри его, а передаваемая ими информация. В результате этого оказалось возможным разделять регуляторы на отдельные функциональные элементы и в регуляторах разных систем автоматического регулирования (САР) использовать одинаковые устройства, собирать регуляторы различных САР из стандартных специализированных блоков.

В связи с этим возникла и стала весьма актуальной задача рационального расчленения общей функции регулятора на более мелкие функции и создания унифицированной системы элементов, выполняющих эти функции. Унифицированные элементы должны легко сочленяться между собой и обеспечивать оперативное и экономичное создание регуляторов для большого числа объектов. Такую задачу последовательно и плодотворно решают при автоматизации народного хозяйства нашей страны.

Начиная с 1951 г. получила практическое применение Агрегатная унифицированная система (АУС) пневматических блоков и приборов для построения систем автоматики. Затем была создана Электрическая агрегатная унифицированная система приборов (ЭАУС), представляющая собой более широкий комплекс функциональных элементов. Позднее было начато производство и использование Универсальной системы элементов промышленной пневмоавтоматики (УСЭППА) [49] и Унифицированной системы пневматических и электрических датчиков теплоэнергетических параметров [50].

В дальнейшем унификацию существующих и разработку новых элементов автоматики начали проводить и проводят в настоящее время в рамках Государственной системы промышленных приборов и средств автоматизации (ГСП) [109].

Приборы ГСП находят применение, конечно, не только в промышленности, но и при автоматизации иных технических процес-

сов (на транспорте, в связи и т. д.). Кроме приборов ГСП в САР используют также приборы, аппараты, механизмы, машины и другие устройства универсального назначения.

Задачей ГСП [47] является обеспечение техническими средствами разнообразных систем контроля, регулирования и управления технологическими процессами при ограниченной номенклатуре унифицированных устройств (приборов). Основой построения ГСП служат определенные системотехнические принципы, позволяющие наиболее рационально (с экономической и технической точек зрения) решить указанную задачу. Одним из этих принципов является совместимость отдельных приборов ГСП одного с другим. Должна обеспечиваться совместимость информационная (по физической природе и допустимым пределам изменения сигналов, т. е. воздействий приборов одного на другой), энергетическая (по виду энергии для питания приборов), конструктивная (по присоединительным и габаритным размерам и используемым элементам), метрологическая (по допустимой погрешности, т. е. по классу точности) и эксплуатационная (по защищенности от окружающей среды).

В результате развития ГСП будет полностью исключена нецелесообразная индивидуальная разработка технических средств для автоматизации. Это обеспечивается как номенклатурой ГСП, так и тем, что отдельные ее устройства легко могут быть дополнены элементами для использования в непредвиденных условиях.

По роду энергии, поступающей от внешнего источника и используемой для передачи сигналов, устройства ГСП (а также и функциональные элементы, не входящие в эту систему) разделяют на электрические, пневматические и гидравлические. Кроме того, существует еще четвертая группа устройств ГСП, не требующих внешнего источника энергии (регуляторы прямого действия и измерительные приборы).

Системы, комплектуемые из приборов электрической группы, т. е. в значительной части из электронных приборов, имеют преимущества по сравнению с другими видами устройств. К преимуществам относятся прежде всего высокая чувствительность, точность и быстродействие, возможность передачи сигналов на большие расстояния.

Пневматические приборы безопасны для применения в легковоспламеняемой или взрывоопасной среде, надежны в тяжелых условиях работы, например в агрессивной среде. По быстродействию и дальности передачи сигналов они значительно уступают электронным приборам.

Преимущества гидравлических исполнительных устройств в том, что они обеспечивают точные перемещения регулирующих органов при больших усилиях.

В одной системе можно применять устройства из различных групп в том или ином рациональном их сочетании. Например, часто используют вместе электрические и гидравлические устройства.

Основной является классификация средств ГСП по функциональному признаку. При этом выделяются следующие группы:

1. Устройства получения информации о состоянии процесса, которые выдают унифицированный сигнал, соответствующий значению контролируемой физической величины. Эта группа включает первичные измерительные преобразователи, нормирующие преобразователи и собственно датчики.

Цель первичного измерительного преобразователя заключается в том, чтобы изменения контролируемой (наблюдаемой) величины перевести в изменения величины, удобной для дальнейшего преобразования регулятором — в изменения перемещения, усилия, сопротивления, напряжения, тока, частоты. Другими словами, сигнал на выходе первичного измерительного преобразователя, называемый естественным сигналом, по своей физической природе отличается от наблюдаемого сигнала.

Нормирующий преобразователь заканчивает начатое преобразование и унифицирует пределы изменения сигнала.

Если естественный выходной сигнал является электрическим или пневматическим, то нормирующий преобразователь обычно выполняют отдельно. Датчик в этом случае состоит из двух приборов. При другой физической природе естественного выходного сигнала оба преобразователя конструктивно объединяют в один прибор — датчик.

2. Устройства преобразования, обработки, хранения информации и выработки команд управления. Эта центральная группа ГСП включает анализаторы сигналов, функциональные и операционные преобразователи, логические устройства, устройства памяти, задатчики, программные задатчики, регуляторы, а также управляющие вычислительные устройства и комплексы. Следовательно, эта группа содержит как собственно регуляторы, так и функциональные элементы, из которых их собирают.

3. Устройства использования командной информации для воздействия на процесс — исполнительные устройства. К их числу принадлежат усилители мощности командного сигнала, поступающего от регулятора или иного управляющего комплекса, и исполнительные механизмы, воздействующие на регулирующий орган объекта.

4. Устройства для приема, преобразования и передачи информации по каналам связи — телеустройства, шифраторы, дешифраторы и т. д. Данная группа содержит приборы и устройства, обеспечивающие соединение различных функциональных блоков первых трех групп между собой. Во многих САР роль таких устройств выполняют обычные провода (в электрических САР) или трубы (в пневматических и гидравлических САР), а перечисленные выше устройства используют лишь при необходимости передавать информацию на большие расстояния (телеуправление) или в условиях сильных помех.

Сопряжение отдельных приборов и устройств ГСП в системе обеспечивается прежде всего тем, что информация между ними передается унифицированными сигналами, которые разделяют на следующие группы: 1) электрические непрерывные сигналы тока и напряжения; 2) электрические непрерывные частотные сигналы; 3) электрические кодированные сигналы; 4) пневматические сигналы.

Пределы изменения сигнала каждой группы выбирают только из установленной ГОСТом шкалы.

Пределы изменения токовых сигналов постоянного тока могут быть следующими (см. ГОСТ 9895—69): 0—5 мА; минус 5—0 — плюс 5 мА; 0 — 20 мА; минус 20 — 0 — плюс 20 мА. В особых случаях допускают еще пределы 0 — 100 мА и минус 10 — 0 — плюс 100 мА.

Для сигналов напряжения постоянного тока установлены следующие пределы изменения: 0 — 10 мВ; минус 10 — 0 — плюс 10 мВ; 0 — 100 мВ; минус 100 — 0 — плюс 100 мВ; 0 — 1 В; минус 1 — 0 — плюс 1 В; 0 — 10 В; минус 10 — 0 — плюс 10 В.

Рабочий диапазон изменения пневматических сигналов находится в пределах 0,02—0,1 МПа (0,2—1,0 кГ/см²) (см. ГОСТ 9468—75).

Центральный научно-исследовательский институт информации и технико-экономических исследований приборостроения, средств автоматизации и систем управления (ЦНИИТЭИ приборостроения) в 1974 г. издал Генеральный каталог по Государственной системе промышленных приборов и средств автоматизации (рис. 1.5). В него включены подробные сведения о приборах и устройствах ГСП, вплоть до описания типовых конструкций, а также примеры применения средств ГСП в автоматизированных системах управления.

ЦНИИТЭИ приборостроения издает также отраслевой каталог «Приборы, средства автоматизации и системы управления», включающий сведения об указанной продукции, выпускаемой предприятиями Министерства приборостроения, средств автоматизации и систем управления. Каталог содержит отдельные выпуски (каталожные описания).

В каждое из них входят сведения о назначении и принципе действия прибора (изделия), его конструкции, надежности, комплектности и сведения о поставщике; приведены также технические данные и рекомендации по монтажу и эксплуатации.

Каталожные описания комплектуются в 22 томах.

1.4. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ЭЛЕМЕНТАХ САР

В САР используется весьма большое число элементов, различающихся своей физической природой, принципом действия, конструкцией и т. д. Они входят в перечисленные унифицированные системы, в ГСП или имеют универсальное назначение. Рассмотрим наиболее широко используемые элементы.

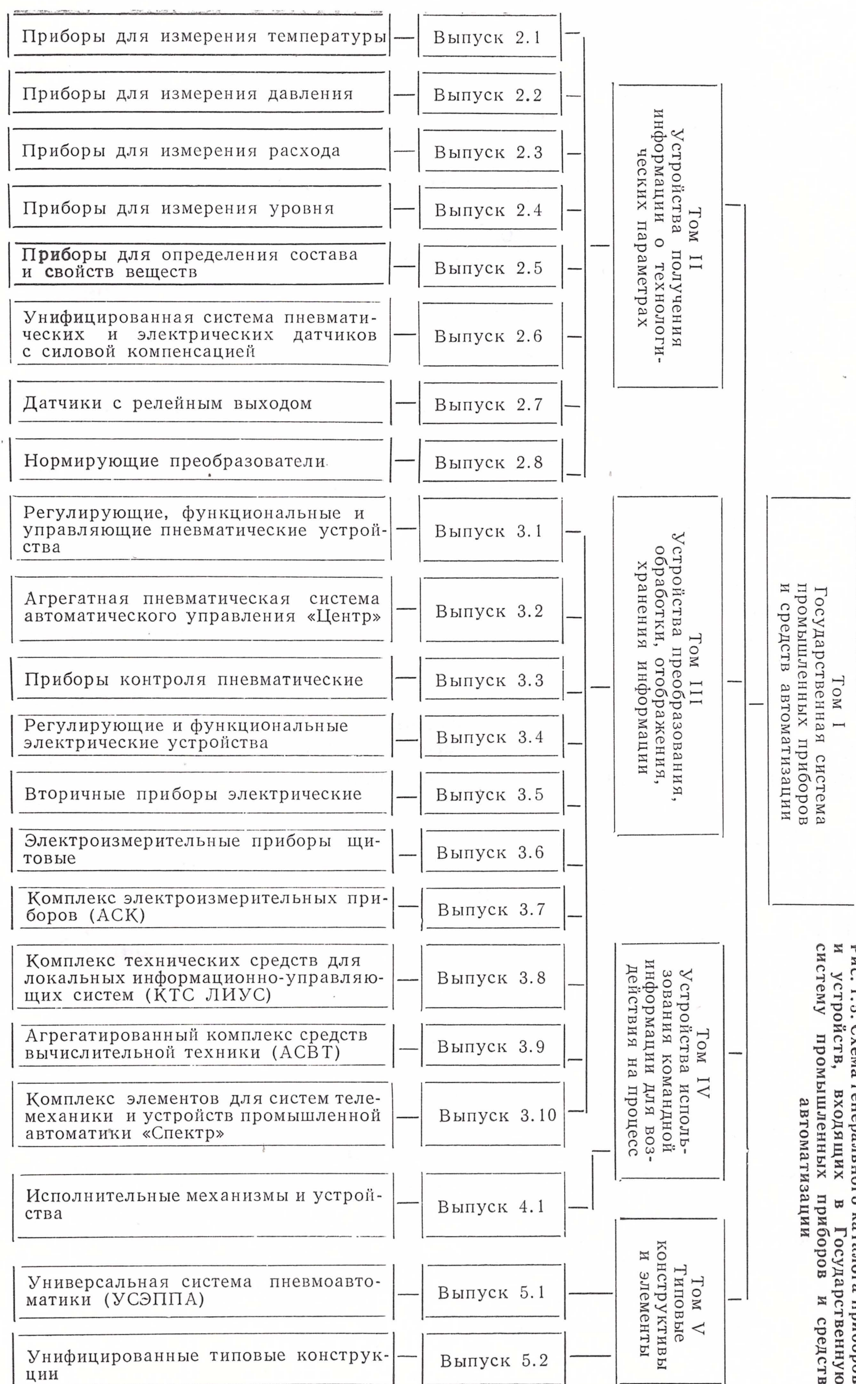


Рис. 1.5. Схема генерального каталога приборов и устройств, входящих в Государственную систему промышленных приборов и средств автоматизации

Чувствительные (измерительные) элементы и датчики [2, 10, 41, 55, 108]

Чувствительный (воспринимающий или измерительный) элемент создает физическую величину, пропорциональную контролируемому параметру какого-либо процесса и удобную для последующего преобразования в электрический или пневматический сигнал.

Если чувствительный элемент создает электрический или пневматический сигнал, то его принято называть датчиком. По терминологии ГСП датчиком называют лишь элемент, выдающий унифицированный сигнал.

Датчики служат для введения в регулятор информации о регулируемой величине и внешних воздействиях, которая необходима для процесса регулирования.

Наиболее распространены чувствительные элементы и датчики, выполняющие следующие измерения.

Измерение перемещения и угла поворота часто осуществляют с помощью простейших потенциометрических (реостатных) датчиков [55, 88], которые преобразуют линейное или угловое перемещение в напряжение постоянного тока. Более надежны бесконтактные индуктивные датчики, которые преобразуют перемещение в сигнал переменного тока.

В качестве датчиков угловых перемещений широко используют также специальные электрические машины переменного тока — сельсины [88].

Измерение угловых координат, которые являются регулируемыми величинами объектов, движущихся в пространстве, осуществляется гироскопическими устройствами.

Измерение угловой скорости и ускорения объектов регулирования следящих систем выполняют тахометрами и тахогенераторами. Для измерения угловой скорости объектов, движущихся в пространстве, применяют в основном гироскопические устройства. Ускорения измеряют механическими устройствами — акселерометрами.

Измерение усилий часто выполняют электрическим и пневматическим рычажными датчиками, которые входят в ГСП. Широко используют также тензометрический чувствительный элемент, который позволяет измерять и *вращающие моменты*. ГСП содержит силоизмерительные тензорезисторные датчики.

Измерение температуры осуществляют датчиками [92], в основу которых положено появление контактной термо-ЭДС, изменение электрического сопротивления, тепловое расширение, изменение интенсивности излучения и др. Экспериментальные данные о динамических свойствах некоторых датчиков температуры приведены в [129].

Измерение теплоэнергетических параметров (давления, перепада давления, расхода, уровня, плотности, температуры и силы) осуществляют пневматическими и электрическими датчиками унифицированной системы [29].

Элементы сравнения, суммирования и разветвления сигналов

Сравнение двух линейных или угловых перемещений с преобразованием результата в напряжение постоянного или переменного тока можно выполнять потенциометрами. Угловые перемещения можно сравнивать также механическим дифференциалом и сельсинной парой, работающей в трансформаторном режиме.

Наиболее часто встречаются сравнение и суммирование электрических напряжений и токов на резисторах, в магнитных и электромашинных усилителях с несколькими управляющими обмотками и в магнитоэлектрических элементах с несколькими рамками.

Суммирование электрических или пневматических сигналов осуществляют измерительными блоками или непосредственно регуляторами всех систем промышленной автоматики (блок суммирования и соотношения БСС1-01 системы УСАКР, блок суммирования А-04 системы «Каскад», суммирующий блок БС-34А системы АУС).

Сигналы, являющиеся линейными или угловыми перемещениями, разветвляются с помощью механических устройств. Электрические сигналы разветвляются соответствующим включением обмоток электрических элементов или резисторов. Разветвление (размножение) сигналов предусмотрено и в системах промышленной регулирующей аппаратуры.

Усилители

В подавляющем большинстве САР мощность сигнала рассогласования незначительна (иногда 10^{-4}—10^{-5} Вт) и совершенно недостаточна для приведения в действие исполнительного элемента. Поэтому возникает необходимость в усилителе, т. е. в устройстве, увеличивающем мощность сигнала за счет получения энергии извне.

К усилителям относят также устройства, которые одновременно с увеличением мощности преобразуют физическую природу сигнала.

Наибольшее распространение получили электрические усилители. К ним относятся электромашинные [88, 94, 123, 130], магнитные [5, 79, 86, 88, 96], релейные, электронные [10, 43, 55, 104, 111], выполненные как на электронных лампах, так и на транзисторах, ионные (тиратронные) и диэлектрические. Электрические усилители характеризуются широким диапазоном коэффициентов усиления (по мощности и по напряжению), высокой чувствительностью (прежде всего электронные), отсутствием подвижных частей (кроме электромашинных и с электромагнитным реле).

Достаточно широко применяют гидравлические и пневматические усилители, которые имеют высокие коэффициенты усиления

по мощности при большой выходной мощности. Обычно такие усилители одновременно выполняют роль исполнительных элементов, их называют серводвигателями или сервомеханизмами.

Исполнительные элементы

Исполнительный элемент САР воздействует на регулирующий орган объекта (чаще всего механически перемещает его) в соответствии с сигналом управления. По виду используемой энергии исполнительные элементы разделяют на электрические, гидравлические и пневматические.

Гидравлические [55, 121, 58] и пневматические [13, 33, 40, 55, 69, 99, 105] серводвигатели характеризуются большими усилиями или вращающими моментами при малых (сравнительно) габаритных размерах и высоком КПД. Кроме того, они являются быстродействующими и точными устройствами.

Электрические исполнительные элементы — электродвигатели постоянного и переменного тока [6, 56, 88, 94] и однооборотные электрические исполнительные механизмы [95, 127] нашли более широкое применение. Это объясняется универсальностью их применения, широким диапазоном входных и выходных величин, возможностью использования серийных машин и легкостью получения электрической энергии в различных условиях работы САР.

Объекты регулирования

Объектами регулирования могут быть самые разнообразные устройства, используемые в производственных процессах, энергетические и силовые установки, летательные аппараты, транспортные и другие средства, а также отдельные составные части перечисленных устройств. Научно-технический прогресс постоянно расширяет круг объектов регулирования, среди которых оказываются весьма специфичные. Например, искусственное сердце, искусственная почка и т. п. Решение задачи управления объектом (регулирования процесса в нем) начинается с его математического описания. При этом возможны два различных подхода. Один из них заключается в том, чтобы разделить рассматриваемый объект на элементы, которые описываются известными закономерностями. Тогда совокупность уравнений, описывающих эти элементы и связи между элементами, составит математическое описание объекта в целом.

Если подобный теоретический анализ объекта невозможен или дает лишь весьма приближенные результаты, используют экспериментальный подход, и необходимые характеристики объекта определяют непосредственно, наблюдая за его поведением в изменяющихся условиях. Методы экспериментального исследования объектов и обработки полученных результатов изложены в работах [1, 8, 9, 36, 45, 103] (см. п. 2.8 и 5.7).

На практике используют комбинированный подход и часть математического описания определяют теоретически, а часть экспериментально. Например, часто теоретически определяют вид дифференциальных уравнений, а экспериментально значения его параметров.

В литературе по автоматическому регулированию кратко рассмотрен ряд типовых объектов: гидротурбина [42, 114], паровая турбина [24], газотурбинный двигатель [99], дизель [42], ядерный энергетический реактор [42, 99, 114], ресивер [42], газопровод [83], летательный аппарат [42, 54, 99], авиационные источники электрической энергии [80] и другие и приводятся их уравнения.

Более детальное описание различных объектов имеется в литературе по автоматизации отдельных отраслей промышленности и видов техники, например в [20, 60, 68, 125].

Глава 2

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ И СИСТЕМ

Во введении уже указывали на то, что изменение состояния элементов и систем автоматического регулирования с течением времени (их динамика) описывается дифференциальными уравнениями. Ниже будут рассмотрены лишь стационарные элементы и системы. Уравнение такого элемента или такой системы не изменяется с течением времени и каждый динамический процесс зависит лишь от начальных условий и входных величин, но не зависит от момента времени, в который он начался. Предположение о стационарности есть идеализация, ибо не учитывается прежде всего старение элементов при эксплуатации.

Многие элементы САР описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. Чем сложнее явления, происходящие в элементе, тем больше, вообще говоря, вероятность того, что его уравнение окажется нелинейным. Далеко не всякое нелинейное дифференциальное уравнение может быть проинтегрировано и даже отыскание приближенного числового решения требует трудоемких расчетов. Поэтому при инженерных расчетах широко применяют линеаризацию, т. е. замену нелинейных дифференциальных уравнений приближенными линейными, для которых существует общий метод интегрирования (см., в частности, [74]).

В практике широко используют представление элементов их передаточными функциями, которые являются специфической записью линейных дифференциальных уравнений и позволяют давать математическое описание систем в виде наглядных структурных схем. Понятие о передаточных функциях и их определение основывается на преобразовании Лапласа.

Временные и частотные характеристики, которые описывают поведение элементов и систем в переходных и установившихся режимах и используются как при анализе, так и при синтезе САР, не учитывают их физической природы. Они обращают внимание только на динамические свойства, т. е. рассматривают не реальные весьма многообразные элементы, но их математические модели — динамические звенья. Передаточные функции элементов можно определять и по экспериментальным характеристикам.

Передаточные функции, структурные схемы, временные и частотные характеристики и типовые динамические звенья составляют тот специфический математический аппарат, который используется линейной теорией автоматического регулирования и управления. В основе всех этих понятий лежит описание динамических свойств элементов и систем дифференциальными уравнениями. Однако эти понятия, этот математический аппарат позволяют проводить анализ и синтез САР многими методами без интегрирования дифференциальных уравнений и непосредственного исследования их решений.

Достаточно гибкий и простой математический аппарат линейной теории автоматического регулирования находит применение и в других технических дисциплинах.

2.1. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ СТАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Часто встречаются элементы, у которых нелинейна лишь статическая характеристика, т. е. зависимость выходной величины y от входной величины u в установившемся режиме. Предположим, что на некотором участке $-u_м < u < u_м$ нелинейная характеристика может быть аппроксимирована прямой линией (рис. 2.1) и при действии элемента его входная величина u изменяется в указанных пределах. Тогда эта прямая и может быть принята за статическую характеристику. Следовательно, приближенно

$$y = ku, \tag{2.1}$$

где $k = \operatorname{tg} \alpha$.

Такую простую линеаризацию — метод осреднения — используют в инженерной практике, когда достаточно гладкая характеристика не может быть аппроксимирована аналитической функцией.

Более широко используют метод малых отклонений, который позволяет линеаризовать как нелинейные статические характеристики, так и нелинейные дифференциальные уравнения.

Выясним суть этого метода, для этого линеаризуем уравнение

$$\varphi(\ddot{y}, \dot{y}, y, \dot{u}, u, v) = 0, \tag{2.2}$$

где $u = u(t)$ и $v = v(t)$ — входные величины элемента (заданные функции времени); $y = y(t)$ — его выходная величина (искомая функция времени).

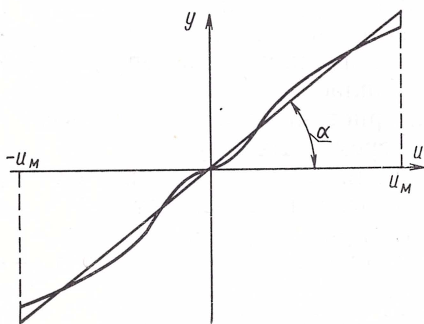


Рис. 2.1. Линеаризация статической характеристики методом осреднения

Для наглядности линеаризуем уравнение второго порядка, и число аргументов функции φ принимаем небольшим. Вообще, этот метод применим к уравнениям произвольного порядка с произвольным числом аргументов функции φ.

Если функция φ дифференцируема по всем своим аргументам, то она может быть разложена в ряд Тейлора в окрестности произвольно выбранной точки. При линеаризации уравнений элементов, входящих в САР, эта точка должна соответствовать установившемуся режиму. Предположим, что в этом режиме $u = u^0$, $v = v^0$ и $y = y^0$ есть постоянные величины, а $\dot{u} = \dot{y} = \ddot{y} = 0$. Тогда, после разложения функции φ в ряд, получим

$$\varphi(0,\ 0,\ y^0,\ 0,\ u^0,\ v^0) + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\ddot{y}}\right)^0 \Delta\ddot{y} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{y}}\right)^0 \Delta\dot{y} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^0 \Delta y + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{u}}\right)^0 \Delta\dot{u} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^0 \Delta u + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^0 \Delta v + \Phi = 0, \qquad (2.3)$$

где $\Delta u = u - u^0$; $\Delta\dot{u} = \dot{u}$, $\Delta v = v - v^0$, $\Delta y = y - y^0$, $\Delta\dot{y} = \dot{y}$ и $\Delta\ddot{y} = \ddot{y}$ — отклонения переменных от установившихся значений; $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\ddot{y}}\right)^0$, $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{y}}\right)^0$, . . . — частные производные от функции φ при $u = u^0$, $v = v^0$, $y = y^0$ и $\dot{u} = \dot{y} = \ddot{y} = 0$; Φ — сумма членов, которые содержат произведения отклонений и отклонения второй и более высоких степеней с коэффициентами в виде смешанных частных производных и частных производных второго и высших порядков от функции φ по соответствующим аргументам.

В устойчивых системах автоматического регулирования принципиально отклонения Δu, $\Delta\dot{u}$, Δv, Δy, $\Delta\dot{y}$, $\Delta\ddot{y}$ достаточно малы. Поэтому сумма Φ в уравнении (2.3) содержит лишь члены высшего порядка малости и ею можно пренебречь. Кроме того, следует принять во внимание уравнение установившегося режима

$$\varphi(0,\ 0,\ y^0,\ 0,\ u^0,\ v^0) = 0.$$

В результате получим искомое линеаризованное уравнение

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\ddot{y}}\right)^0 \Delta\ddot{y} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{y}}\right)^0 \Delta\dot{y} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^0 \Delta y + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{u}}\right)^0 \Delta\dot{u} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^0 \Delta u + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^0 \Delta v = 0. \qquad (2.4)$$

Уравнение (2.4) — линейное уравнение с постоянными коэффициентами, но оно приближенное по сравнению с уравнением (2.2), так как отброшена сумма Φ, и уравнение (2.4) содержит не переменные u, v и y, а их отклонения от установившегося режима. Но в ряде случаев $u^0 = v^0 = y^0 = 0$, поэтому $\Delta u = u$, $\Delta v = v$,

$\Delta y = y$ и линеаризованное уравнение оказывается уравнением для переменных u, v и y:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\ddot{y}}\right)^0 \ddot{y} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{y}}\right)^0 \dot{y} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^0 y + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{u}}\right)^0 \dot{u} +$$

$$+ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^0 u + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^0 v = 0. \qquad (2.5)$$

Однако возможны случаи, когда установившиеся значения переменных являются функциями времени. Тогда и коэффициенты уравнения (2.4) есть функции времени, т. е. линеаризованное уравнение оказывается нестационарным.

Необходимо также иметь в виду следующее. Отклонения Δu, $\Delta\dot{u}$ и Δv действительно малы тогда, когда переменные u и v есть выходные величины других элементов замкнутой системы автоматического регулирования. Если какая-то из входных величин рассматриваемого элемента представляет собой внешнее воздействие на систему, то должна быть выяснена возможность предположения о малости отклонений этой переменной и ее производных.

Очевидно, что метод малых отклонений неприменим для линеаризации уравнения (2.2), если функция φ имеет разрывы непрерывности или неоднозначность по какой-либо из переменных.

2.2. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В линейном дифференциальном уравнении выходную величину (искомую функцию времени) и ее производные принято записывать в левой части, а входные величины (заданные функции времени) в правой части. Принято также, что коэффициент при выходной величине элемента должен быть равен единице. Если уравнение не содержит выходной величины, то коэффициент при ее младшей производной должен быть равен единице.

При записи уравнений обычно используют оператор дифференцирования $p = \frac{d}{dt}$, который условно считают алгебраической величиной. При этом $\frac{d^2}{dt^2} = p^2$, $\frac{d^3}{dt^3} = p^3$, . . ., $\frac{d^n}{dt^n} = p^n$ и возможны несколько отличные одна от другой формы записи дифференциальных уравнений. Например, варианты записи линеаризованного уравнения (2.5) таковы:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ a_0p^2y + a_1py + y = k_1(bpu + u) + k_2v,\\ &2)\ (a_0p^2 + a_1p + 1)\,y = k_1(bp + 1)\,u + k_2v;\\ &3)\ Qy = k_1R_1u + k_2v, \end{aligned}\right\} \qquad (2.6)$$

где

$$a_0 = \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \ddot{y}}\right)^0}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^0}; \quad a_1 = \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{y}}\right)^0}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^0}; \quad k_1 = -\frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^0}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^0};$$

$$b = \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{u}}\right)^0}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^0}; \quad k_2 = -\frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^0}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^0};$$

$$Q = Q(p) = a_0 p^2 + a_1 p + 1 \text{ и } R_1 = R_1(p) = bp + 1$$

— линейные дифференциальные операторы.

При инженерных расчетах обычно не возникает необходимости в интегрировании дифференциальных уравнений отдельных элементов, а рассматривают совместно уравнения всех элементов САР, т. е. систему уравнений.

Если к САР приложено задающее воздействие $g = g(t)$ и возмущение $f = f(t)$, то ее система уравнений в общем случае будет следующей:

$$\left.\begin{aligned} Q_{11}y_1 + Q_{12}y_2 + \cdots + Q_{1k}y_k &= R_{11}g + R_{12}f; \\ Q_{21}y_1 + Q_{22}y_2 + \cdots + Q_{2k}y_k &= R_{21}g + R_{22}f; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ Q_{k1}y_1 + Q_{k2}y_2 + \cdots + Q_{kk}y_k &= R_{k1}g + R_{k2}f, \end{aligned}\right\} \qquad (2.7)$$

где $Q_{ij} = Q_{ij}(p)$; $R_{i1} = R_{i1}(p)$ и $R_{i2} = R_{i2}(p)$ — линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами (некоторые из этих операторов могут быть тождественно равными нулю); $y_i = y_i(t)$ — выходные величины элементов САР (ее обобщенные координаты).

Система уравнений (2.7) реальной САР не особенная и может быть приведена [74] к одному уравнению относительно одной из обобщенных координат. Чаще всего рассматривают уравнение САР для регулируемой координаты:

$$\mathscr{D}y = R_g g + R_f f, \qquad (2.8)$$

где $\mathscr{D} = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n$, $R_g = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \cdots + \ldots + b_m$ и $R_f = c_0 p^l + c_1 p^{l-1} + \ldots + c_l$ — линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, причем $m \leqslant n$ и $l \leqslant n$.

Для линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами выполняется чрезвычайно важный принцип суперпозиции. Он заключается в том, что каждая входная величина (заданная функция времени) создает составляющую выходной величины (искомой функции времени) независимо как от наличия

и характера изменения других входных величин, так и от начальных условий. Вместе с тем начальные условия вызывают переходный процесс, который не зависит от входных величин. Начальными условиями уравнения n-го порядка называются значения выходной величины (искомой функции времени) и ее производных до $(n - 1)$-й включительно в начальный момент времени.

Принцип суперпозиции, следовательно, означает, что решение $y = y(t)$ уравнения (2.8) при начальных условиях $y(0) = y^0$, $\dot{y}(0) = \dot{y}^0, \ldots, y^{n-1}(0) = y^{(n-1)^0}$ равно сумме трех составляющих:

$$y = y_g + y_f + y_{св}, \tag{2.9}$$

здесь $y_g = y_g(t)$ и $y_f = y_f(t)$ — решения соответственно неоднородных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{D}y &= \tilde{g} \quad (\tilde{g} = R_g g); \\ \mathscr{D}y &= \tilde{f} \quad (\tilde{f} = R_f f) \end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

при нулевых начальных условиях $y(0) = \dot{y}(0) = \ldots = y^{n-1}(0) = 0$, а $y_{св} = y_{св}(t)$ — решение однородного уравнения

$$\mathscr{D}y = 0 \tag{2.11}$$

при заданных начальных условиях $y(0) = y^0$; $\dot{y}(0) = \dot{y}^0, \ldots, y^{n-1}(0) = y^{(n-1)^0}$.

Последняя составляющая $y_{св}$ называется свободной составляющей и определяется значениями корней характеристического уравнения

$$\mathscr{D}(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \tag{2.12}$$

где s — комплексная величина.

Общее решение однородного уравнения (2.11) представляет собой сумму частных решений, которые зависят от корней характеристического уравнения (2.12):

каждому вещественному корню α_i соответствует частное решение вида

$$A_i e^{\alpha_i t} \tag{2.13}$$

(в частном случае α_i может быть равно нулю);

каждому вещественному корню α_j кратности ν соответствует ν частных решений

$$e^{\alpha_j t}\left(A_j + A_{j+1} t + \cdots + A_{j+\nu-1} t^{\nu-1}\right); \tag{2.14}$$

каждой паре сопряженных комплексных корней $\alpha_l + j\beta_l$ и $\alpha_l - j\beta_l$ соответствуют два частных решения

$$e^{\alpha_l t}\left(A_l \sin\beta_l t + B_l \cos\beta_l t\right) = C_l e^{\alpha_l t} \sin(\beta_l t + \psi_l) \tag{2.15}$$

(в частном случае α_l может быть равно нулю);

каждой паре сопряженных комплексных корней $\alpha_m + j\beta_m$ и $\alpha_m - j\beta_m$ кратности μ соответствует 2μ частных решений

$$\begin{aligned} &e^{\alpha_m t}\,(A_1 \sin\beta_m t + A_2 t \sin\beta_m t + \cdots + A_\mu t^{\mu-1} \sin\beta_m t + \\ &+ B_1 \cos\beta_m t + B_2 t \cos\beta_m t + \cdots + B_\mu t^{\mu-1} \cos\beta_m t) = \\ &= e^{\alpha_m t}\,[C_1 \sin(\beta_m t + \psi_1) + C_2 t \sin(\beta_m t + \psi_2) + \\ &+ \cdots + C_\mu t^{\mu-1} \sin(\beta_m t + \psi_\mu)]. \end{aligned} \qquad (2.16)$$

Постоянные интегрирования, которые входят в частные решения и обозначены буквами A, B, C и ψ определяются из системы алгебраических уравнений, составленных на основании начальных условий.

Пусть, например, корни характеристического уравнения есть α_1, α_2, α_3 кратности 2, $\alpha_4 + j\beta_4$, $\alpha_4 - j\beta_4$, $\alpha_5 + j\beta_5$ кратности 2 и $\alpha_5 - j\beta_5$ кратности 2. Тогда

$$\begin{aligned} y_{\text{св}} = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} + e^{\alpha_3 t}(A_3 + A_4 t) + C_4 e^{\alpha_4 t} \sin(\beta_4 t + \psi_4) + \\ + e^{\alpha_5 t}[C_5 \sin(\beta_5 t + \psi_5) + C_6 t \sin(\beta_5 t + \psi_6)]. \end{aligned}$$

При инженерных расчетах удобнее всего линейные дифференциальные уравнения решать операционным методом, который будет рассмотрен в гл. 4.

2.3. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ И СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ

Передаточной функцией элемента называется отношение изображений по Лапласу выходной и входной величин при нулевых начальных условиях. Поэтому для определения передаточных функций элемента нужно сначала преобразовать по Лапласу при нулевых начальных условиях дифференциальное уравнение этого элемента (имеется в виду линейное или линеаризованное уравнение).

Краткие сведения о преобразовании Лапласа даны в приложении 1. Подвергнем такому преобразованию при нулевых начальных условиях левую и правую части уравнения (2.6). Выполним преобразование последовательно, используя пп. 1 и 2 табл. П1.1:

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{L}\{a_0\ddot{y} + a_1\dot{y} + y\} = \mathcal{L}\{k_1(b\dot{u} + u) + k_2 v\}; \\ &\mathcal{L}\{a_0\ddot{y}\} + \mathcal{L}\{a_1\dot{y}\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{k_1 b\dot{u}\} + \mathcal{L}\{k_1 u\} + \\ &\qquad + \mathcal{L}\{k_2 v\}; \\ &a_0\mathcal{L}\{\ddot{y}\} + a_1\mathcal{L}\{\dot{y}\} + \mathcal{L}\{y\} = k_1 b\{\mathcal{L}\dot{u}\} + k_1\mathcal{L}\{u\} + k_2\mathcal{L}\{v\}; \\ &a_0 s^2 Y + a_1 s Y + Y = kbsU + k_1 U + k_2 V; \\ &(a_0 s^2 + a_1 s + 1)\,Y = k_1(bs + 1)\,U + k_2 V, \end{aligned}\right\} \quad (2.17)$$

где $Y = Y(s)$, $U = U(s)$ и $V = V(s)$ — изображения по Лапласу функций времени $y(t)$, $u(t)$ и $v(t)$; s — комплексная величина.

Полученное уравнение является алгебраическим. В операционном исчислении его обычно называют операторным.

Сопоставляя уравнение (2.17) с дифференциальным уравнением (2.6), легко сделать следующий вывод: формально преобразование по Лапласу при нулевых начальных условиях линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами заключается в замене оператора дифференцирования p комплексной величиной s и функций времени их изображениями. Этот вывод имеет большое практическое значение для расчетов.

Из уравнения (2.17), положив $V = 0$, определяем передаточную функцию рассматриваемого элемента относительно входного воздействия u:

$$W_u = \frac{Y}{U} = \frac{k_1(bs+1)}{a_0 s^2 + a_1 s + 1}. \quad (2.18)$$

Предположив, что $U = 0$, из уравнения (2.17) определим передаточную функцию элемента относительно входного воздействия v:

$$W_v = \frac{Y}{V} = \frac{k_2}{a_0 s^2 + a_1 s + 1}. \quad (2.19)$$

Аналогичным образом определяют передаточные функции относительно каждого входного воздействия, если у элемента их несколько.

Из выражений (2.18) и (2.19) очевидна независимость передаточных функций элемента от того, какими функциями времени являются его входные воздействия. Передаточные функции зависят лишь от вида дифференциального уравнения и от значения параметров элемента (коэффициентов дифференциального уравнения). Однако они полностью характеризуют преобразование входных воздействий в вынужденное движение элемента.

На основании выражений (2.18) и (2.19) можно составить следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned} &Y = W_u U \ \text{при} \ V = 0 \\ \text{и} \ &Y = W_v V \ \text{при} \ U = 0. \end{aligned}\right\} \quad (2.20)$$

И окончательно на основании принципа суперпозиции получим

$$Y = W_u U + W_v V. \quad (2.21)$$

Передаточные функции — это дробно-рациональные функции комплексной величины s. Они позволяют определить временные (см. п. 2.4 и гл. 4) и частотные (см. п. 2.5 и гл. 5) характеристики. Кроме того, передаточные функции используют при составлении структурных схем элементов и систем.

Структурная схема есть условное графическое изображение элемента или системы, которое дает наглядное представление об их строении и позволяет составить математическое описание — совокупность алгебраических уравнений, связывающих изображения всех переменных.

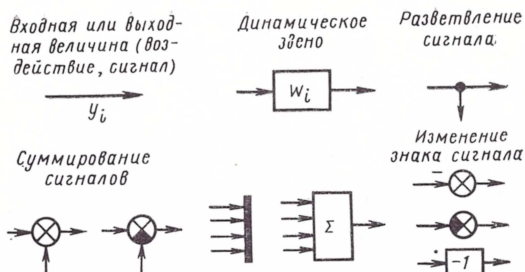
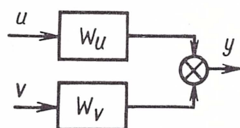


Рис. 2.2. Условные знаки структурных схем

Рис. 2.3. Структурная схема элемента, описываемого уравнением (2.21)



На схему наносят динамические звенья, составляющие элемент или систему. Динамическое звено (элемент или часть его) имеет лишь одну входную и одну выходную величину и описывается одной передаточной функцией. Термин «динамическое звено» принят вследствие того, что передаточная функция отображает лишь динамические свойства, а не физическую природу какого-то устройства. Динамическое звено изображают прямоугольником, в который вписывают передаточную функцию или только ее символ (обозначение). В последнем случае вид передаточных функций должен быть дан в пояснениях к схеме.

На схему в виде стрелок наносят также все внешние воздействия и воздействия динамических звеньев одного на другое. Около каждой стрелки указывают, какую физическую величину или обобщенную координату она изображает. Изменения этой величины и являются сигналом, передаваемой информацией.

Иногда выходная величина динамического звена воздействует на несколько звеньев, т. е. сигнал разветвляется. Это обозначают точкой, от которой отходит соответствующее число стрелок.

Суммирование сигналов (суммируются, конечно, только одинаковые по своей природе физические величины) обозначают кружком с крестом. Если один из сигналов вычитается, то у стрелки, изображающей этот сигнал, ставят знак «—» или зачерняют сектор кружка, к которому эта стрелка направлена. Некоторые принятые символы суммирования и изменения знака сигнала, а также все перечисленные условные знаки приведены на рис. 2.2.

На рис. 2.3 изображена структурная схема ранее рассмотренного элемента, составленная по равенству (2.21). Очевидно, что, имея эту схему, легко выполнить обратное — составить равенство (2.21), определяющее изображение Y выходной величины элемента. По $Y = Y(s)$, пользуясь обратным преобразованием Лапласа (см. приложение 1), можно определить функцию времени $y(t)$.

Если передаточные функции W_u и W_v элемента, определяемые выражениями (2.18) и (2.19), получены экспериментально (см. п. 2.8), то равенство (2.21) позволяет составить дифференциальное уравнение этого элемента. Нужно подставить в равенство значения W_u и W_v, привести его к общему знаменателю и отбросить знаменатель, а затем заменить комплексную величину s оператором

дифференцирования p и изображения переменных функциями времени. Выполним эти операции последовательно:

$$Y = W_u U + W_v V;$$

$$Y = \frac{k_1 (bs + 1)}{a_0 s^2 + a_1 s + 1} U + \frac{k_2}{a_0 s^2 + a_1 s + 1} V;$$

$$(a_0 s^2 + a_1 s + 1) Y = k_1 (bs + 1) U + k_2 V;$$

$$(a_0 p^2 + a_1 p + 1) y = k_1 (bp + 1) u + k_2 v.$$

Полученное дифференциальное уравнение соответствует уравнению (2.6) элемента.

Структурную схему САР составляют на основании ее функциональной схемы и дифференциальных уравнений элементов. Функциональная схема содержит сведения о назначении элементов и о том, какая физическая величина является регулируемой, какое из внешних воздействий задающее и какие из них возмущения. По функциональной схеме также видно взаимодействие элементов (его можно определить и по уравнениям элементов).

Дифференциальные уравнения элементов преобразуются в операторные. После этого можно разделить элементы на динамические звенья и определить передаточные функции последних.

При составлении структурной схемы удобно начинать с задающего воздействия и располагать динамические звенья, составляющие прямую цепь системы, слева направо до регулируемой величины. Тогда основная обратная связь системы и местные обратные связи будут направлены справа налево.

Пусть САР описывается уравнениями:

$$Q_1 y = R_1 z - R_{1f} f; \quad Q_2 z = R_2 (x - z_0);$$

$$Q_{02} z_0 = R_{02} z; \quad x = g - y_0; \quad Q_0 y_0 = R_0 y,$$

где y, g, f и x — регулируемая величина, задающее воздействие, возмущение и рассогласование; $Q_i = Q_i(p)$ и $R_i = R_i(p)$ — линейные дифференциальные операторы.

Преобразовав дифференциальные уравнения по Лапласу при нулевых начальных условиях, получим операторные уравнения:

$$Q_1 Y = R_1 Z - R_{1f} F; \quad Q_2 Z = R_2 (X - Z_0);$$

$$Q_{02} Z_0 = R_{02} Z; \quad X = G - Y_0; \quad Q_0 Y_0 = R_0 Y,$$

где Q_i и R_i — полиномы от s.

После определения передаточных функций динамических звеньев уравнения принимают следующий вид:

$$Y = W_1 Z - W_{1f} F; \quad Z = W_2 (X - Z_0);$$

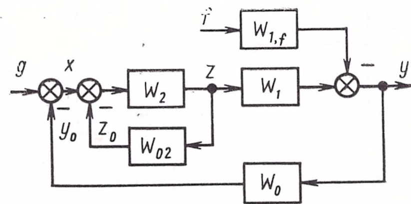
$$Z_0 = W_{02} Z; \quad X = G - Y_0; \quad Y_0 = W_0 Y,$$

где

$$W_1 = \frac{R_1}{Q_1}; \quad W_{1f} = \frac{R_{1f}}{Q_1}; \quad W_2 = \frac{R_2}{Q_2};$$

$$W_{02} = \frac{R_{02}}{Q_{02}}; \quad W_0 = \frac{R_0}{Q_0}.$$

Рис. 2.4. Структурная схема САР



По полученным равенствам строим структурную схему, которая изображена на рис. 2.4.

Следует заметить, что структурную схему САР можно рассматривать как один из видов направленного графа. Направленный граф (граф сигнала, диаграмма прохождения сигнала) представляет собой совокупность узлов (вершин) и соединяющих их ветвей (дуг) с обозначением направления передачи сигналов и их пропускной способности. Рассматривая структурную схему как граф, узлами (вершинами) считают все воздействия — внешние, внутренние и выходное, т. е. регулируемую величину, ветвями (дугами) — динамические звенья, а передаточными функциями определяют их пропускную способность.

Структурная схема САР позволяет составить ее передаточные функции, которые характеризуют свойства системы в целом. Этот вопрос будет рассмотрен в гл. 3.

2.4. ВРЕМЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Система дифференциальных уравнений (2.7), которая может быть приведена к уравнению (2.8) для регулируемой величины или к уравнению для рассогласования, является исчерпывающим математическим описанием стационарной линейной САР. Необходимо только иметь в виду некоторую неизбежную приближенность этого описания, которая возникает из-за идеализации процессов в элементах при составлении их уравнений, а также из-за линеаризации уравнений.

Наглядное представление о динамических свойствах САР даст решение $y(t)$ уравнения (2.8) или решение $x(t)$ уравнения для рассогласования, так как они покажут изменение этих величин во времени. Однако получить это решение практически не удается, ибо функция $g(t)$ известна лишь в системах стабилизации и системах программного регулирования, а функция $f(t)$ за очень редкими исключениями неизвестна.

Несмотря на это, решения дифференциальных уравнений САР (и отдельных элементов) широко используют как при анализе свойств систем, так и для целей синтеза — выбора структуры и параметров систем. Речь идет о решениях дифференциальных уравнений при некоторых стандартных типовых воздействиях. Такие решения и их графики называют временными характеристиками соответственно элементов и систем. Рассмотрим основные, наиболее употребительные временные характеристики.

Весьма часто имеет место резкое изменение внешнего воздействия на САР, например включение или выключение потребителей

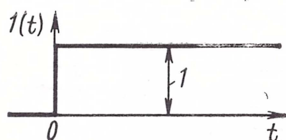


Рис. 2.5. График единичной ступенчатой функции

электрической энергии, увеличение или уменьшение момента сопротивления на валу регулируемого двигателя и т. п. Всегда важно оценить поведение САР в таких критических ситуациях, т. е. прежде всего выяснить, насколько значительным будет отклонение от нормального режима и насколько быстро и точно оно будет устранено регулятором.

Быстрое изменение воздействия в пределе можно считать мгновенным. А для того чтобы сравнивать поведение при этом различных систем и элементов, следует рассматривать строго определенные, нормированные изменения воздействий. Таким типовым изменением воздействия считают мгновенное его изменение от нуля до значения, равного единице. Для математической записи используют единичную ступенчатую функцию времени $1\,(t)$ (которую относят к классу обобщенных функций):

$$1\,(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t < 0; \\ 1 \text{ при } t \geqslant 0. \end{cases} \qquad (2.22)$$

График функции $1\,(t)$ показан на рис. 2.5.

Реакцию элемента или системы на входную величину, являющуюся единичной ступенчатой функцией времени $1\,(t)$, называют переходной характеристикой (переходной функцией) $h\,(t)$ элемента или системы.

На основании равенств (2.20) изображение по Лапласу $H = H\,(s)$ переходной характеристики $h\,(t)$ определяется выражением

$$H = W\frac{1}{s}, \qquad (2.23)$$

где $W = W\,(s)$ — передаточная функция элемента или системы; $\frac{1}{s}$ — изображение по Лапласу единичной ступенчатой функции (см. п. 1 табл. П1.2).

Если на элемент или систему действует несколько входных величин (имеется несколько входов), то определяется переходная характеристика для каждой из входных величин.

Переходные характеристики бывают неограниченно нарастающими, колеблющимися с постоянной амплитудой около нуля или около какой-нибудь другой постоянной величины, стремящимися различным образом к некоторому пределу (в частности, к нулю) и т. д. Переходные характеристики простейших (типовых) динамических звеньев будут рассмотрены в п. 2.6. Переходные характеристики систем определяют на основании равенства (2.23) операционным методом и графоаналитически (см. гл. 4), а также экспериментально.

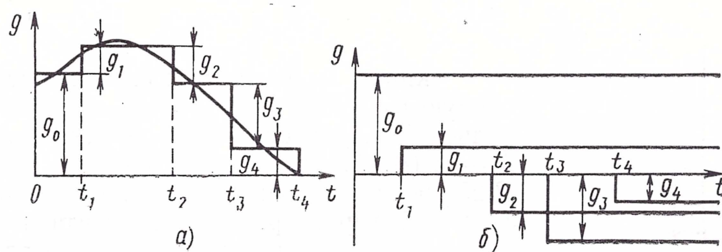


Рис. 2.6. Аппроксимация кривой $g(t)$ суммой ступенчатых воздействий

Если известна переходная характеристика h, а входное воздействие ступенчатое и равно $a\mathbf{1}(t)$, где $a = \text{const}$, то выходная величина равна ah.

Используя переходную характеристику, можно приближенно определить реакцию на входное воздействие, заданное произвольной кривой. Достаточно аппроксимировать площадь, ограниченную кривой, суммой сдвинутых во времени ступенчатых воздействий и просуммировать реакции на эти воздействия.

Пусть входное воздействие g определяется кривой (рис. 2.6, *а*), площадь которой аппроксимируется пятью ступенчатыми воздействиями (рис. 2.6, *б*). Тогда выходная величина

$$y(t) \approx g_0 h(t) + g_1 h(t - t_1) - g_2 h(t - t_2) - g_3 h(t - t_3) - \\ - g_4 h(t - t_4).$$

Другими часто встречающимися изменениями внешних воздействий являются их кратковременные, но существенные по величине всплески, импульсы. Например, порывы ветра, действующие на летательный аппарат, ударная нагрузка на двигатель и т. п.

Импульсное воздействие для нормирования следует считать единичным импульсом, т. е. импульсом, у которого произведение длительности на величину равно единице. На рис. 2.7 изображены графики единичных импульсов

$$g_1 t_{и1} = g_2 t_{и2} = g_3 t_{и3} = 1,$$

где $t_{иi}$ — достаточно мало.

Пределом, к которому стремится единичный импульс, когда его продолжительность стремится к нулю, есть единичная импульсная функция

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq 0, \\ \infty & \text{при } t = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1. \tag{2.24}$$

Единичная импульсная функция относится к классу обобщенных функций и представляет собой производную от единичной ступенчатой функции

$$\delta(t) = \frac{d\mathbf{1}(t)}{dt}. \tag{2.25}$$

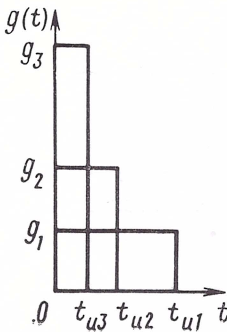


Рис. 2.7. Графики единичных импульсов

Реакцию элемента или системы на единичную импульсную функцию называют импульсной характеристикой (функцией веса) $w = w(t)$. На основании равенств (2.23) и (2.25) легко заключить, что изображение импульсной характеристики элемента или системы равно передаточной функции элемента или системы, а импульсная характеристика (функция веса) равна производной от переходной характеристики:

$$w = \frac{dh}{dt}. \tag{2.26}$$

Импульсные характеристики типовых динамических звеньев представлены в табл. 2.2.

При оценке динамических свойств элементов и систем, а также при синтезе систем наиболее широко используют переходную и импульсную характеристики. В настоящей книге предпочтение будет отдано переходной характеристике. Иногда оказываются необходимыми не только переходная и импульсная, но и временные характеристики, показывающие реакцию элементов и систем на некоторые другие воздействия (функции времени), например на воздействия, изменяющиеся с постоянной скоростью или ускорением.

2.5. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Переходные характеристики дают исчерпывающее представления прежде всего о поведении элементов и систем в переходных режимах. Информация об установившихся режимах достаточно наглядна в тех случаях, когда переходная характеристика асимптотически приближается к некоторому пределу. Если переходная характеристика представляет собой неограниченно нарастающую функцию времени, то из этого следует лишь, что процесс выходит из зоны линейности.

Для оценки установившихся режимов оказалось более удобным рассматривать поведение элементов и систем при воздействиях, являющихся периодическими функциями времени. В качестве таких воздействий были выбраны гармонические воздействия, что обусловлено несколькими обстоятельствами. Во-первых, большинство реально встречающихся воздействий может быть представлено в виде суммы гармоник различных частот (разложение Фурье). Во-вторых, в установившихся режимах гармонические сигналы передаются линейными элементами и системами без искажений. И в-третьих, обычно не возникает затруднений в экспе-

риментальном исследовании поведения линейных элементов и систем при гармонических воздействиях.

Пусть на вход стационарного линейного элемента или системы воздействует гармонический сигнал

$$A_1 \sin(\omega t + \psi_1),$$

где A_1, ψ_1, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ и T — его амплитуда, фаза, угловая частота и период.

Тогда на выходе с течением времени устанавливается гармонический сигнал

$$A_2 \sin(\omega t + \psi_2)$$

той же угловой частоты, но с измененной амплитудой и фазой. Изменение амплитуды и фазы зависят как от свойств рассматриваемого объекта (от вида его дифференциального уравнения и значения параметров), так и от угловой частоты ω гармонического сигнала (см. пример в начале гл. 4).

Отношение

$$A = \frac{A_2}{A_1} = A(\omega) \qquad (2.27)$$

и разность

$$\psi = \psi_2 - \psi_1 = \psi(\omega) \qquad (2.28)$$

называют соответственно амплитудно-частотной и фазочастотной характеристиками рассматриваемого элемента или системы.

Амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики показывают, что линейный элемент или система изменяют амплитуду и фазу гармонического сигнала: амплитуда уменьшается или увеличивается в A раз и сдвиг по фазе увеличивается или уменьшается на ψ градусов (или радиан).

Частотные характеристики каждого элемента и каждой системы зависят только от свойств этого элемента или этой системы, но не зависят от амплитуды и фазы входных гармонических сигналов (предполагается, что процесс не выходит из зоны линейности).

Исключив из уравнений (2.27) и (2.28) частоту ω, получим зависимость

$$A = \varphi(\psi), \qquad (2.29)$$

которую называют амплитудно-фазовой характеристикой.

Частотные характеристики всякого элемента или системы связаны с их передаточными функциями. Подставив в передаточную функцию $W(s)$ вместо s мнимую величину $j\omega$, получим комплексную функцию частоты ω

$$\overline{W} = \overline{W}(j\omega),$$

которую называют частотной передаточной функцией.

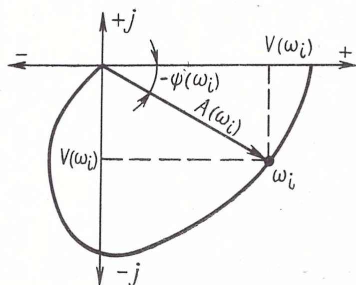


Рис. 2.8. Амплитудно-фазовая частотная характеристика

Функция $\overline{W}(j\omega)$ при каждом значении частоты ω является комплексной величиной, и поэтому может быть представлена в показательном виде

$$\overline{W}(j\omega) = A(\omega)\,e^{j\psi(\omega)}, \tag{2.30}$$

где

$$A(\omega) = |\overline{W}(j\omega)| \tag{2.31}$$

и

$$\varphi(\omega) = \arg \overline{W}(j\omega), \tag{2.32}$$

т. е. модуль и аргумент частотной передаточной функции определяют соответственно амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики.

Функция $\overline{W}(j\omega)$ может быть представлена и в алгебраическом виде

$$\overline{W}(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega), \tag{2.33}$$

где

$$U(\omega) = \mathrm{Re}\,\overline{W}(j\omega) \tag{2.34}$$

и

$$V(\omega) = \mathrm{Jm}\,\overline{W}(j\omega) \tag{2.35}$$

называют соответственно вещественной (действительной) и мнимой частотными характеристиками. Они не имеют конкретного физического смысла, но их используют при расчетах.

Годограф функции $\overline{W}(j\omega)$, т. е. геометрическое место концов векторов $\overline{W}(j\omega)$ при изменении частоты ω от нуля до бесконечности, представляет собой амплитудно-фазовую частотную характеристику (АФЧХ) (рис. 2.8). Эту характеристику строят на комплексной плоскости. По оси абсцисс откладывают вещественную часть $U(\omega)$ и по оси ординат — мнимую часть $V(\omega)$. Ее можно строить и в полярных координатах, откладывая векторы длиной $A(\omega)$ под углом $\psi(\omega)$. Углы отсчитывают от положительной полуоси абсцисс против часовой стрелки.

На основании равенств (2.30) и (2.33) легко составить соотношения, связывающие частотные характеристики одну с другой:

$$\left.\begin{aligned} A(\omega) &= \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)};\\ \psi(\omega) &= \operatorname{arctg}\frac{V(\omega)}{U(\omega)};\\ U(\omega) &= A(\omega)\cos\psi(\omega);\\ V(\omega) &= A(\omega)\sin\psi(\omega). \end{aligned}\right\} \tag{2.36}$$

Полезно заметить, что вещественная частотная характеристика есть четная функция частоты ω, мнимая частотная характеристика — нечетная функция:

$$U(-\omega) = U(\omega), \ V(-\omega) = -V(\omega). \qquad (2.37)$$

Широко используют логарифмические частотные характеристики: амплитудно-частотную (ЛАЧХ) и фазочастотную (ЛФЧХ).

При построении ЛАЧХ по оси абсцисс откладывают частоту в логарифмическом масштабе. Это означает, что наносят отметки, соответствующие $\lg \omega$, но около отметок указывают значения частоты ω.

Отрезок оси абсцисс, соответствующий изменению частоты в 10 раз, называется декадой, а отрезок, соответствующий изменению частоты в 2 раза, — октавой.

По оси ординат ЛАЧХ откладывают при равномерном масштабе логарифмическую амплитуду

$$L = 20 \lg A \text{ дБ}.$$

Нуль логарифмической амплитуды соответствует $A = 1$.

Нуль оси абсцисс лежит слева в бесконечности, так как $\lg 0 = -\infty$, поэтому ось ординат может пересекать ось абсцисс в любой точке. Эту точку выбирают так, чтобы график охватывал нужный диапазон частот.

У ЛФЧХ такая же ось абсцисс, а по оси ординат в равномерном масштабе откладывают фазу ψ в градусах (или радианах).

ЛФЧХ строят обычно под ЛАЧХ с тем, чтобы изменение фазы можно было сопоставить с изменением амплитуды. Оси абсцисс ЛАЧХ и ЛФЧХ можно совмещать.

Логарифмические частотные характеристики удобны тем, что небольшим графиком может быть охвачен широкий диапазон частот. При этом одинаково наглядно изменение частотных свойств как на малых, так на средних и высоких частотах. Небольшим графиком охватывается и широкий диапазон изменения амплитуды с одинаковой наглядностью изменения больших и малых амплитуд.

Кроме того, оказывается, что значительные участки ЛАЧХ с большой точностью могут быть заменены прямыми линиями — асимптотами. Они имеют отрицательный и положительный наклон, кратный 20 дБ/дек, т. е. 0 дБ/дек, — 20 дБ/дек, —40 дБ/дек, ..., а также +20 дБ/дек, +40 дБ/дек, ..., .

В ряде случаев оказывается возможным пренебречь кривизной ЛАЧХ на отдельных небольших участках частот. Тогда ЛАЧХ изображается отрезками прямых (асимптотами) и называется асимптотической ЛАЧХ. Для ее построения нужны лишь весьма простые вычисления.

Наиболее характерный вид имеют ЛАЧХ при следующих значениях модуля A частотной передаточной функции:

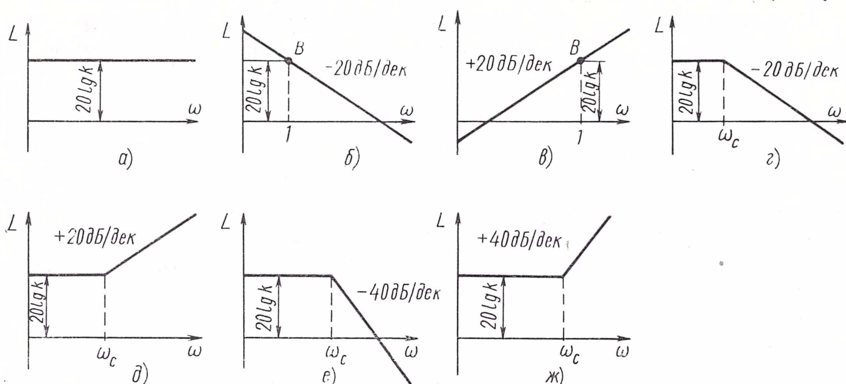


Рис. 2.9. Типовые асимптотические ЛАЧХ

а) $A = k$. В этом случае $L = 20 \lg k$ есть постоянная величина и ЛАЧХ представляет собой прямую, параллельную оси абсцисс (рис. 2.9, *а*);

б) $A = \frac{k}{\omega}$. В этом случае $L = 20 \lg k - 20 \lg \omega$. При $\omega = 1$ имеем $L = 20 \lg k$ и на протяжении одной декады (с увеличением ω в 10 раз) L уменьшается на 20 дБ. ЛАЧХ представляет собой прямую с наклоном —20 дБ/дек, проходящую через точку B с координатами $[1;\ 20 \lg k]$ (рис. 2.9, *б*);

в) $A = k\omega$. В этом случае $L = 20 \lg k + 20 \lg \omega$. Так же как и в предыдущем случае, при $\omega = 1$ имеем $L = 20 \lg k$. Затем, с увеличением ω, увеличивается и L на 20 дБ/дек. ЛАЧХ есть прямая с наклоном +20 дБ/дек, проходящая через точку B с координатами $[1;\ 20 \lg k]$ (рис. 2.9 *в*);

г) $A = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$. В этом случае $L = 20 \lg k - 10 \lg (1 + \omega^2 T^2)$. При малых частотах $\omega^2 T^2 \ll 1$ имеем $L \approx 20 \lg k$. Это низкочастотная асимптота, параллельная оси абсцисс. При больших частотах $\omega^2 T^2 \ll 1$ имеем $L \approx 20 \lg k - 20 \lg \omega T$. Это высокочастотная асимптота, которая уменьшается на 20 дБ/дек. Следовательно, асимптотическая ЛАЧХ образуется двумя асимптотами, которые сопрягаются при частоте $\omega_c = \frac{1}{T}$ (рис. 2.9, *г*), так как при этой частоте удовлетворяются уравнения обеих асимптот;

д) $A = k\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}$. В этом случае $L = 20 \lg k + 10 \lg (1 + \omega^2 \tau^2)$. Как и в предыдущем случае, асимптотическая ЛАЧХ составляется двумя асимптотами, которые сопрягаются при частоте $\omega_c = \frac{1}{\tau}$, но высокочастотная асимптота имеет положительный наклон (рис. 2.9, *д*);

е) $$A = \frac{k}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + (2\omega\xi T)^2}} = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 2T^2 (2\xi^2 - 1) + \omega^4 T^4}},$$

где $\xi < 1$. В данном случае $L = 20 \lg k - 10 \lg [1 + \omega^2 2T^2 (2\xi^2 - 1) + \omega^4 T^4]$. На малых частотах $L \approx 20 \lg k$ и на высоких частотах $L \approx 20 \lg k - 40 \lg \omega T$. Асимптотическая ЛАЧХ, как и в двух предыдущих случаях, составляется двумя асимптотами, которые сопрягаются при частоте $\omega_c = \frac{1}{T}$. Низкочастотная асимптота параллельна оси абсцисс, а высокочастотная имеет отрицательный наклон и уменьшается на 40 дБ/дек (рис. 2.9, *е*);

ж) $A = k\sqrt{(1 - \omega^2\tau^2) + (2\omega\zeta\tau)^2} = k\sqrt{1 + \omega^2 2\tau^2 (2\zeta^2 - 1) + \omega^4\tau^4}$,

где $\zeta < 1$. В этом случае $L = 20 \lg k + 10 \lg [1 + \omega^2 2\tau^2 (2\zeta^2 - 1) + \omega^4\tau^4]$.

Асимптотическая ЛАЧХ опять составляется двумя асимптотами, которые сопрягаются при частоте $\omega_c = \frac{1}{\tau}$. Низкочастотная асимптота $L \approx 20 \lg k$ параллельна оси абсцисс, а высокочастотная $L \approx 20 \lg k + 40 \lg \omega\tau$ имеет положительный наклон — увеличивается на 40 дБ/дек (рис. 2.9, *ж*).

2.6. ТИПОВЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ

Элементы, различные по физической природе, конструкции, мощности и другим характеристикам, но описываемые линейными дифференциальными уравнениями одного и того же вида (имеющие одинаковые передаточные функции), являются одинаковыми динамическими звеньями. У каждого динамического звена может быть лишь одна входная и одна выходная величина, поэтому элементы с несколькими входными или выходными величинами разделяют на соответствующее число динамических звеньев. Выходная величина всякого динамического звена не оказывает на него какого-либо влияния, т. е. динамические звенья имеют свойство однонаправленности.

Часто удобно разделять динамические звенья на простейшие составные части, на типовые динамические звенья, передаточные функции которых имеют в числителе и знаменателе полиномы от s не выше второго порядка.

Передаточную функцию динамического звена в общем случае можно представить как произведение сомножителей следующего вида:

$$\left.\begin{array}{c} k;\ s^{\nu};\ \dfrac{1}{Ts+1};\ \dfrac{1}{T^2s^2+2\xi Ts+1}; \\ \tau s+1 \text{ и } \tau^2 s^2+2\zeta\tau s+1, \end{array}\right\} \quad (2.38)$$

где k, ν, T, ξ, τ, ζ — постоянные, причем $k > 0$, ν может быть положительным и отрицательным целым числом, $T > 0$, $0 \leqslant \xi < 1$, $\tau > 0$, $0 \leqslant \zeta < 1$.

Таблица 2.1

Типовые динамические звенья

(k — передаточный коэффициент; T, τ — постоянные времени; ξ — коэффициент демпфирования: $p = \frac{d}{dt}$ — оператор дифференцирования; s — комплексная величина преобразования Лапласа)

	Тип звена	Дифференциальное уравнение	Передаточная функция $W = W(s)$
Позиционные звенья	Идеальное усилительное (безынерционное)	$y = ku$	$W = k$
	Апериодическое (инерционное)	$(Tp + 1)\ y = ku$	$W = \frac{k}{Ts + 1}$
	Апериодическое (инерционное) второго порядка	$\left(T_2^2p^2 + T_1p + 1\right)y = ku$, где $T_1 \geqslant 2T_2$	$W = \frac{k}{T_2^2s^2 + T_1s + 1} = \frac{k}{(T_3s + 1)(T_4s + 1)}$, где $T_{3,4} = \frac{1}{2}\left(T_1 \pm \sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}\right)$
	Колебательное	$(T^2p^2 + 2\xi Tp + 1)\ y = ku$, где $0 < \xi < 1$	$W = \frac{k}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1}$
	Консервативное	$(T^2p^2 + 1)\ y = ku$	$W = \frac{k}{T^2s^2 + 1}$
Интегрирующие	Интегрирующее идеальное	$py = ku$	$W = \frac{k}{s}$
	Интегрирующее инерционное	$p\ (Tp + 1)\ y = ku$	$W = \frac{k}{s\ (Ts + 1)}$
	Изодромное	$py = k\ (\tau p + 1)\ u$	$W = \frac{k\ (\tau s + 1)}{s} = k_1 + \frac{k}{s}$, где $k_1 = k\tau$
	Изодромное второго порядка	$p^2y = k\ (\tau^2p^2 + 2\zeta\tau p + 1)\ u$, где $0 < \zeta < 1$	$W = \frac{k\ (\tau^2s^2 + 2\zeta\tau s + 1)}{s^2} = k_2 + \frac{k_1}{s} + \frac{k}{s^2}$, где $k_2 = k\tau^2$; $k_1 = k2\zeta\tau$

Тип звена		Дифференциальное уравнение	Передаточная функция $W = W(s)$
Дифференцирующие	Дифференцирующее идеальное	$y = kpu$	$W = ks$
	Дифференцирующее инерционное	$(Tp+1)\ y = kpu$	$W = \frac{ks}{Ts+1}$
	Форсирующее идеальное	$y = k\ (\tau p + 1)\ u$	$W = k\ (\tau s + 1)$
	Форсирующее идеальное второго порядка	$y = k\ (\tau^2 p^2 + 2\zeta\tau p + 1)\ u$, где $\zeta < 1$	$W = k\ (\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1)$
		$y = kp\ (\tau p + 1)\ u$	$W = ks\ (\tau s + 1)$

В соответствии с видом сомножителей (2.38) в табл. 2.1 приведены типовые динамические звенья. В ней даны дифференциальные уравнения и передаточные функции всех этих звеньев и показано их деление по основным свойствам на три группы: позиционные, интегрирующие и дифференцирующие. В табл. 2.2 приведены временные и в табл. 2.3 частотные характеристики типовых динамических звеньев. Построение логарифмических частотных характеристик будет рассмотрено в п. 5.3.

Позиционные звенья, кроме консервативного, характеризуются тем, что в каждом из них при подаче на вход постоянной величины с течением времени устанавливается постоянное значение выходной величины. Отношение установившихся значений выходной и входной величин называют передаточным коэффициентом k звена.

В безынерционном (идеальном) звене при скачкообразном изменении входной величины мгновенно без какого-либо запаздывания изменяется и выходная величина — переходного процесса нет. В апериодическом звене выходная величина нарастает монотонно. Продолжительность переходного процесса зависит от второго параметра звена, называемого постоянной времени T. Чем больше постоянная времени, тем медленнее протекает переходный процесс.

В апериодическом звене второго порядка переходный процесс также монотонный, но его продолжительность зависит от двух постоянных времени T_1 и T_2.

Выходная величина колебательного звена в переходном процессе совершает колебания около того значения, которое должно установиться. Затухание колебаний зависит от значения третьего параметра звена, называемого коэффициентом демпфирования ξ,

Временные характеристики типовых динамических звеньев *Таблица 2.2*

Тип звена и его передаточная функция $W = W(s)$	Переходная характеристика $h = h(t)$	Импульсная характеристика (функция веса) $w = w(t)$
Идеальное усилительное (безынерционное) $W = k$	$h = k$	$w = k\delta(t)$
Апериодическое (инерционное) $W = \frac{k}{Ts+1}$	$h = k\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$	$w = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}}$
Апериодическое (инерционное) второго порядка $W = \frac{k}{T_2^2 s^2 + T_1 s + 1} = \frac{k}{(T_3 s + 1)(T_4 s + 1)}$, где $T_1 \geqslant 2T_2$; $T_{3,4} = \frac{1}{2}\left(T_1 \pm \sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}\right)$; $T_3 \geqslant T_4$	$h = k\left[1 - \frac{1}{T_3 - T_4} \times \left(T_3 e^{-\frac{t}{T_3}} - T_4 e^{-\frac{t}{T_4}}\right)\right]$	$w = \frac{k}{T_3 - T_4} \times \left(e^{-\frac{t}{T_3}} - e^{-\frac{t}{T_4}}\right)$
Колебательное $W = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}$, где $0 < \xi < 1$	$h = k\left[1 - \frac{1}{\lambda T} e^{-\frac{\xi t}{T}} \times \sin(\lambda t + \theta)\right]$, где $\lambda = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T}$; $\theta = \operatorname{arctg} \frac{\lambda T}{\xi}$; $\sigma_1 = k e^{-\frac{\xi \pi}{\lambda T}}$; $\ln \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\xi \pi}{\lambda T}$	$w = \frac{k}{\lambda T^2} e^{-\frac{\xi t}{T}} \sin \lambda t$

Тип звена и его передаточная функция $W = W(s)$	Переходная характеристика $h = h(t)$	Импульсная характеристика (функция веса) $w = w(t)$
Консервативное $W = \frac{k}{T^2s^2 + 1}$	$h = k\left(1 - \cos\frac{t}{T}\right)$ h, 0, πT, πT, πT, k, t	$w = \frac{k}{T}\sin\frac{t}{T}$ w, 0, k/T, πT, πT, πT, t
Интегрирующее идеальное $W = \frac{k}{s}$	$h = kt$ h, 0, α, t $\alpha = \operatorname{arctg} k$	$w = k$ w, 0, k, t
Интегрирующее инерционное $W = \frac{k}{s(Ts + 1)}$	$h = k\left[t - T\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)\right]$ h, 0, T, α, t $\alpha = \operatorname{arctg} k$	$w = k\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$ w, T, 0, k, t
Изодромное $W = \frac{k(\tau s + 1)}{s} = k_1 + \frac{k}{s}$, где $k_1 = k\tau$	$h = k_1 + kt$ w, 0, α, k_1, t $\alpha = \operatorname{arctg} k$	$w = k_1\delta(t) + k$ w, 0, k, t

Тип звена и его передаточная функция $W = W(s)$	Переходная характеристика $h = h(t)$	Импульсная характеристика (функция веса) $w = w(t)$
Изодромное второго порядка $W = \frac{k(\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1)}{s^2} = k_2 + \frac{k_1}{s} + \frac{k}{s^2}$, где $k_2 = k\tau^2$; $k_1 = k2\zeta\tau$	$h = k_2 + k_1 t + kt^2$	$w = k_2\delta(t) + k_1 + 2kt$; $\alpha = \operatorname{arctg} 2k$
Дифференцирующее идеальное $W = ks$	$h = k\delta(t)$	$w = kp\delta(t)$
Дифференцирующее инерционное $W = \frac{ks}{Ts + 1}$	$h = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}}$	$w = \frac{k}{T}\delta(t) - \frac{k}{T^2} e^{-\frac{t}{T}}$

Таблица 2.3

Частотные характеристики типовых динамических звеньев

Тип звена и его частотная передаточная функция $\overline{W} = \overline{W}(j\omega)$	Амплитудная $A = A(\omega)$, фазовая $\psi = \psi(\omega)$, вещественная $U = U(\omega)$ и мнимая $V = V(\omega)$ частотные характеристики	Амплитудно-фазовая частотная характеристика	Логарифмические характеристики; асимптотическая амплитудно-частотная $L = L(\omega)$ и фазочастотная $\psi = \psi(\omega)$
Идеальное усилительное $\overline{W} = k$	$A = k;\ \ \psi = 0°;\ \ U = k;\ \ V = 0$	+j, −j, ω=0, ω=∞, −, + $U(0) = U(\infty) = k$	L, 0, L(0), ω; φ, 0, ω $L(0) = L(\infty) = 20 \lg k$
Апериодическое (инерционное) $\overline{W} = \dfrac{k}{1 + j\omega T}$	$A = \dfrac{k}{\sqrt{1+\omega^2T^2}};\ \ \psi = -\operatorname{arctg} \omega T;$ $U = \dfrac{k}{1+\omega^2T^2};\ \ V = \dfrac{-k\omega T}{1+\omega^2T^2}$	+j, −j, ω=∞, ω=0, 45°, ω_1, −, + $U(0) = k;$ $U(\omega_1) = \dfrac{k}{2};$ $V(\omega_1) = -\dfrac{k}{2};$ $\omega_1 = \dfrac{1}{T}$	L, 0, L(0), −20 дб/дек, ω_1, ω; 0, 45, 90, −φ, град, ω $L(0) = 20 \lg k$

Продолжение табл. 2.3

Тип звена и его частотная передаточная функция $\overline{W} = \overline{W}(j\omega)$	Амплитудная $A = A(\omega)$, фазовая $\psi = \psi(\omega)$, вещественная $U = U(\omega)$ и мнимая $V = V(\omega)$ частотные характеристики	Амплитудно-фазовая частотная характеристика	Логарифмические характеристики: асимптотическая амплитудно-частотная $L = L(\omega)$ и фазочастотная $\psi = \psi(\omega)$
Апериодическое второго порядка $\overline{W} = \frac{k}{(1-\omega^2 T_2^2) + j\omega T_1} = \frac{k}{(1-\omega^2 T_3 T_4) + j\omega(T_3+T_4)}$, где $T_{3,4} = \frac{1}{2}\left(T_1 \pm \sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}\right)$; $T_1 \geqslant 2T_2$; $T_3 \geqslant T_4$	$A = \frac{k}{\sqrt{1+\omega^2(T_1^2-2T_2^2)+\omega^4 T_2^4}}$; $\psi = -\operatorname{arctg}\frac{\omega T_1}{1-\omega^2 T_2^2}$; $U = \frac{k(1-\omega^2 T_2^2)}{1+\omega^2(T_1^2-2T_2^2)+\omega^4 T_2^4}$; $U = \frac{-k\omega T_1}{1+\omega^2(T_1^2-2T_2^2)+\omega^4 T_2^4}$	$U(0) = k$; $V(\omega_2) = \frac{kT_2}{T_1}$; $\omega_2 = \frac{1}{T_2}$	$L(0) = 20 \lg k$
Колебательное $\overline{W} = \frac{k}{(1-\omega^2 T^2) + j\omega 2\xi T}$, где $0 < \xi < 1$	$A = \frac{k}{\sqrt{1+\omega^2 2T^2(2\xi^2-1)+\omega^4 T^4}}$; $\psi = -\operatorname{arctg}\frac{\omega 2\xi T}{1-\omega^2 T^2}$; $U = \frac{k(1-\omega^2 T^2)}{1+\omega^2 2T^2(2\xi^2-1)+\omega^4 T^4}$; $V = \frac{-k\omega 2\xi T}{1+\omega^2 2T^2(2\xi^2-1)+\omega^4 T^4}$	$\omega_1 = \frac{1}{T}$; $U(0) = k$; $V(\omega_1) = \frac{k}{2\xi}$	$L(0) = 20 \lg k$

Тип звена и его частотная передаточная функция $\overline{W} = \overline{W}(j\omega)$	Амплитудная $A = A(\omega)$, фазовая $\psi = \psi(\omega)$, вещественная $U = U(\omega)$ и мнимая $V = V(\omega)$ частотные характеристики	Амплитудно-фазовая частотная характеристика	Логарифмические характеристики; асимптотическая амплитудно-частотная $L = L(\omega)$ и фазочастотная $\psi = \psi(\omega)$
Консервативное $\overline{W} = \frac{k}{1 - \omega^2 T^2}$	$A = U = \frac{k}{1 - \omega^2 T^2}$; $\psi = 0°$; $V = 0$	$U(0) = k$; $\omega_1 = \frac{1}{T}$	$L(0) = 20 \lg k$
Интегрирующее идеальное $\overline{W} = \frac{k}{j\omega}$	$A = \frac{k}{\omega}$; $U = 0$; $V = -\frac{k}{\omega}$; $\psi = -90°$		$\omega_c = k$
Интегрирующее инерционное $\overline{W} = \frac{k}{-\omega^2 T + j\omega}$	$A = \frac{k}{\omega\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$; $\psi = -90° - \operatorname{arctg} \omega T$; $U = \frac{-kT}{1 + \omega^2 T^2}$; $V = \frac{-k}{\omega(1 + \omega^2 T^2)}$	$U(0) = -kT$	$\omega_1 = \frac{1}{T}$; $\omega_c = k$

Продолжение табл. 2.3

Тип звена и его частотная передаточная функция $\overline{W} = \overline{W}(j\omega)$	Амплитудная $A = A(\omega)$, фазовая $\psi = \psi(\omega)$, вещественная $U = U(\omega)$ и мнимая $V = V(\omega)$ частотные характеристики	Амплитудно-фазовая частотная характеристика	Логарифмические характеристики; асимптотическая амплитудно-частотная $L = L(\omega)$ и фазочастотная $\psi = \psi(\omega)$
Изодромное $\overline{W} = \frac{k(1 + j\omega\tau)}{j\omega}$	$A = \frac{k}{\omega}\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}$; $\psi = -90° + \operatorname{arctg}\omega\tau$; $U = k_1$, где $k_1 = k\tau$; $V = -\frac{k}{\omega}$	$U(0) = U(\infty) = k_1$	$\omega_1 = \frac{1}{\tau}$ $L(\infty) = 20\lg k_1$
Изодромное второго порядка $\overline{W} = \frac{k[(1 - \omega^2\tau^2) + j\omega 2\zeta\tau]}{-\omega^2}$	$A = \frac{k}{\omega^2}\sqrt{1 + \omega^2 2\tau^2(2\zeta^2 - 1) + \omega^4\tau^4}$; $\psi = \operatorname{arctg}\frac{\omega 2\zeta\tau}{1 - \omega^2\tau^2} - 180°$; $U = -\frac{k}{\omega^2}(1 - \omega^2\tau^2)$; $V = -\frac{k2\zeta\tau}{\omega}$	$\omega_1 = \frac{1}{\tau}$ $U(0) = k\tau^2$	$L(\infty) = 20\lg k\tau^2$

Тип звена и его частотная передаточная функция $\overline{W} = \overline{W}(j\omega)$	Амплитудная $A = A(\omega)$, фазовая $\psi = \psi(\omega)$, вещественная $U = U(\omega)$ и мнимая $V = V(\omega)$ частотные характеристики	Амплитудно-фазовая частотная характеристика	Логарифмические характеристики: асимптотическая амплитудно-частотная $L = L(\omega)$ и фазочастотная $\psi = \psi(\omega)$
Дифференцирующее идеальное $\overline{W} = jk\omega$	$A = k\omega;\quad \psi = +90°;\quad U = 0;$ $V = k\omega$		$\omega_c = \dfrac{1}{k}$
Дифференцирующее инерционное $\overline{W} = \dfrac{jk\omega}{1 + j\omega T}$	$A = \dfrac{k\omega}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}};$ $\psi = 90° - \operatorname{arctg} \omega T;$ $U = \dfrac{kT\omega^2}{1 + \omega^2 T^2};\quad V = \dfrac{k\omega}{1 + \omega^2 T^2}$	$\omega_1 = \dfrac{1}{T}$ $U(\omega_1) = V(\omega_1) = \dfrac{k}{2T}$	$\omega_c = \dfrac{1}{k}\quad L(\infty) = 20 \lg \dfrac{k}{T}$
Форсирующее идеальное $\overline{W} = k(1 + j\omega\tau)$	$A = k\sqrt{1 + \omega^2\tau^2};$ $\psi = \operatorname{arctg} \omega\tau;\quad U = k;\quad V = k\omega\tau$	$U(0) = U(\infty) = k$	$\omega_1 = \dfrac{1}{\tau}\quad L(0) = 20 \lg k$

Продолжение табл. 2.3

Тип звена и его частотная передаточная функция $\overline{W} = \overline{W}(j\omega)$	Амплитудная $A = A(\omega)$, фазовая $\psi = \psi(\omega)$, вещественная $U = U(\omega)$ и мнимая $V = V(\omega)$ частотные характеристики	Амплитудно-фазовая частотная характеристика	Логарифмические характеристики: асимптотическая амплитудно-частотная $L = L(\omega)$ и фазочастотная $\psi = \psi(\omega)$
Форсирующие идеальные второго порядка			
$\overline{W} = k[(1 - \omega^2\tau^2) + j\omega 2\zeta\tau]$	$A = k\sqrt{1 + \omega^2 2\tau^2 (2\zeta^2 - 1) + \omega^4\tau^4}$; $\psi = \operatorname{arctg}\frac{\omega 2\zeta\tau}{1 - \omega^2\tau^2}$; $U = k(1 - \omega^2\tau^2)$; $V = k\omega 2\zeta\tau$	$U(0) = k$; $\omega_1 = \frac{1}{\tau}$; $V(\omega_1) = \frac{\omega k 2\zeta}{\tau}$	$L(0) = 20 \lg k$
$\overline{W} = k(-\omega^2\tau + j\omega)$	$A = k\omega\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}$; $\psi = 90^\circ + \operatorname{arctg}\omega\tau$; $U = -\omega^2 k\tau$; $V = \omega k$	$\omega_1 = \frac{1}{\tau}$; $U(\omega_1) = -\frac{k}{\tau}$; $V(\omega_1) = k\tau$	

который лежит в пределах $0 < \xi < 1$. Чем больше ξ, тем меньше отклонения σ_1, σ_2, ... и тем быстрее заканчивается переходный процесс.

Амплитудно-частотная характеристика колебательного звена имеет пик

$$A_м = \frac{k}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \tag{2.39}$$

при частоте

$$\omega_м = \frac{\sqrt{1-2\xi^2}}{T}, \tag{2.40}$$

которую называют резонансной.

Консервативное звено есть вырожденный случай колебательного звена ($\xi = 0$). Возникшие в нем колебания никогда не затухают. Передаточный коэффициент k указывает отношение амплитуды гармонических колебаний выходной величины к постоянной входной величине.

Представление реального элемента в виде консервативного динамического звена есть, вообще говоря, идеализация, к которой прибегают при очень малых значениях коэффициента демпфирования. Поэтому консервативное звено условно относят к позиционным.

Интегрирующие звенья характеризуются тем, что при постоянном входном воздействии выходная величина неограниченно растет. У идеального интегрирующего звена передаточный коэффициент k определяет скорость этого роста. У интегрирующего инерционного (реального интегрирующего) звена такой режим пропорционального роста выходной величины устанавливается не сразу, а тем позднее, чем больше постоянная времени T.

В изодромных звеньях имеет место некоторый начальный скачок выходной величины и затем ее неограниченное нарастание. Передаточный коэффициент k изодромного звена первого порядка определяет скорость последующего нарастания выходной величины, а изодромного звена второго порядка — постоянное ускорение, с которым нарастает выходная величина.

Дифференцирующие звенья реагируют лишь на изменения входной величины. Например, если входная величина идеального дифференцирующего звена нарастает с постоянной скоростью, то выходная величина удерживается на постоянном уровне, пропорциональном этой скорости.

В природе идеальных дифференцирующих звеньев нет — они всегда имеют некоторую (хотя бы и очень малую) инерционность. При линейном нарастании входной величины реального дифференцирующего звена постоянное значение его выходной величины устанавливается не сразу, а тем позже, чем больше постоянная времени T.

Форсирующие звенья сочетают в себе свойства позиционного и дифференцирующего звеньев.

Интегродифференцирующие звенья иногда относят к типовым динамическим звеньям, хотя они могут быть разделены на звенья, относящиеся к первым трем группам.

Эти звенья в одних диапазонах частот проявляют интегрирующие свойства, а в других диапазонах дифференцирующие свойства, что определяется как видом передаточной функции, так и соотношением постоянных времени T и τ. Интегродифференцирующими звеньями являются корректирующие устройства (см. гл. 8), нашедшие весьма широкое применение в системах автоматического регулирования.

Существуют еще так называемые *неминимально-фазовые звенья*, к которым относят прежде всего неустойчивые звенья, у которых полином знаменателя передаточной функции имеет хотя бы один корень с положительной вещественной частью.

К неминимально-фазовым относят также звенья, у которых полином числителя передаточной функции имеет хотя бы один корень с положительной вещественной частью.

Наименование неминимально-фазовых звеньев объясняется особенностью их частотных свойств: они создают больший (отрицательный или положительный) сдвиг по фазе, чем звенья с такими же амплитудно-частотными характеристиками.

Например, у апериодического звена передаточная функция $W = \frac{k}{Ts+1}$, частотные характеристики $A = \frac{k}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}$ и $\psi = -\mathrm{arctg}\,\omega T$. У неминимально-фазового звена с передаточной функцией $W = \frac{k}{Ts-1}$ частотные характеристики $A = \frac{k}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}$ и $\psi = -\mathrm{arctg}\,\frac{\omega T}{-1} = -180° + \mathrm{arctg}\,\omega T$. Таким образом, у рассматриваемых звеньев одна и та же амплитудно-частотная характеристика, но значения фазочастотной характеристики неминимально-фазового звена больше по абсолютной величине.

У форсирующего звена передаточная функция $W = k(\tau s + 1)$, частотные характеристики $A = k\sqrt{1+\omega^2\tau^2}$ и $\psi = \mathrm{arctg}\,\omega\tau$. Неминимально-фазовое звено с передаточной функцией $W = k(\tau s - 1)$ имеет $A = k\sqrt{1+\omega^2\tau^2}$ и $\psi = \mathrm{arctg}\,\frac{\omega\tau}{-1} = 180° - \mathrm{arctg}\,\omega\tau$. Опять амплитудно-частотные характеристики этих звеньев одинаковые, а значения фазочастотной характеристики неминимально-фазового звена больше по абсолютной величине.

2.7. ТИПОВЫЕ СОЕДИНЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗВЕНЬЕВ

Сложные элементы и САР состоят из некоторого числа соединенных между собой динамических звеньев. Наиболее простыми и часто встречающимися (типовыми) соединениями звеньев являются (рис. 2.10) последовательное, параллельное и встречно-параллельное (охват звена обратной связью).

При последовательном соединении выходная величина каждого из звеньев, кроме последнего, служит входной величиной последующего звена. Эквивалентную передаточную функцию $W_э$ по-

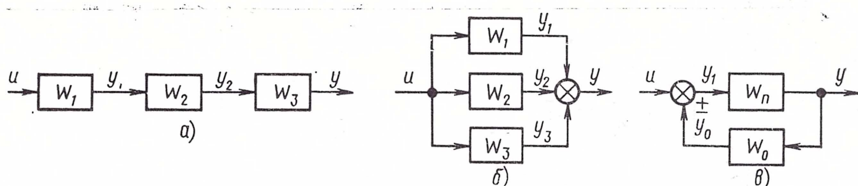


Рис. 2.10. Типовые соединения динамических звеньев:
а — последовательное, *б* — параллельное и *в* — встречно-параллельное

следовательного соединения можно определить, используя равенство (2.20). Для соединения, показанного на рис. 2.10, *а*, имеем

$$W_э = \frac{Y}{U} = \frac{W_3Y_2}{U} = \frac{W_3W_2Y_1}{U} = \frac{W_3W_2W_1U}{U} = W_3W_2W_1,$$

где Y, Y_2, Y_1 и U — изображения по Лапласу переменных y, y_2, y_1 и u.

Следовательно, передаточная функция последовательного соединения l звеньев равна произведению передаточных функций этих звеньев:

$$W_{пос} = W_1W_2 \cdots W_l. \tag{2.41}$$

При параллельном соединении все звенья имеют одну и ту же входную величину, а их выходные величины суммируются. Используя равенство (2.20), определяем передаточную функцию параллельного соединения, показанного на рис. 2.10, *б*:

$$W_э = \frac{Y}{U} = \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3}{U} = \frac{W_1U + W_2U + W_3U}{U} = W_1 + W_2 + W_3,$$

т. е. передаточная функция параллельного соединения l звеньев равна сумме передаточных функций этих звеньев:

$$W_{пар} = W_1 + W_2 + \cdots + W_l. \tag{2.42}$$

Третье типовое соединение (рис. 2.10, *в*), называемое встречно-параллельным, приводит к образованию замкнутой системы и состоит из двух звеньев. Звено с передаточной функцией $W_п$ является прямой цепью передачи сигналов, а звено с передаточной функцией $W_о$ осуществляет обратную связь. Обратная связь это воздействие выходной величины какого-то звена на его вход. Если это воздействие совпадает по знаку с входной величиной, то обратная связь положительная. В противном случае обратная связь отрицательная.

Для соединения, изображенного на рис. 2.10, *в*, можно составить следующие равенства (по определению передаточных функций):

$$\frac{Y}{Y_1} = W_п; \ \frac{Y_о}{Y} = W_о \text{ и } Y_1 = U \pm Y_о.$$

Таблица 2.4

Эквивалентные передаточные функции типовых динамических звеньев с обратными связями

Типовое динамическое звено	Обратная связь			
	жесткая отрицательная $W_о = k_о$	жесткая положительная $W_о = k_п$	гибкая отрицательная $W_о = k_г s$	изодромная отрицательная $W_о = \frac{k_и(\tau_и s + 1)}{s}$
Безынерционное $W = k$	$W_э = k_э$, где $k_э = \frac{k}{1 + kk_о}$	$W_э = k_э$, где $k_э = \frac{k}{1 - kk_п}$; допустимо $kk_п < 1$	$W_э = \frac{k}{T_э s + 1}$, где $T_э = kk_г$	$W_э = \frac{k_э s}{T_э s + 1}$, где $k_э = \frac{1}{k_и}$, $T_э = \tau_и + \frac{1}{kk_и}$
Апериодическое $W = \frac{k}{Ts + 1}$	$W_э = \frac{k_э}{T_э s + 1}$, где $k_э = \frac{k}{1 + kk_о}$; $T_э = \frac{T}{1 + kk_о}$	$W_э = \frac{k_э}{T_э s + 1}$, где $k_э = \frac{k}{1 - kk_п}$; $T_э = \frac{T}{1 - kk_п}$; допустимо $kk_п < 1$	$W_э = \frac{k}{T_э s + 1}$, где $T_э = T + kk_г$	$W_э = \frac{k_э s}{a_о s^2 + a_1 s + 1}$, где $k_э = \frac{1}{k_и}$; $a_о = \frac{T}{kk_и}$; $a_1 = \frac{1 + kk_и\tau_и}{kk_и}$
	При $T_1 < 2T_2\sqrt{1 + kk_о}$	При $T_1 < 2T_2\sqrt{1 - kk_п}$		

Апериодическое второго порядка $W=\dfrac{k}{T_2^2s^2+T_1s+1}$, где $T_1 \geqslant 2T_2$	$W_э=$ $=\dfrac{k_э}{T_э^2s^2+2\xi_эT_эs+1}$, где $k_э=\dfrac{k}{1+kk_о}$; $T_э=\dfrac{T_2}{\sqrt{1+kk_о}}$; $\xi_э=\dfrac{T_1}{2T_2\sqrt{1+kk_о}}$; при $T_1 \geqslant 2T_2\sqrt{1+kk_о}$ $W_э=$ $=\dfrac{k_э}{T_{2э}^2s^2+T_{1э}s+1}$, где $T_{1э}=\dfrac{T_1}{1+kk_о}$; $T_{2э}=\dfrac{T_2}{\sqrt{1+kk_о}}$	$W_э=$ $=\dfrac{k_э}{T_э^2s^2+2\xi_эT_эs+1}$, где $k_э=\dfrac{k}{1-kk_п}$; $T_э=\dfrac{T_2}{\sqrt{1-kk_п}}$; $\xi_э=\dfrac{T_1}{2T_2\sqrt{1-kk_п}}$; при $T_1 \geqslant 2T_2\sqrt{1-kk_п}$ $W_э=$ $=\dfrac{k_э}{T_{2э}^2s^2+T_{1э}s+1}$, где $T_{1э}=\dfrac{T_1}{1-kk_г}$; $T_{2э}=\dfrac{T_2}{\sqrt{1-kk_п}}$; допустимо $kk_п<1$	$W_э=$ $=\dfrac{k}{T_2^2s^2+T_{1э}s+1}$, где $T_{1э}=T_1+kk_г$	—

Продолжение табл. 2.4

Типовое динамическое звено	Обратная связь			
	жесткая отрицательная $W_о = k_о$	жесткая положительная $W_о = k_п$	гибкая отрицательная $W_о = k_г s$	изодромная отрицательная $W_о = \frac{k_и(\tau_и s + 1)}{s}$
Колебательное $W = \frac{k}{T^2s^2 + 2\xi T + 1}$, где $0 < \xi < 1$	$W_э = \frac{k_э}{T_э^2 s^2 + 2\xi_э T_э s + 1}$, где $k_э = \frac{k}{1 + kk_о}$; $T_э = \frac{T}{\sqrt{1 + kk_о}}$; $\xi_э = \frac{\xi}{\sqrt{1 + kk_о}}$	При $\sqrt{1 - kk_п} < \xi$ $W_э = \frac{k_э}{T_э^2 s^2 + 2\xi_э T_э s + 1}$, где $k_э = \frac{k}{1 - kk_п}$; $T_э = \frac{T}{\sqrt{1 - kk_п}}$; $\xi_э = \frac{\xi}{\sqrt{1 - kk_п}}$; при $\sqrt{1 - kk_п} \geqslant \xi$ $W_э = \frac{k_э}{T_{2э}^2 s^2 + T_{1э} s + 1}$, где $T_{1э} = \frac{2\xi T}{1 - kk_п}$;	При $kk_г < 2T\ (1 - \xi)$ $W_э = \frac{k}{T^2s^2 + 2\xi_э T s + 1}$, где $\xi_э = \xi + \frac{kk_г}{2T}$; при $kk_г \geqslant 2T\ (1 - \xi)$ $W_э = \frac{k}{T_{2э}^2 s^2 + T_{1э} s + 1}$, где $T_{1э} = 2\xi T + kk_г$; $T_{2э} = T$	—

		$T_{2э} = \dfrac{T}{\sqrt{1 - kk_{п}}}$; допустимо $kk_{п} < 1$		
Консервативное $W = \dfrac{k}{T^2s^2 + 1}$	$W_э = \dfrac{k_э}{T_э^2 s^2 + 1}$, где $k_э = \dfrac{k}{1 + kk_о}$; $T_э = \dfrac{T}{\sqrt{1 + kk_о}}$	$W_э = \dfrac{k_э}{T_э^2 s^2 + 1}$, где $k_э = \dfrac{k}{1 - kk_{п}}$; $T_э = \dfrac{T}{\sqrt{1 - kk_{п}}}$; допустимо $kk_{п} < 1$	При $kk_г < 2T$ $W_э = \dfrac{k}{T^2s^2 + 2\xi_э Ts + 1}$, где $\xi_э = \dfrac{kk_г}{2T}$; при $kk_г \geqslant 2T$ $W_э = \dfrac{k}{T_{2э}^2 s^2 + T_{1э}s + 1}$, где $T_{1э} = kk_г$; $T_{2э} = T$	—

Продолжение табл. 2.4

Типовое динамическое звено	Обратная связь			
	жесткая отрицательная $W_о = k_о$	жесткая положительная $W_о = k_п$	гибкая отрицательная $W_о = k_г s$	изодромная отрицательная $W_о = \frac{k_и(\tau_и s + 1)}{s}$
Интегрирующее идеальное $W = \frac{k}{s}$	$W_э = \frac{k_э}{T_э s + 1}$, где $k_э = \frac{1}{k_о}$; $T_э = \frac{1}{kk_о}$	Эквивалентное звено неустойчивое	$W_э = \frac{k_э}{s}$, где $k_э = \frac{k}{1 + kk_г}$	$W_э = \frac{k_э}{T_э s + 1}$, где $k_э = \frac{1}{k_и}$; $T_э = \frac{1 + kk_и\tau_и}{kk_и}$
Интегрирующее инерционное $W = \frac{k}{s(Ts + 1)}$	При $2\sqrt{kk_о T} > 1$ $W_э = \frac{k_э}{T_э^2 s^2 + 2\xi_э T_э s + 1}$, где $k_э = \frac{1}{k_о}$; $T_э = \sqrt{\frac{T}{kk_о}}$; $\xi_э = \frac{1}{2\sqrt{kk_о T}}$; при $2\sqrt{kk_о T} \leqslant 1$	То же	$W_э = \frac{k_э}{s(T_э s + 1)}$, где $k_э = \frac{k}{1 + kk_г}$; $T_э = \frac{T}{1 + kk_г}$	—

	$W_э = \dfrac{k_э}{T_{2э}^2 s^2 + T_{1э} s + 1}$, где $T_{1э} = \dfrac{1}{kk_о}$; $T_{2э} = \sqrt{\dfrac{T}{kk_о}}$			
Изодромное $W = \dfrac{k\ (\tau s + 1)}{s}$	$W_э = \dfrac{k_э\ (\tau s + 1)}{T_э s + 1}$, где $k_э = \dfrac{1}{k_о}$; $T_э = \tau + \dfrac{1}{kk_о}$	То же	$W_э = \dfrac{k_э\ (\tau s + 1)}{s\ (T_э s + 1)}$, где $k_э = \dfrac{k}{1 + kk_г}$; $T_э = \dfrac{kk_г \tau}{1 + kk_г}$	$W_э = \dfrac{k_э s\ (\tau s + 1)}{a_о s^2 + a_1 s + 1}$, где $k_э = \dfrac{1}{k_и}$; $a_о = \tau\tau_и + \dfrac{1}{kk_и}$; $a_1 = \tau + \tau_и$
Изодромное второго порядка $W = \dfrac{k\ (\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1)}{s^2}$, где $0 < \zeta < 1$	$W_э = \dfrac{k_э\ (\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1)}{a_о s^2 + a_1 s + 1}$, где $k_э = \dfrac{1}{k_о}$; $a_о = \tau^2 + \dfrac{1}{kk_о}$; $a_1 = 2\zeta\tau$	Эквивалентное звено неустойчивое или инверсное	—	—

Продолжение табл. 2.4

Типовое динамическое звено	Обратная связь			
	жесткая отрицательная $W_о = k_о$	жесткая положительная $W_о = k_п$	гибкая отрицательная $W_о = k_г s$	изодромная отрицательная $W_о = \frac{k_и (\tau_и s + 1)}{s}$
Дифференцирующее идеальное $W = ks$	$W_э = \frac{ks}{T_э s + 1}$, где $T_э = kk_о$	Эквивалентное звено неустойчивое	$W_э = \frac{ks}{T_э^2 s^2 + 1}$, где $T_э = \sqrt{kk_г}$	$W_э = \frac{k_э s}{T_э s + 1}$, где $k_э = \frac{k}{1 + kk_и}$; $T_э = \frac{kk_и \tau_и}{1 + kk_и}$
Дифференцирующее инерционное $W = \frac{ks}{Ts + 1}$	$W_э = \frac{ks}{T_э s + 1}$, где $T_э = T + kk_о$	$W_э = \frac{ks}{T_э s + 1}$, где $T_э = T - kk_п$; допустимо $kk_п < T$	$W_э = \frac{ks}{a_0 s^2 + a_1 s + 1}$, где $a_0 = kk_г$; $a_1 = T$	$W_э = \frac{k_э s}{T_э s + 1}$, где $k_э = \frac{k}{1 + kk_и}$; $T_э = \frac{T + kk_и \tau_и}{1 + kk_и}$
Форсирующее идеальное $W = k(\tau s + 1)$	$W_э = \frac{k_э(\tau s + 1)}{T_э s + 1}$, где $k_э = \frac{k}{1 + kk_о}$; $T_э = \frac{kk_о \tau}{1 + kk_о}$	Эквивалентное звено неустойчивое или инверсное	$W_э = \frac{k(\tau s + 1)}{a_0 s^2 + a_1 s + 1}$, где $a_0 = kk_г \tau$; $a_1 = kk_г$	$W_э = \frac{k_э s (\tau s + 1)}{a_0 s^2 + a_1 s + 1}$, где $k_э = \frac{1}{k_и}$; $a_0 = \tau \tau_и$; $a_0 = \tau + \tau_и + \frac{1}{kk_и}$

Разрешив эти уравнения относительно $\frac{Y}{U} = W_{в.\,п}$, получим выражение для передаточной функции встречно-параллельного соединения:

$$W_{в.\,п} = \frac{W_п}{1 \pm W_п W_о}, \tag{2.43}$$

где знак «+» в знаменателе соответствует отрицательной обратной связи и знак «—» — положительной.

На практике наиболее употребительны жесткая отрицательная $W_о = k_о$ и положительная $W_о = k_п$ обратная связь, гибкая (дифференциальная) отрицательная, при которой $W_о = k_г s$, и изодромная отрицательная с передаточной функцией $W_о = \frac{k_и(\tau_о s + 1)}{s}$, где $k_и$ и $\tau_и$ — положительные постоянные.

Нередко с помощью обратных связей изменяют в нужном направлении свойства типовых динамических звеньев. Эквивалентные передаточные функции типовых динамических звеньев с употребительными обратными связями приведены в табл. 2.4. Рассмотрим наиболее интересные случаи.

При достаточно малых значениях передаточного коэффициента $k_п$ положительной жесткой обратной связи, охватывающей безынерционное звено, передаточный коэффициент соединения оказывается больше исходного. Однако разность $1 - kk_п$ не может быть слишком малой.

Для практических целей безынерционное звено охватывают гибкой или изодромной отрицательной обратной связью. Получается апериодическое звено или дифференцирующее звено с малой инерционностью.

Отрицательная жесткая обратная связь уменьшает постоянную времени и передаточный коэффициент апериодического звена. При $kk_0 \gg 1$ соединение по своим свойствам приближается к идеальному безынерционному звену, но с малым передаточным коэффициентом.

При изодромной обратной связи образуется интегродифференцирующее звено.

Жесткая отрицательная обратная связь уменьшает постоянные времени апериодического звена второго порядка. Однако, если $k_о$ достаточно велико и $2T_2\sqrt{kk_о + 1} \gg T_1$, то эквивалентное звено становится колебательным.

Жесткая положительная обратная связь при $\sqrt{1 - kk_п} \geqslant \xi$, где $kk_п < 1$, а также отрицательная гибкая обратная связь при $kk_г \geqslant 2T(1 - \xi)$ преобразуют колебательное звено в апериодическое второго порядка.

Отрицательная гибкая обратная связь превращает консервативное звено в колебательное или апериодическое второго порядка в зависимости от соотношения параметров звена и обратной связи.

Таблица 2.5

Эквивалентные передаточные функции параллельного соединения типовых динамических звеньев

Передаточные функции параллельно соединяемых звеньев		Эквивалентная передаточная функция соединения
$W=\dfrac{k}{Ts+1}$	$W_0=k_0$	$W_э=\dfrac{k_э(\tau_э s+1)}{Ts+1}$, где $k_э=k+k_0$; $\tau_э=\dfrac{k_0T}{k+k_0}$; при $k_0=-k$ $W_э=-\dfrac{k_э s}{Ts+1}$, где $k_э=kT$
$W=\dfrac{k}{T_2^2s^2+T_1s+1}$	$W_0=k_0$	$W_э=\dfrac{k_э(b_0s+b_1s+1)}{T_2^2s^2+T_1s+1}$, где $k_э=k+k_0$; $b_0=\dfrac{k_0}{k+k_0}T_2^2$; $b_1=\dfrac{k_0}{k+k_0}T_1$; при $k_0=-k$ $W_э=-\dfrac{k_э(\tau_э s+1)s}{T_2^2s^2+T_1s+1}$, где $k_э=kT_1$; $\tau_э=\dfrac{T_2^2}{T_1}$
$W=\dfrac{k}{T^2s^2+2\xi Ts+1}$	$W_0=k_0$	$W_э=\dfrac{k_э(b_0s^2+b_1s+1)}{T^2s^2+2\xi Ts+1}$, где $k_э=k+k_0$; $b_0=\dfrac{k_0}{k+k_0}T^2$; $b_1=\dfrac{k_0}{k+k_0}2\xi T$; при $k_0=-k$ $W_э=-\dfrac{k_э(\tau_э s+1)s}{T^2s^2+2\xi Ts+1}$, где $k_э=2\xi Tk$; $\tau_э=\dfrac{T}{2\xi}$
$W=\dfrac{k}{s}$	$W_0=k_0$	$W_э=\dfrac{k(\tau_э s+1)}{s}$, где $\tau_э=\dfrac{k_0}{s}$
$W=\dfrac{k}{s(Ts+1)}$	$W_0=k_0$	$W_э=\dfrac{k(b_0s^2+b_1s+1)}{s(T_1s+1)}$, где $b_0=\dfrac{k_0}{k}T$; $b_1=\dfrac{k_0}{k}$

Передаточные функции параллельно соединяемых звеньев		Эквивалентная передаточная функция соединения
$W=\frac{k(\tau s+1)}{s}$	$W_o=k_o$	$W_э=\frac{k(\tau_э s+1)}{s}$, где $\tau_э=\tau+\frac{k_o}{k}$
$W=$ $=\frac{k(\tau^2s^2+2\zeta\tau s+1)}{s^2}$		$W_э=\frac{k\left(\tau_э^2s^2+2\zeta_э\tau_э s+1\right)}{s^2}$, где $\tau_э=\sqrt{k\tau^2+k_o}$; $\zeta_э=\zeta\frac{\tau\sqrt{k}}{\sqrt{k\tau^2+k_o}}$
$W=ks$		$W_э=k_o(\tau_э s+1)$, где $\tau_э=\frac{k}{k_o}$
$W=k(\tau s+1)$		$W_э=k_э(\tau_э s+1)$, где $k_э=k+k_o$; $\tau_э=\frac{k\tau}{k+k_o}$
$W=\frac{k}{s}$	$W_o=\frac{k_o}{T_o s+1}$	$W_э=\frac{k(\tau_э s+1)}{s(T_o s+1)}$, где $\tau_э=T_o+\frac{k_o}{k}$
$W=\frac{k(\tau s+1)}{s}$		$W_э=\frac{k(b_o s^2+b_1 s+1)}{s(T_o s+1)}$, где $b_o=\tau T_o$; $b_1=\tau+T_o+\frac{k_o}{k}$
$W=\frac{ks}{Ts+1}$		$W_э=\frac{k_o(b_o s^2+b_1 s+1)}{(Ts+1)(T_o s+1)}$, где $b_o=T_o\frac{k}{k_э}$; $b_1=T+\frac{k}{k_o}$
$W=\frac{k}{Ts+1}$		$W_э=\frac{k_э(\tau_э s+1)}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$, где $k_э=k+k_o$; $\tau_э=\frac{kT_o+k_oT}{k+k_o}$

Передаточные функции параллельно соединяемых звеньев		Эквивалентная передаточная функция соединения
$W = \frac{k}{s(Ts+1)}$	$W_о = \frac{k_о}{s}$	$W_э = \frac{k_э(\tau_э s+1)}{s(Ts+1)}$, где $k_э = k + k_о$; $\tau_э = \frac{k_о T}{k+k_о}$
$W = \frac{ks}{Ts+1}$		$W_э = \frac{k_о(b_0 s^2 + b_1 s + 1)}{s(Ts+1)}$, где $b_о = \frac{k}{k_о}f$; $b_1 = T$
$W = \frac{k}{s(Ts+1)}$	$W_о = \frac{k_о}{s(T_о s+1)}$	$W_э = \frac{k_э(\tau_э s+1)}{s(Ts+1)(T_о s+1)}$, где $k_э = k + k_о$; $\tau_э = \frac{kT_о + k_о T}{k+k_о}$
$W = \frac{ks}{Ts+1}$	$W_о = \frac{k_о(\tau_о s+1)}{s}$	$W_э = \frac{k_о(b_о s^2 + b_1 s + 1)}{s(Ts+1)}$, где $b_о = \tau_о T + \frac{k}{k_о}$; $b_1 = \tau_о + T$

Отрицательная гибкая обратная связь уменьшает передаточный коэффициент, т. е. увеличивает постоянную времени интегрирования интегрирующего идеального звена и уменьшает постоянную времени (инерционность) интегрирующего инерционного звена.

Жесткая положительная обратная связь при $kk_п < T$ и отрицательная изодромная уменьшают постоянную времени (инерционность) дифференцирующего инерционного звена.

В ряде случаев (см. табл. 2.4) эквивалентные звенья оказываются интегродифференцирующими. Обратные связи более сложные, чем рассмотренные, позволяют еще радикальнее изменять свойства типовых динамических звеньев. Однако такие связи принято рассматривать как параллельные корректирующие устройства (см. п. 8.3) и их выбирают исходя из требований к САР в целом (см. гл. 9).

Для получения новых свойств пользуются и попарным параллельным соединением типовых звеньев. Эквивалентные передаточные функции некоторых из таких соединений приведены в табл. 2.5.

Для практики наибольший интерес представляет то, что при параллельном соединении безынерционного звена с позиционными и интегрирующими появляются дифференцирующие свойства. Такой же эффект наблюдается при параллельном соединении апериодического звена с интегрирующим и даже с апериодическим, имеющим другую постоянную времени. То же самое получается при соединении интегрирующего идеального звена с интегрирующим инерционным и при соединении двух интегрирующих инерционных звеньев с различными постоянными времени.

2.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ЭЛЕМЕНТОВ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

Известно, что математическое описание (составление уравнений движения) объектов регулирования (прежде всего технологических), исполнительных элементов и усилителей иногда представляет собой сложную задачу или возможно лишь с существенными допущениями, т. е. весьма приближенно. В этих случаях оказывается целесообразным получать математическое описание элемента в виде его передаточной функции на основании экспериментальных данных. Чаще всего экспериментально определяют переходную характеристику элемента (иногда ее называют кривой разгона) и по ней составляют передаточную функцию. Естественно, что неизбежны погрешности как при снятии экспериментальной характеристики, так и при ее аппроксимации передаточной функцией. Однако обычно погрешности оказываются допустимыми для инженерных расчетов.

Процесс экспериментального исследования промышленного объекта состоит из трех этапов: планирования и подготовки эксперимента, проведения эксперимента [1, 9] и обработки результатов эксперимента, которая заключается в сглаживании полученной переходной характеристики и аппроксимации ее передаточной функцией.

Сглаживание экспериментально полученной характеристики оказывается необходимым для устранения разброса результатов отдельных измерений, т. е. приближения их к истинным значениям. Этот разброс создается различными причинами и прежде всего помехами, действующими на процесс.

Для сглаживания используют ряд методов [1, 9]. Простейшими и наиболее широко применяемыми являются следующие.

Метод скользящего среднего. Принцип метода заключается в выравнивании экспериментальных данных путем вычисления средних арифметических значений по небольшому числу l измерений.

Число l удобно выбирать четным. При общем числе измерений $n \leqslant (20 \div 30)$ первоначально следует выбрать $l = 2$. Если же сглаживание оказывается недостаточным, то значение l нужно

постепенно увеличивать. При $n \geqslant (100 \div 150)$ можно выбрать первоначально $l \approx \frac{n}{10}$ и затем при необходимости постепенно его увеличивать.

После выбора значения l находят среднее от первых $(l+1)$ значений $h(i)$:

$$h_l\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{l+1} \sum_{\nu=0}^{l} h(\nu), \qquad (2.44)$$

соответствующее измерению $i = \frac{l}{2}$.

Затем определяют среднее

$$h_l\left(\frac{l}{2}+1\right) = \frac{1}{l+1} \sum_{\nu=1}^{l+1} h(\nu), \qquad (2.45)$$

соответствующее измерению $i = \frac{l}{2} + 1$ и т. д.

Общий вид формулы для усреднения следующий:

$$h_l\left(\frac{l}{2}+j\right) = \frac{1}{l+1} \sum_{\nu=j}^{l+j} h(\nu). \qquad (2.46)$$

Основное внимание при использовании данного метода должно быть обращено на выбор числа l. При слишком малых значениях l выравнивание экспериментальных данных может оказаться недостаточным. Однако завышение значения l может привести к искажению характеристики. Следует также иметь в виду, что при сглаживании теряются точки с номерами

$$i = 0,\ 1,\ 2, \ldots, \frac{l}{2} - 1,\ n - \frac{l}{2} + 1,\ n - \frac{l}{2} + 2, \ldots, n.$$

Однако этот последний недостаток можно устранить, если сделать несколько замеров до начала переходного процесса ($i = -m, -m+1, \ldots, -1$) и после его окончания.

Метод четвертых разностей. Сущность метода в том, что по каждым пяти соседним экспериментальным значениям $h(i)$ строят параболу. Значения ее точек находят методом наименьших квадратов. Затем делают такую поправку к экспериментальной кривой, чтобы средняя из пяти рассматриваемых точек совпадала с параболой.

Первые две точки сглаженной характеристики определяют по формулам

$$\tilde{h}(1) = h(1) - \frac{1}{5} B(2/3) + \frac{1}{12} A(3);$$

$$\tilde{h}(2) = h(2) + \frac{2}{5} B(2/3) - \frac{1}{7} A(3). \qquad (2.47)$$

Последующие точки до $(n-2)$-й включительно определяют по общей формуле

$$\tilde{h}(i) = h(i) - \frac{1}{12} A(i), \quad i = 3, 4, \ldots, n-2 \tag{2.48}$$

и две последние точки по формулам

$$\tilde{h}(n-1) = h(n-1) - \frac{2}{5} B(n-2)/(n-1) - \frac{1}{7} A(n-2);$$

$$\tilde{h}(n) = h(n) + \frac{1}{5} B(n-2)/(n-1) + \frac{1}{12} A(n-2). \tag{2.49}$$

В этих формулах

$$A(i) = h(i-2) - 4h(i-1) + 6h(i) - 4h(i+1) + h(i+2) = \\ = [h(i-2) + 6h(i) + h(i+2)] - 4[h(i-1) + h(i+1)];$$

$$Bi/(i+1) = h(i-1) - 3h(i) + 3h(i+1) - h(i+2) = [h(i-1) + \\ + 3h(i+1)] - [3h(i) + h(i+2)]. \tag{2.50}$$

Возможно двукратное применение метода. Метод дает особенно хорошие результаты, если сглаживаемая переходная характеристика соответствует решению дифференциального уравнения порядка выше первого.

Аппроксимация переходной характеристики, соответствующей некоторой передаточной функции, является, вообще говоря, задачей, которая может иметь ряд решений. Кроме того, различными могут быть и требования к точности аппроксимации. Все это обусловило существование большого числа методов определения передаточной функции $W(s)$ по экспериментально полученной (и сглаженной) переходной характеристике $h(t)$. Существует около 50 методов [8], которые различаются по структуре аппроксимирующей передаточной функции и по используемому математическому аппарату.

Для оценки аппроксимации можно использовать величину

$$\delta = \max \frac{|h(t_i) - h_a(t_i)|}{h(\infty)} 100\%, \quad i = 1, 2, \ldots, l, \tag{2.51}$$

где $h(t_i)$ и $h_a(t_i)$ — значения переходной характеристики соответственно экспериментальной и вычисленной по аппроксимирующей передаточной функции; t_i — моменты времени.

Достаточно выбрать $l \leqslant (3 \div 6)$. Если $\delta < (3 \div 5)\ \%$, то точность аппроксимации считают удовлетворяющей требованиям инженерных расчетов.

При использовании ЭЦВМ наивысшую точность обеспечивает метод площадей [102]. Ряд других методов описан в работах [1, 9].

При ручном счете чаще всего предполагают, что передаточная функция имеет в знаменателе полином первой или второй степени,

а в числителе полином нулевой или первой степени. Ниже излагаются два метода расчета.

В обоих методах прежде всего по экспериментальной переходной характеристике необходимо определить передаточный коэффициент исследуемого устойчивого элемента

$$k = \frac{y(\infty)}{x}, \tag{2.52}$$

где $x = \text{const}$ — входная величина; $y(\infty)$ — установившееся значение выходной величины.

Затем по виду характеристики следует выяснить, имеется ли в исследуемом элементе чистое (транспортное) запаздывание и определить время θ запаздывания.

Некоторые методы, кроме того, требуют нормирования экспериментальной переходной характеристики. Для этого значения всех ее ординат нужно разделить на установившееся значение выходной величины.

Метод площадей. При аппроксимации нормированной переходной характеристики передаточной функцией

$$W = \frac{k(bs+1)\,e^{-\theta s}}{a_0 s^2 + a_1 s + 1} \tag{2.53}$$

расчет после определения k и θ заключается в следующем.

1. По начальному участку характеристики определяют, чему равна ее производная при $t = 0$. Если производная равна нулю, то в передаточной функции (2.53) $b = 0$.

2. Ось времени характеристики делят на n равных малых промежутков времени Δt, в пределах каждого из которых характеристику $h(t)$ можно считать прямой.

3. Определяют и заносят в таблицу начальное значение $h(0)$ характеристики, ее значения $h(i)$ в конце каждого i-го промежутка времени Δt и разности $1 - h(i)$.

4. Вычисляют вспомогательную величину

$$F_1 = \Delta t \left\{ \sum_{i=0}^{n} [1 - h(i)] - 0{,}5\,[1 - h(0)] \right\}. \tag{2.54}$$

5. Подсчитывают и заносят в таблицу значения

$$\lambda(i) = \frac{i\,\Delta t}{F_1}; \quad 1 - \lambda(i) \text{ и } [1 - h(i)]\,[1 - \lambda(i)].$$

6. Вычисляют вспомогательную величину

$$F_2 = F_1^2\,\Delta t \left\{ \sum_{i=0}^{n} [1 - h(i)]\,[1 - \lambda(i)] - 0{,}5\,[1 - h(0)] \right\}. \tag{2.55}$$

7. Если $b = 0$, то определяют коэффициенты передаточной функции

$$a_1 = F_1 \text{ и } a_0 = F_2.$$

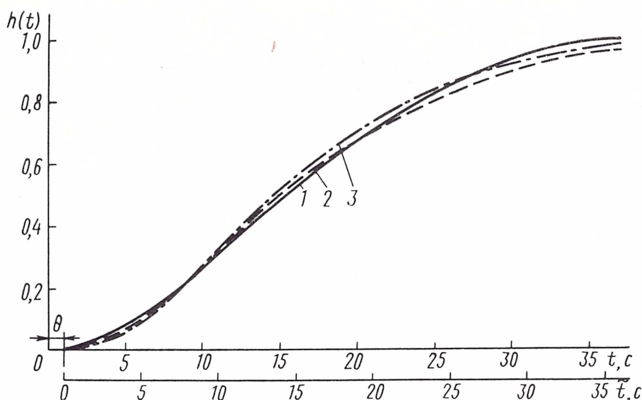


Рис. 2.11. Переходные характеристики:
1 — экспериментальная; *2*, *3* — вычисленные по аппроксимирующим формулам

8. Если $b \neq 0$, то подсчитывают и заносят в таблицу значения

$$1 - 2\lambda(i) + \frac{\lambda^2(i)}{2} \text{ и } [1 - h(i)]\left[1 - 2\lambda(i) + \frac{\lambda^2(i)}{2}\right]. \qquad (2.56)$$

При этом могут быть использованы данные табл. 2.6.

9. Вычисляют вспомогательную величину

$$F_3 = F_1^3 \Delta t \left\{\sum_{i=0}^{n} [1 - h(i)]\left[1 - 2\lambda(i) + \frac{\lambda^2(i)}{2}\right] - 0{,}5\,[1 - h(0)]\right\}. \qquad (2.57)$$

10. Определяют коэффициенты передаточной функции из системы уравнений

$$b = \frac{F_3}{F_2}; \; a_1 = F_1 + b; \; a_0 = F_2 + bF_1. \qquad (2.58)$$

11. По аппроксимирующей передаточной функции определяют переходную характеристику $h_a(t)$ и на основании формулы (2.51) оценивают точность аппроксимации. В случае недостаточной точности расчет повторяют при меньших значениях Δt.

Пример. Сглаженная и нормированная переходная характеристика, полученная при исследовании промышленного объекта, изображена на рис. 2.11. Требуется аппроксимировать эту характеристику передаточной функцией вида (2.53), если $x = 5$А и $y(\infty) = 120°$ С.

По формуле (2.52) определяем передаточный коэффициент

$$k = \frac{120}{5} = 24° \text{ С/А}.$$

Из характеристики следует, что объект имеет чистое запаздывание и время запаздывания $\theta \approx 1$ с.

Таблица 2.6

Значения подынтегральных функций

λ	$1-2\lambda+\frac{\lambda^2}{2}$	λ	$1-2\lambda+\frac{\lambda^2}{2}$	λ	$1-2\lambda+\frac{\lambda^2}{2}$	λ	$1-2\lambda+\frac{\lambda^2}{2}$
0,02	0,960	0,68	—0,129	1,34	—0,782	2,00	—1,000
0,04	0,921	0,70	—0,155	1,36	—0,795	2,02	—1,000
0,06	0,882	0,72	—0,181	1,38	—0,808	2,04	—0,999
0,08	0,843	0,74	—0,206	1,40	—0,820	2,06	—0,998
0,10	0,805	0,76	—0,231	1,42	—0,832	2,08	—0,997
0,12	0,767	0,78	—0,256	1,44	—0,843	2,10	—0,995
0,14	0,730	0,80	—0,280	1,46	—0,854	2,12	—0,993
0,16	0,693	0,82	—0,304	1,48	—0,865	2,14	—0,990
0,18	0,656	0,84	—0,327	1,50	—0,875	2,16	—0,987
0,20	0,620	0,86	—0,350	1,52	—0,885	2,18	—0,984
0,22	0,584	0,88	—0,373	1,54	—0,894	2,20	—0,980
0,24	0,549	0,90	—0,395	1,56	—0,903	2,22	—0,976
0,26	0,514	0,92	—0,417	1,58	—0,912	2,24	—0,971
0,28	0,479	0,94	—0,438	1,60	—0,920	2,26	—0,966
0,30	0,445	0,96	—0,459	1,62	—0,928	2,28	—0,961
0,32	0,411	0,98	—0,480	1,64	—0,935	2,30	—0,955
0,34	0,378	1,00	—0,500	1,66	—0,942	2,32	—0,949
0,36	0,345	1,02	—0,520	1,68	—0,949	2,34	—0,942
0,38	0,312	1,04	—0,539	1,70	—0,955	2,36	—0,935
0,40	0,280	1,06	—0,558	1,72	—0,961	2,38	—0,928
0,42	0,248	1,08	—0,577	1,74	—0,966	2,40	—0,920
0,44	0,217	1,10	—0,595	1,76	—0,971	2,42	—0,912
0,46	0,186	1,12	—0,613	1,78	—0,976	2,44	—0,903
0,48	0,152	1,14	—0,630	1,80	—0,980	2,46	—0,894
0,50	0,125	1,16	—0,647	1,82	—0,984	2,48	—0,885
0,52	0,095	1,18	—0,664	1,84	—0,987	2,50	—0,875
0,54	0,066	1,20	—0,680	1,86	—0,990	2,52	—0,865
0,56	0,037	1,22	—0,696	1,88	—0,993	2,54	—0,854
0,58	0,008	1,24	—0,711	1,90	—0,995	2,56	—0,843
0,60	—0,020	1,26	—0,726	1,92	—0,997	2,58	—0,832
0,62	—0,048	1,28	—0,741	1,94	—0,998	2,60	—0,820
0,64	—0,075	1,30	—0,755	1,96	—0,999		
0,66	—0,102	1,32	—0,769	1,98	—1,000		

Таблица 2.7

Аппроксимация переходной характеристики методом площадей

$\tilde{t}$	$h(i)$	$\lambda(i)$	$[1-h(i)][1-\lambda(i)]$	$[1-h(i)]\left[1-2\lambda(i)+\frac{\lambda^2(i)}{2}\right]$
0	0	0	1,000	1,000
2	0,030	0,131	0,843	0,690
4	0,080	0,263	0,678	0,489
6	0,145	0,394	0,518	0,239
8	0,215	0,526	0,372	0,040
10	0,300	0,657	0,240	—0,062
12	0,385	0,788	0,130	—0,172
14	0,480	0,920	0,042	—0,205
16	0,565	1,051	—0,022	—0,239
18	0,640	1,183	—0,066	—0,245
20	0,710	1,314	—0,091	—0,219
22	0,780	1,445	—0,098	—0,187
24	0,840	1,577	—0,092	—0,147
26	0,880	1,708	—0,085	—0,115
28	0,920	1,840	—0,067	—0,079
30	0,955	1,971	—0,044	—0,045
32	0,980	2,102	—0,022	—0,020
34	0,990	2,234	—0,012	—0,010
36	1,000	2,365	0	0

Начинаем отсчет времени $\tilde{t}$ от момента $t = 1$ с и ведем расчет по ранее изложенной методике. Выберем $\Delta t = 2$ с и определим $h(i)$ и $1 - h(i)$. Результаты занесем в табл. 2.7.

По формуле (2.54) вспомогательная величина

$$F_1 = 2\,(8{,}105 - 0{,}5) = 15{,}21.$$

Теперь можно подсчитать значения $\lambda(i)$, $1 - \lambda(i)$ и $[1 - h(i)]\,[1 - \lambda(i)]$. Результаты заносим в табл. 2.7.

По формуле (2.55)

$$F_2 = 15{,}21^2 \cdot 2\,(3{,}224 - 0{,}5) = 82{,}55.$$

Если принять, что при $\tilde{t} = 0$ производная переходной характеристики равна нулю, то $b = 0$ и по формулам (2.58)

$$a_1 = 15{,}21 \text{ и } a_0 = 82{,}55.$$

Следовательно, значащая часть нормированной характеристики аппроксимируется передаточной функцией

$$W = \frac{1}{82{,}55s^2 + 15{,}21s + 1} = \frac{1}{Ts^2 + 2\xi Ts + 1},$$

где $T = 9{,}08$ и $\xi = 0{,}838$.

Таблица 2.8

Оценка точности аппроксимации переходной характеристики

$\tilde{t}$, с	$h(\tilde{t})$	При $b = 0$		При $b \neq 0$	
		$h_a(\tilde{t})$	$h(\tilde{t}) - h_a(\tilde{t})$	$h_a(\tilde{t})$	$h(\tilde{t}) - h_a(\tilde{t})$
0	0	0,012	—	0,002	—
5	0,115	0,098	0,017	0,085	0,030
10	0,300	0,312	—	0,324	—
15	0,520	0,526	—0,006	0,560	—0,040
20	0,710	0,702	—0,008	0,740	—0,030
25	0,860	0,828	0,032	0,859	0,001
30	0,955	0,911	0,044	0,933	0,022
35	0,998	0,960	0,038	0,973	0,025

Пользуясь формулами № 54 табл. 4.1, составляем аналитическое выражение переходной характеристики

$$h_a(\tilde{t}) = 1 - 1{,}90\mathbf{e}^{-0{,}092t}\sin(0{,}058t + 0{,}562).$$

Значения $h_a(\tilde{t})$, вычисленные по этому выражению, занесены в табл. 2.8, а характеристика $h_a(\tilde{t})$ изображена на рис. 2.11 (кривая 2). Точность аппроксимации $\delta \approx 4{,}4\%$.

Предположим, что производная переходной характеристики при $t = 0$ не равна нулю, и продолжим расчет, занося его результаты в табл. 2.7. Затем, пользуясь формулами (2.57) и (2.58), определим

$$F_3 = 15{,}21^3 \cdot 2\,(0{,}713 - 0{,}5) = 98{,}18;\quad b = \frac{-98{,}18}{82{,}55} = -1{,}19;$$

$$a_1 = 15{,}21 - 1{,}19 = 14{,}02;\quad a_0 = 82{,}55 - 1{,}19 \cdot 15{,}21 = 64{,}45.$$

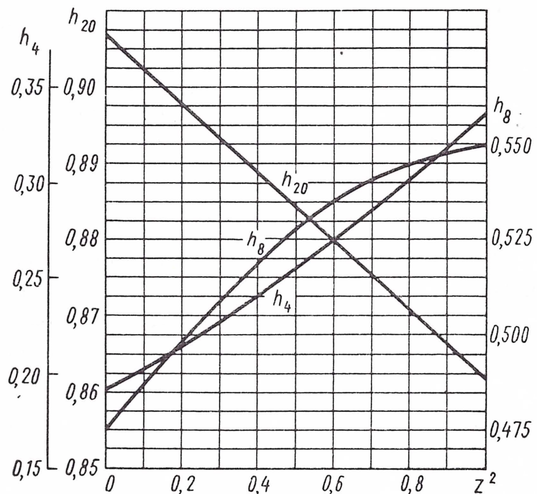


Рис. 2.12. Номограмма интерполяционного метода аппроксимации переходных характеристик

Значащая часть нормированной переходной характеристики, следовательно, аппроксимируется неминимально-фазовой передаточной функцией

$$W = \frac{-1{,}19s + 1}{64{,}45s^2 + 14{,}02s + 1} = \frac{\tau s + 1}{Ts^2 + 2\xi Ts + 1},$$

где $\tau = -1{,}19$ с; $T = 8{,}03$ с и $\xi = 0{,}873$.

Следовательно,

$$h_a(\tilde{t}) = 1 - 2{,}31\mathrm{e}^{-0{,}109t} \sin(0{,}061t + 0{,}447).$$

Значения $h_a(t)$, вычисленные по этому выражению, занесены в табл. 2.8, а характеристика $h_a(t)$ изображена на рис. 2.11 (кривая *3*). Точность аппроксимации $\delta \approx 4{,}0\%$.

Следует выбрать вторую аппроксимирующую передаточную функцию, так как она дает несколько большую точность и меньшие погрешности на конечном участке характеристики.

Метод площадей позволяет аппроксимировать и переходную характеристику нейтрального элемента. Порядок расчета для этого случая изложен в работе [1].

Интерполяционный метод [8]. Метод позволяет определять по нормированной переходной характеристике устойчивого элемента постоянные времени T_1 и T_2 передаточной функции

$$W = \frac{k\mathrm{e}^{-\theta s}}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}. \qquad (2.59)$$

Сначала по рассматриваемой характеристике находят время, при котором ордината $h(t_7) = 0{,}7$. Затем вычисляют время $t_4 = {}^1/_3 t_7$, находят значение переходной характеристики $h(t_4) = h_4$ и по номограмме (рис. 2.12) определяют величины z^2, h_8 и h_{20}, соответствующие найденному значению h_4.

Теперь можно определить искомые постоянные времени по формулам

$$T_1 = \frac{t_7}{2{,}4}(1 + z) \text{ и } T_2 = \frac{t_7}{2{,}4}(1 - z). \qquad (2.60)$$

Величины h_8 и h_{20} используют для проверки точности аппроксимации путем их сравнения с ординатами переходной характеристики соответственно при $t_8 = 2t_4$ и $t_{20} = 5t_4$. Допустимая погрешность не должна превышать 3—6%.

Может оказаться, что h_4 меньше того минимального значения, которое имеется на номограмме рис. 2.12. Это означает, что рассматриваемая переходная характеристика не может быть аппроксимирована передаточной функцией (2.59). Тогда следует обратиться, например, к методу площадей.

Глава 3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ СИСТЕМ

Системы автоматического регулирования обычно описывают передаточными функциями и последние чаще всего составляют по структурным схемам, основные сведения о которых были изложены в п. 2.2. Структурные схемы позволяют, кроме того, получать наглядное представление о системах. Таким образом, структурные схемы оказываются весьма полезными при исследовании свойств САР и их проектировании.

В настоящей главе прежде всего показано, какими передаточными функциями характеризуется каждая САР и как их используют при расчетах. Основное внимание обращено на методы определения передаточных функций систем.

По несложной структурной схеме обычно удается составить операторное уравнение САР и затем определить передаточные функции. Такой простейший метод наиболее эффективен.

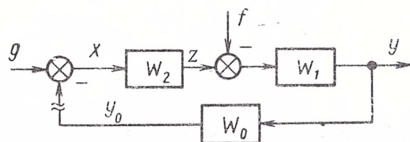
Общим методом является преобразование структурной схемы в эквивалентную одноконтурную, составление передаточных функций которой не вызывает затруднений. Необходимые для этого правила детализированы и сведены в таблицу. Недостаток метода структурных преобразований заключается в необходимости вычерчивать схему почти после каждого этапа ее упрощения. Это делает данный метод громоздким, особенно при сложных структурных схемах.

Поэтому наиболее сложные структурные схемы целесообразно рассматривать как своеобразные графы и определять передаточные функции с помощью формулы Мезона. Применение формулы Мезона для указанной цели также рассмотрено в данной главе.

3.1. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ САР

Для инженерных расчетов обычно необходимы передаточная функция разомкнутой САР, а также передаточные функции замкнутой САР относительно задающего воздействия, относительно

Рис. 3.1. Структурная схема одноконтурной САР



возмущения и для ошибки слежения. Рассмотрим сущность этих передаточных функций и определим их значения для одноконтурной САР, структурная схема которой изображена на рис. 3.1. Элементы этой схемы имеют следующие передаточные функции:

$$W_1 = W_1(s) = \frac{k_1 R_1}{Q_1}, \quad W_2 = W_2(s) = \frac{k_2 R_2}{Q_2}$$

и

$$W_o = W_o(s) = \frac{k_o R_o}{Q_o},$$

где k_1, k_2 и k_o — передаточные коэффициенты;

$$R_1 = R_1(s); \; Q_1 = Q_1(s); \; R_2 = R_2(s); \; Q_2 = Q_2(s);$$

$R_o = R_o(s)$ и $Q_o = Q_o(s)$ — полиномы от s с коэффициентом 1 при младшем члене (некоторые из этих полиномов могут быть равными единице).

Передаточная функция разомкнутой САР

$$W = W(s) = \frac{Y_o(s)}{G(s)}$$

есть отношение изображения $Y_o(s)$ сигнала обратной связи $y_o(t)$ к изображению $G(s)$ задающего воздействия $g(t)$. При этом контур регулирования предполагают разомкнутым около элемента сравнения, как показано на рис. 3.1 волнистыми линиями.

Для рассматриваемой САР

$$W = W_o W_1 W_2 = \frac{kR}{Q}, \tag{3.1}$$

где $k = k_o k_1 k_2$ — передаточный коэффициент разомкнутой САР; $R = R(s) = R_o R_1 R_2$ и $Q = Q(s) = Q_o Q_1 Q_2$ — полиномы от s.

Передаточная функция W характеризует собственные динамические свойства системы и позволяет выяснять вопрос об устойчивости замкнутой системы (см. гл. 6), а также выбирать корректирующее устройство (см. гл. 8 и 9). Для определения устойчивости используют и характеристический полином $D = D(s)$. Он равен сумме числителя и знаменателя передаточной функции W, поделенной на сумму их свободных членов. У рассматриваемой системы

$$\mathscr{D} = \frac{Q + kR}{1 + k}, \tag{3.2}$$

если полином Q имеет свободный член, и

$$\mathscr{D} = \frac{Q + kR}{k} = \frac{Q}{k} + R, \qquad (3.3)$$

если в полиноме Q нет свободного члена.

Передаточная функция САР относительно задающего воздействия

$$W_g = W_g(s) = \frac{Y(s)}{G(s)},$$

есть отношение изображения $Y(s)$ регулируемой величины $y(t)$ к изображению задающего воздействия. При этом предполагают, что других внешних воздействий нет.

Для рассматриваемой САР

$$W_g = \frac{W_1 W_2}{1 + W} = \frac{W_1 W_2}{1 + W_0 W_1 W_2} = \frac{k_g R_g}{\mathscr{D}}, \qquad (3.4)$$

где $k_g = \frac{k_1 k_2}{1 + k}$ — передаточный коэффициент системы относительно задающего воздействия; $R_g = R_g(s) = R_1 R_2 Q_0$ — полином от s.

Передаточная функция W_g характеризует передачу системой задающего воздействия, т. е. его воспроизведение регулируемой величиной. Воспроизведение тем лучше, чем ближе значение W_g к идеальному: $W_g = \frac{1}{k_0}$.

Передаточная функция САР для ошибки слежения

$$W_x = W_x(s) = \frac{X(s)}{G(s)}$$

есть отношение изображения $X(s)$ рассогласования (ошибки) $x(t) = g(t) - y_0(t)$ к изображению задающего воздействия при отсутствии других внешних воздействий.

У рассматриваемой системы

$$W_x = \frac{1}{1 + W} = \frac{1}{1 + W_0 W_1 W_2} = \frac{k_x R_x}{\mathscr{D}}, \qquad (3.5)$$

где $k_x = \frac{1}{1 + k}$ — передаточный коэффициент системы для ошибки слежения; $R_x = R_x(s) = Q_0 Q_1 Q_2$ — полином от s.

Передаточная функция W_x так же, как и W_g, характеризует воспроизведение регулируемой величиной задающего воздействия. Воспроизведение тем лучше, чем ближе значение W_x к идеальному: $W_x = 0$.

Передаточная функция САР относительно возмущения

$$W_f = W_f(s) = \frac{Y(s)}{F(s)}$$

есть отношение изображения регулируемой величины к изображению $F(s)$ возмущения $f(t)$. При этом предполагают, что других внешних воздействий нет.

Для рассматриваемой системы

$$W_f = \frac{W_1}{1+W} = \frac{W_1}{1+W_0W_1W_2} = \frac{k_fR_f}{\mathscr{D}}, \qquad (3.6)$$

где $k_f = \frac{k_1}{1+k}$ — передаточный коэффициент системы относительно возмущения; $R_f = R_f(s) = R_1Q_0Q_2$ — полином от s.

Передаточная функция W_f показывает влияние возмущения f на регулируемую величину y. Возмущение отклоняет регулируемую величину от требуемого значения и понижает точность воспроизведения задающего воздействия. Таким образом, возмущение оказывает вредное влияние на САР. Оно тем меньше, чем ближе значение W_f к идеальному: $W_f = 0$.

Если на систему воздействует несколько возмущений f_1, f_2, ..., то имеет смысл определять передаточные функции W_{f1}, W_{f2}, ... относительно каждого из возмущений.

Следует заметить, что знаменателем всех передаточных функций замкнутой системы является характеристический полином $\mathscr{D}$.

Передаточные функции W_g и W_f позволяют определить составляющие изображения Y регулируемой величины, создаваемые соответственно задающим воздействием и возмущением. В линейных системах справедлив принцип суперпозиции, т. е. влияние каждого из внешних воздействий не зависит от остальных и влияния всех воздействий суммируются. Поэтому изображение регулируемой величины равно сумме его составляющих:

$$Y = W_gG + W_fF. \qquad (3.7)$$

При этом чаще всего второе слагаемое оказывается отрицательным.

После подстановки значений W_g и W_f уравнение (3.7) принимает следующий вид:

$$\mathscr{D}Y = k_gR_gG + k_fR_fF. \qquad (3.8)$$

Заменив комплексную величину s в полиномах $\mathscr{D}$, R_g и R_f уравнения (3.8) оператором дифференцирования $p = \frac{d}{dt}$ и изображения Y, G и F на функции времени, получим дифференциальное уравнение для регулируемой величины

$$\mathscr{D}(p)\,y(t) = k_gR_g(p)\,g(t) + k_fR_f(p)\,f(t). \qquad (3.9)$$

Аналогично по передаточным функциям W_x и W_f могут быть составлены уравнения для изображения рассогласования

$$X = W_xG + W_0W_fF \qquad (3.10)$$

и дифференциальное уравнение для рассогласования

$$\mathcal{D}(p)\, x(t) = k_x R_x(p)\, g(t) + k_o k_f R_f(p) \frac{R_o(p)}{Q_o(p)} f(t). \qquad (3.11)$$

Передаточные функции САР позволяют получить статистические, временные и частотные характеристики. Их вычисление, исследование и применение будет рассмотрено в последующих главах.

Иногда необходимы передаточные функции, выражающие зависимость изображения какой-либо промежуточной (нерегулируемой) величины САР от изображения внешнего воздействия или другой промежуточной величины. Например, передаточная функция

$$W_{zx} = \frac{Z(s)}{X(s)},$$

где $Z(s)$ — изображение по Лапласу регулирующего воздействия $z = z(t)$, определяет закон регулирования.

В САР со структурной схемой, показанной на рис. 3.1,

$$W_{zx} = W_2.$$

Во многих случаях основная часть структурной схемы представляет собой последовательное соединение динамических звеньев, а один ее участок имеет сложное строение. Таким участком обычно является регулируемый объект или объект и исполнительный элемент. В табл. 3.1 изображены некоторые из возможных структурных схем сложных объектов (с одной регулируемой величиной) и даны значения передаточных функций W_1 и W_{1f} эквивалентной схемы, которая показана перед таблицей.

Используя данные табл. 3.1, передаточные функции W, W_g и W_x системы можно определить по формулам (3.1), (3.4) и (3.5), а передаточную функцию системы относительно возмущения по формуле

$$W_f = \frac{W_{1f}}{1 + W_0 W_1 W_2}.$$

Может оказаться, что схема, интересующая читателя, отличается от одной из помещенных в таблице лишь знаком выходной величины звена W_i. Тогда в передаточных функциях W_1 и W_{1f} эквивалентных схем нужно изменить знаки у всех тех членов, которые имеют W_i своим сомножителем. Может также оказаться, что схема отличается отсутствием звена с передаточной функцией W_j. Если вместо этого звена разрыв, то все члены, имеющие W_j сомножителем, нужно принять равными нулю. Если вместо звена W_j соответствующие точки схемы соединены непосредственно, то $W_j = 1$.

В большинстве случаев структурные схемы САР содержат местные обратные связи внутри регулятора или от регулируемого объекта к регулятору. Встречаются при этом и параллельные

Таблица 3.1

Структурные схемы и передаточные функции регулируемых объектов

Эквивалентная структурная схема

Структурная схема регулируемого объекта	Передаточные функции эквивалентной структурной схемы
	$W_1 = W_{\text{а}};\quad W_{1f} = W_{\text{б}} W_{\text{а}} + W_{\text{в}} (1 + W_{\text{г}})$
	$W_1 = W_{\text{а}} (1 + W_{\text{г}});$ $W_{1f} = W_{\text{в}} + W_{\text{б}} W_{\text{а}} (1 + W_{\text{г}})$
	$W_1 = W_{\text{б}} W_{\text{в}} + W_{\text{а}} (1 + W_{\text{г}});$ $W_{1f} = W_{\text{в}}$
	$W_1 = W_{\text{а}} + W_{\text{б}} W_{\text{в}} (1 + W_{\text{г}});$ $W_{1f} = W_{\text{в}} (1 + W_{\text{г}})$
	$W_1 = W_{\text{а}} + W_{\text{б}};\quad W_{1f} = W_{\text{г}} + W_{\text{в}}$
	$W_1 = W_{\text{а}} (1 + W_{\text{в}} W_{\text{г}}) + W_{\text{б}};$ $W_{1f} = W_{\text{г}}$
	$W_1 = W_{\text{а}};\quad W_{1f} = W_{\text{в}} + W_{\text{г}} (W_{\text{б}} W_{\text{а}} + 1)$
	$W_1 = \dfrac{W_{\text{а}} (1 + W_{\text{в}} W_{\text{г}})}{1 - W_{\text{а}} W_{\text{б}} W_{\text{в}} W_{\text{г}}};$ $W_{1f} = \dfrac{W_{\text{г}} (1 + W_{\text{а}} W_{\text{б}})}{1 - W_{\text{а}} W_{\text{б}} W_{\text{в}} W_{\text{г}}}$

Структурная схема регулируемого объекта	Передаточные функции эквивалентной структурной схемы
	$W_1 = W_{\text{а}};\quad W_{1f} = W_{\text{б}} + W_{\text{в}}(1 + W_{\text{г}})$
	$W_1 = W_{\text{а}};\quad W_{1f} = W_{\text{г}}W_{\text{а}} + W_{\text{б}} + W_{\text{в}}$
	$W_1 = W_{\text{а}}(1 + W_{\text{г}});$ $W_{1f} = W_{\text{в}} + W_{\text{б}}(1 + W_{\text{г}})$
	$W_1 = W_{\text{а}} + W_{\text{г}}(W_{\text{б}} + W_{\text{в}});$ $W_{1f} = W_{\text{б}} + W_{\text{в}}$
	$W_1 = W_{\text{а}}(1 + W_{\text{г}}) + W_{\text{б}};\quad W_{1f} = W_{\text{в}}$
	$W_1 = W_{\text{а}} + W_{\text{б}} + W_{\text{г}}W_{\text{в}};\quad W_{1f} = W_{\text{в}}$
	$W_1 = W_{\text{а}} + W_{\text{б}}(1 + W_{\text{г}});$ $W_{1f} = W_{\text{в}}(1 + W_{\text{г}})$
	$W_1 = W_{\text{а}} + W_{\text{б}};$ $W_{1f} = W_{\text{в}} + W_{\text{г}}(W_{\text{а}} + W_{\text{б}})$
	$W_1 = W_{\text{а}};$ $W_{1f} + W_{\text{в}}(1 + W_{\text{г}} + W_{\text{а}}W_{\text{б}})$
	$W_1 = W_{\text{а}};$ $W_{1f} = W_{\text{а}}(W_{\text{г}} + W_{\text{б}}W_{\text{в}}) + W_{\text{в}}$
	$W_1 = W_{\text{а}}(1 + W_{\text{г}});$ $W_{1f} = W_{\text{в}}[1 + W_{\text{а}}W_{\text{б}}(1 + W_{\text{г}})]$

Структурная схема регулируемого объекта	Передаточные функции эквивалентной структурной схемы
	$W_1 = W_{\text{а}} + (1 + W_{\text{а}} W_{\text{б}}) W_{\text{в}} W_{\text{г}}$; $W_{1f} = W_{\text{в}} (1 + W_{\text{а}} W_{\text{б}})$
	$W_1 = W_{\text{а}} (1 + W_{\text{г}} + W_{\text{б}} W_{\text{в}})$; $W_{1f} = W_{\text{в}}$
	$W_1 = W_{\text{в}} (W_{\text{г}} + W_{\text{а}} W_{\text{б}}) + W_{\text{а}}$; $W_{1f} = W_{\text{в}}$
	$W_1 = W_{\text{а}} [1 + (1 + W_{\text{г}}) W_{\text{б}} W_{\text{в}}]$; $W_{1f} = W_{\text{в}} (1 + W_{\text{г}})$
	$W_1 = W_{\text{а}} (1 + W_{\text{б}} W_{\text{в}})$; $W_{1f} = W_{\text{в}} + (1 + W_{\text{в}} W_{\text{б}}) W_{\text{а}} W_{\text{г}}$
	$W_1 = (W_{\text{а}} + W_{\text{в}}) W_{\text{б}} + W_{\text{в}} W_{\text{г}}$; $W_{1f} = W_{\text{в}} (W_{\text{г}} + W_{\text{б}})$
	$W_1 = W_{\text{а}} (W_{\text{б}} + W_{\text{г}})$; $W_{1f} = (W_{\text{а}} + W_{\text{в}}) W_{\text{г}} + W_{\text{а}} W_{\text{б}}$
	$W_1 = W_{\text{а}} W_{\text{б}} + W_{\text{г}} (1 + W_{\text{б}})$; $W_{1f} = W_{\text{в}} W_{\text{г}} (1 + W_{\text{б}})$
	$W_1 = W_{\text{а}} (W_{\text{б}} + W_{\text{в}} W_{\text{г}}) + W_{\text{г}}$; $W_{1f} = W_{\text{в}} W_{\text{г}}$
	$W_1 = \frac{W_{\text{а}} (W_{\text{б}} + W_{\text{в}} W_{\text{г}})}{1 - W_{\text{в}} W_{\text{г}}}$; $W_{1f} = \frac{W_{\text{в}} W_{\text{г}} (1 + W_{\text{б}})}{1 - W_{\text{в}} W_{\text{г}}}$
	$W_1 = \frac{W_{\text{а}} W_{\text{б}}}{1 - W_{\text{а}} W_{\text{б}} W_{\text{в}}}$; $W_{1f} = \frac{W_{\text{б}}}{1 - W_{\text{а}} W_{\text{б}} W_{\text{в}}}$

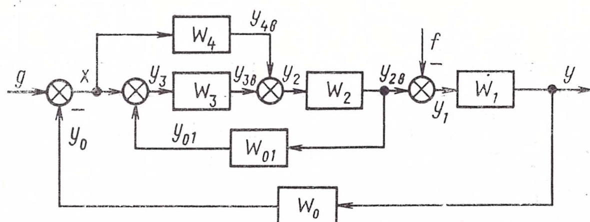


Рис. 3.2. Структурная схема многоконтурной САР

соединения в регуляторе. Все такие схемы являются, следовательно, многоконтурными.

Некоторые многоконтурные структурные схемы и передаточные функции этих САР приведены в табл. 3.2. Если рассматриваемая читателем структурная схема отличается от одной из имеющихся в табл. 3.2 знаком выходной величины звена W_i или отсутствием звена W_j, то нужно поступать так же, как было сказано ранее в отношении табл. 3.1.

Табл. 3.1 и 3.2 далеко не исчерпывают всего многообразия структур регулируемых объектов и многоконтурных САР. В этих случаях задача определения передаточной функции системы может быть решена одним из следующих методов.

При небольшой сложности структурной схемы передаточные функции удобно определить по схеме, начиная последовательный осмотр с регулируемой величины и далее против направления передачи сигналов. Каждый сумматор создает необходимость двигаться в нескольких направлениях. По каждому из них нужно двигаться до какого-либо из внешних воздействий или до регулируемой величины.

Во время осмотра схемы изображение выходной величины звена выражают через его передаточную функцию и изображение входной величины, а изображение суммы нескольких слагаемых выражают через их изображения.

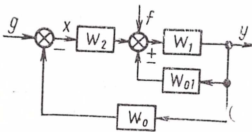
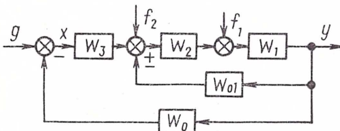
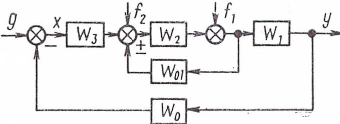
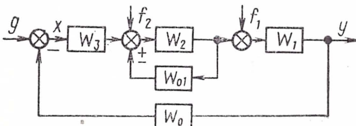
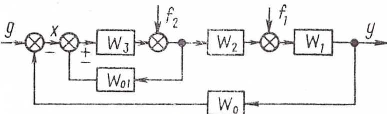
Из этой записи постепенно исключают изображения промежуточных величин. В результате будет получено равенство, которое содержит только изображения регулируемой величины и внешних воздействий. Оно позволит определить передаточные функции системы.

Например, для структурной схемы, показанной на рис.3.2, получим следующую цепочку равенств:

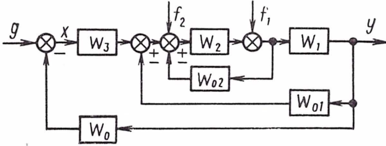
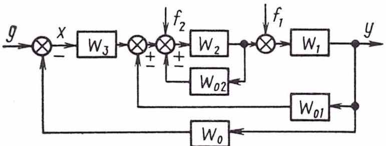
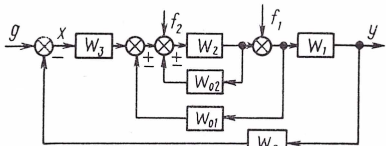
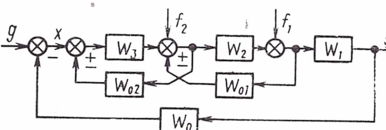
$$Y = W_1 Y_1 = W_1 \{-F_1 + Y_{2в}\} = W_1 \{-F_1 + W_2 Y_2\} =$$
$$= W_1 \{-F_1 + W_2 [Y_{3в} + Y_{4в}]\} = W_1 \{-F_1 + W_2 [W_3 Y_3 + W_4 X]\} =$$
$$= W_1 \{-F_1 + W_2 [W_3 (X + Y_{01}] + W_4 X]\} =$$
$$= W_1 \{-F_1 + W_2 [(W_3 + W_4)(G - Y_0) + W_3 W_{01} Y_{2в}]\} =$$
$$= W_1 \left\{-F_1 + W_2 \left[(W_3 + W_4)(G - W_0 Y) + W_3 W_{01} \left(F + \frac{Y}{W_1}\right)\right]\right\}.$$

Таблица 3.2

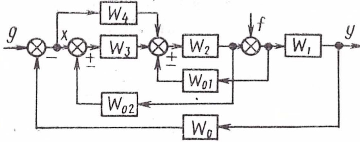
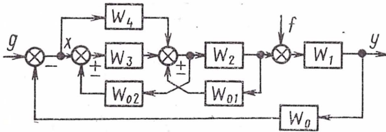
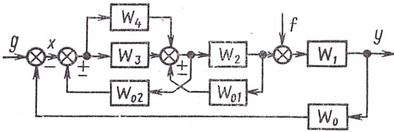
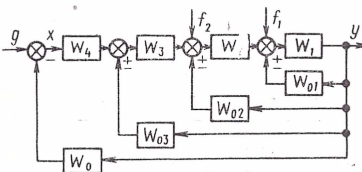
Передаточные функции САР с местными обратными связями ($W_i = W_i(s)$, $W_о = W_о(s)$ и $W_{оi} = W_{оi}(s)$ — передаточные функции соответственно участка цепи, основной обратной связи и местной обратной связи; s — комплексная величина преобразования Лапласа)

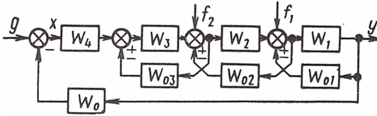
Структурная схема системы	Передаточные функции системы: $W = W(s)$ — разомкнутой; $W_g = W_g(s)$ — относительно задающего воздействия $g = g(t)$; $W_{fi} = W_{fi}(s)$ — относительно возмущения $f_i = f_i(t)$
	$W = \frac{W_о W_1 W_2}{1 \mp W_{о1} W_1}$; $W_g = \frac{W_1 W_2}{W_\Sigma}$; $W_f = \frac{W_1}{W_\Sigma}$, где $W_\Sigma = 1 \mp W_{о1} W_1 + W_о W_1 W_2$
	$W = \frac{W_о W_1 W_2 W_3}{1 \mp W_{о1} W_1 W_2}$; $W_g = \frac{W_1 W_2 W_3}{W_\Sigma}$; $W_{f1} = \frac{W_1}{W_\Sigma}$; $W_{f2} = \frac{W_1 W_2}{W_\Sigma}$, где $W_\Sigma = 1 \mp W_{о1} W_1 W_2 + W_о W_1 W_2 W_3$
	$W = \frac{W_о W_1 W_2 W_3}{1 \mp W_{о1} W_2}$; $W_g = \frac{W_1 W_2 W_3}{W_\Sigma}$; $W_{f1} = \frac{W_1}{W_\Sigma}$; $W_{f2} = \frac{W_1 W_2}{W_\Sigma}$, где $W_\Sigma = 1 \mp W_{о1} W_2 + W_о W_1 W_2 W_3$
	$W = \frac{W_о W_1 W_2 W_3}{1 \mp W_{о1} W_2}$; $W_g = \frac{W_1 W_2 W_3}{W_\Sigma}$; $W_{f1} = \frac{W_1 (1 \mp W_{о1} W_2)}{W_\Sigma}$; $W_{f2} = \frac{W_1 W_2}{W_\Sigma}$, где $W_\Sigma = 1 \mp W_{о1} W_2 + W_о W_1 W_2 W_3$
	$W = \frac{W_о W_1 W_2 W_3}{1 \mp W_{о1} W_3}$; $W_g = \frac{W_1 W_2 W_3}{W_\Sigma}$; $W_{f1} = \frac{W_1 (1 \mp W_{о1} W_3)}{W_\Sigma}$; $W_{f2} = \frac{W_1 W_2}{W_\Sigma}$, где $W_\Sigma = 1 \mp W_{о1} W_3 + W_о W_1 W_2 W_3$

Структурная схема системы	Передаточные функции системы: $W = W(s)$ — разомкнутой; $W_g = W_g(s)$ — относительно задающего воздействия $g = g(t)$; $W_{fi} = W_{fi}(s)$ — относительно возмущения $f_i = f_i(t)$
	$W = \dfrac{W_0W_1W_2}{1 \mp W_{01}W_2}$; $W_g = \dfrac{W_1W_2}{W_\Sigma}$; $W_f = \dfrac{W_1(1 \mp W_{01}W_2)}{W_\Sigma}$, где $W_\Sigma = 1 \mp W_{01}W_2 + W_0W_1W_2$
	$W = \dfrac{W_0W_1W_2W_3}{1 \mp W_{01}W_{02}W_1W_2}$; $W_g = \dfrac{W_1W_2W_3}{W_\Sigma}$; $W_f = \dfrac{\pm W_{01}W_1W_2}{W_\Sigma}$, где $W_\Sigma = 1 \mp W_{01}W_{02}W_1W_2 +$ $+ W_0W_1W_2W_3$
	$W = \dfrac{W_0W_1W_2(W_3 + W_4)}{1 \mp W_{01}W_1W_2W_3}$; $W_g = \dfrac{W_1W_2(W_3 + W_4)}{W_\Sigma}$; $W_f = \dfrac{W_1}{W_\Sigma}$, где $W_\Sigma = 1 \mp W_{01}W_1W_2W_3 +$ $+ W_0W_1W_2(W_3 + W_4)$
	$W = \dfrac{W_0W_1W_2W_3}{1 \mp W_{01}W_1 \mp W_{02}W_1W_2}$; $W_g = \dfrac{W_1W_2W_3}{W_\Sigma}$; $W_{f1} = \dfrac{W_1}{W_\Sigma}$; $W_{f2} = \dfrac{W_1W_2}{W_\Sigma}$, где $W_\Sigma = 1 \mp W_{01}W_1 \mp W_{02}W_1W_2 +$ $+ W_0W_1W_2W_3$
	$W = \dfrac{W_0W_1W_2W_3}{1 \mp W_{01}W_1 \mp W_{02}W_2}$; $W_g = \dfrac{W_1W_2W_3}{W_\Sigma}$; $W_{f1} = \dfrac{W_1}{W_\Sigma}$; $W_{f2} = \dfrac{W_1W_2}{W_\Sigma}$, где $W_\Sigma = 1 \mp W_{01}W_1 \mp W_{02}W_2 +$ $+ W_0W_1W_2W_3$

Структурная схема системы	Передаточные функции системы; $W = W(s)$ — разомкнутой; $W_g = W_g(s)$ — относительно задающего воздействия $g = g(t)$; $W_{fi} = W_{fi}(s)$ — относительно возмущения $f_i = f_i(t)$
	$W = \dfrac{W_0 W_1 W_2 W_3}{1 \mp W_{01} W_1 W_2 \mp W_{02} W_2}$; $W_g = \dfrac{W_1 W_2 W_3}{W_\Sigma}$; $W_{f1} = \dfrac{W_1}{W_\Sigma}$; $W_{f2} = \dfrac{W_1 W_2}{W_\Sigma}$, где $W_\Sigma = 1 \mp W_{01} W_1 W_2 \mp W_{02} W_2 + W_0 W_1 W_2 W_3$
	$W = \dfrac{W_0 W_1 W_2 W_3}{1 \mp W_{01} W_1 W_2 \mp W_{02} W_2}$; $W_g = \dfrac{W_1 W_2 W_3}{W_\Sigma}$; $W_{f1} = \dfrac{W_1 (1 \mp W_{02} W_2)}{W_\Sigma}$; $W_{f2} = \dfrac{W_1 W_2}{W_\Sigma}$, где $W_\Sigma = 1 \mp W_{01} W_1 W_2 \mp W_{02} W_2 + W_0 W_1 W_2 W_3$
	$W = \dfrac{W_0 W_1 W_2 W_3}{1 \mp (W_{01} + W_{02}) W_2}$; $W_g = \dfrac{W_1 W_2 W_3}{W_\Sigma}$; $W_{f1} = \dfrac{W_1 (1 \mp W_{02} W_2)}{W_\Sigma}$; $W_{f2} = \dfrac{W_1 W_2}{W_\Sigma}$, где $W_\Sigma = 1 \mp (W_{01} + W_{02}) W_2 + W_0 W_1 W_2 W_3$
	$W = \dfrac{W_0 W_1 W_2 W_3}{1 \mp W_{01} W_2 \mp W_{02} W_3}$; $W_g = \dfrac{W_1 W_2 W_3}{W_\Sigma}$; $W_{f1} = \dfrac{W_1 (1 \mp W_{02} W_3)}{W_\Sigma}$; $W_{f2} = \dfrac{W_1 W_2}{W_\Sigma}$, где $W_\Sigma = 1 \mp W_{01} W_2 \mp W_{02} W_3 + W_0 W_1 W_2 W_3$

Структурная схема системы	Передаточные функции системы; $W = W(s)$ — разомкнутой; $W_g = W_g(s)$ — относительно задающего воздействия $g = g(t)$; $W_{fi} = W_{fi}(s)$ — относительно возмущения $f_i = f_i(t)$
	$W = \dfrac{W_0 W_1 W_2 W_3}{1 \mp W_{01} W_2 \mp W_{02} W_3}$; $W_g = \dfrac{W_1 W_2 W_3}{W_\Sigma}$; $W_{f1} = \dfrac{W_1 (1 \mp W_{01} W_2 \mp W_{02} W_3)}{W_\Sigma}$; $W_{f2} = \dfrac{W_1 W_2}{W_\Sigma}$, где $W_\Sigma = 1 \mp W_{01} W_2 \mp W_{02} W_3 + W_0 W_1 W_2 W_3$
	$W = \dfrac{W_0 W_1 W_2 W_3}{1 \mp (W_{01} + W_{02}) W_3}$; $W_g = \dfrac{W_1 W_2 W_3}{W_\Sigma}$; $W_{f1} = \dfrac{W_1 [1 \mp (W_{01} + W_{02}) W_3]}{W_\Sigma}$; $W_{f2} = \dfrac{W_1 W_2 (1 \mp W_{02} W_3)}{W_\Sigma}$, где $W_\Sigma = 1 \mp (W_{01} + W_{02}) W_3 + W_0 W_1 W_2 W_3$
	$W = \dfrac{W_0 W_1 W_2 W_3}{1 \mp W_{03} W_2 \mp W_{02} W_{01} W_1 W_2}$; $W_g = \dfrac{W_1 W_2 W_3}{W_\Sigma}$; $W_f = \dfrac{\pm W_{02} W_1 W_2}{W_\Sigma}$; где $W_\Sigma = 1 \mp W_{03} W_2 \mp W_{02} W_{01} W_1 W_2 + W_0 W_1 W_2 W_3$
	$W = \dfrac{W_0 W_1 W_2 (W_3 + W_4)}{1 \mp W_{02} W_2 \mp W_{01} W_1 W_2 W_3}$; $W_g = \dfrac{W_1 W_2 (W_3 + W_4)}{W_\Sigma}$; $W_f = \dfrac{W_1}{W_\Sigma}$, где $W_\Sigma = 1 \mp W_{02} W_2 \mp W_{01} W_1 W_2 W_3 + W_0 W_1 W_2 (W_3 + W_4)$
	$W = \dfrac{W_0 W_1 W_2 (W_3 + W_4)}{1 \mp W_{01} W_1 \mp W_{02} W_2 W_3}$; $W_g = \dfrac{W_1 W_2 (W_3 + W_4)}{W_\Sigma}$; $W_f = \dfrac{W_1}{W_\Sigma}$, где $W_\Sigma = 1 \mp W_{01} W_1 \mp W_{02} W_2 W_3 + W_0 W_1 W_2 (W_3 + W_4)$

Структурная схема системы	Передаточные функции системы; $W = W(s)$ — разомкнутой; $W_g = W_g(s)$ — относительно задающего воздействия $g = g(t)$; $W_{fi} = W_{fi}(s)$ — относительно возмущения $f_i = f_i(t)$
	$W = \dfrac{W_0 W_1 W_2 (W_3 + W_4)}{1 \mp W_{01} W_2 \mp W_{02} W_2 W_3}$; $W_g = \dfrac{W_1 W_2 (W_3 + W_4)}{W_\Sigma}$; $W_f = \dfrac{W_1 (1 \mp W_{02} W_2 W_3)}{W_\Sigma}$, где $W_\Sigma = 1 \mp W_{01} W_2 \mp W_{02} W_2 W_3 + W_0 W_1 W_2 (W_3 + W_4)$
	$W = \dfrac{W_0 W_1 W_2 (W_3 + W_4)}{1 \mp W_{01} W_2 \mp W_{02} W_3}$; $W_g = \dfrac{W_1 W_2 (W_3 + W_4)}{W_\Sigma}$; $W_f = \dfrac{W_1 (1 \mp W_{01} W_2 \mp W_{02} W_3)}{W_\Sigma}$, где $W_\Sigma = 1 \mp W_{01} W_2 \mp W_{02} W_3 + W_0 W_1 W_2 (W_3 + W_4)$
	$W = \dfrac{W_0 W_1 W_2 (W_3 + W_4)}{1 \mp W_{01} W_2 \mp W_{02} (W_3 + W_4)}$; $W_g = \dfrac{W_1 W_2 (W_3 + W_4)}{W_\Sigma}$; $W_f = \dfrac{W_1 [1 \mp W_{01} W_2 \mp W_{02} (W_3 + W_4]}{W_\Sigma}$, где $W_\Sigma = 1 \mp W_{01} W_2 \mp W_{02} (W_3 + W_4) + W_0 W_1 W_2 (W_3 + W_4)$
	$W = \dfrac{W_0 W_1 W_2 W_3 W_4}{1 \mp W_{01} W_1 \mp W_{02} W_1 W_2 \mp W_{03} W_1 W_2 W_3}$; $W_g = \dfrac{W_1 W_2 W_3 W_4}{W_\Sigma}$; $W_{f1} = \dfrac{W_1}{W_\Sigma}$; $W_{f2} = \dfrac{W_1 W_2}{W_\Sigma}$, где $W_\Sigma = 1 \mp W_{01} W_1 \mp W_{02} W_1 W_2 \mp W_{03} W_1 W_2 W_3 + W_0 W_1 W_2 W_3 W_4$

<table>
<tr><th>Структурная схема системы</th><th>Передаточные функции системы;
$W = W(s)$ — разомкнутой;
$W_g = W_g(s)$ — относительно задающего воздействия $g = g(t)$;
$W_{fi} = W_{fi}(s)$ — относительно возмущения $f_i = f_i(t)$</th></tr>
<tr><td>


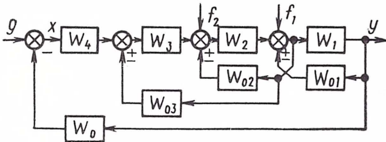
</td><td>

$W = \frac{W_0W_1W_2W_3W_4}{1 \mp W_{01}W_1 \mp W_{02}W_2 \mp \mp W_{03}W_3(1 \mp W_{01}W_1)}$;

$W_g = \frac{W_1W_2W_3W_4}{W_\Sigma}$;

$W_{f1} = \frac{W_1(1 \mp W_{03}W_3)}{W_\Sigma}$;

$W_{f2} = \frac{W_1W_2}{W_\Sigma}$,

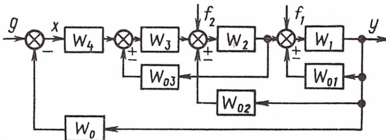
где $W_\Sigma = 1 \mp W_{01}W_1 \mp W_{02}W_2 \mp \mp W_{03}W_3(1 \mp W_{01}W_1) + + W_0W_1W_2W_3W_4$
</td></tr>
<tr><td>


</td><td>

$W = \frac{W_0W_1W_2W_3W_4}{1 \mp W_{01}W_1 \mp W_{02}W_2 \mp \mp W_{03}W_2W_3}$;

$W_g = \frac{W_1W_2W_3W_4}{W_\Sigma}$;

$W_{f1} = \frac{W_1}{W_\Sigma}$; $W_{f2} = \frac{W_1W_2}{W_\Sigma}$,

где $W_\Sigma = 1 \mp W_{01}W_1 \mp W_{02}W_2 \mp \mp W_{03}W_2W_3 + W_0W_1W_2W_3W_4$
</td></tr>
<tr><td>


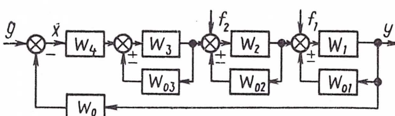
</td><td>

$W = \frac{W_0W_1W_2W_3W_4}{1 \mp W_{01}W_1 \mp W_{02}W_1W_2 \mp \mp W_{03}W_2W_3(1 \mp W_{01}W_1)}$;

$W_g = \frac{W_1W_2W_3W_4}{W_\Sigma}$;

$W_{f1} = \frac{W_1(1 \mp W_{03}W_2W_3)}{W_\Sigma}$;

$W_{f2} = \frac{W_1W_2}{W_\Sigma}$,

где $W_\Sigma = 1 \mp W_{01}W_1 \mp W_{02}W_1W_2 \mp \mp W_{03}W_2W_3(1 \mp W_{01}W_1) + + W_0W_1W_2W_3W_4$
</td></tr>
<tr><td>


</td><td>

$W = \frac{W_0W_1W_2W_3W_4}{(1 \mp W_{01}W_1)(1 \mp W_{02}W_2) \times \times (1 \mp W_{03}W_3)}$;

$W_g = \frac{W_1W_2W_3W_4}{W_\Sigma}$;

$W_{f1} = \frac{W_1(1 \mp W_{02}W_2)(1 \mp W_{03}W_3)}{W_\Sigma}$,

$W_{f2} = \frac{W_1W_2(1 \mp W_{03}W_3)}{W_\Sigma}$;

где $W_\Sigma = (1 \mp W_{01}W_1)(1 \mp W_{02}W_2) \times (1 \mp W_{03}W_3) + W_0W_1W_2W_3W_4$
</td></tr>
</table>

В результате вычислений получим

$$[1 - W_{01}W_2W_3 + W_0W_1W_2(W_3 + W_4)]\,Y = \\ = W_1W_2(W_3 + W_4)\,G - W_1(1 - W_{01}W_2W_3)\,F.$$

Следовательно, передаточные функции имеют вид

$$W_g = \frac{W_1W_2(W_3 + W_4)}{W_\Sigma} \text{ и } W_f = \frac{W_1(1 - W_{01}W_2W_3)}{W_\Sigma},$$

где

$$W_\Sigma = 1 - W_{01}W_2W_3 + W_0W_1W_2(W_3 + W_4).$$

Для определения передаточной функции W разомкнутой системы осмотр нужно начинать с выходной величины Y_0 основной обратной связи при размыкании этой связи около элемента сравнения и при $f = 0$. Чтобы определить передаточную функцию W_x, схему нужно осматривать, начиная с рассогласования X при $f = 0$.

Изложенный прием определения передаточных функций САР равносилен исключению промежуточных величин из системы операторных уравнений ее элементов.

Более универсальным способом является преобразование сложной структурной схемы в эквивалентную одноконтурную и определение передаточных функций по формулам (3.1) и (3.4)—(3.6). Кроме того, большие возможности дает применение теории графов. Эти вопросы рассмотрены ниже.

3.2. СТРУКТУРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Структурную схему любой сложности путем последовательных преобразований можно привести к эквивалентной одноконтурной. Одноконтурная схема эквивалентна исходной, если она определяет такую же зависимость указанных на ней величин (Y, X, Y_0 и др.) от внешних воздействий.

Преобразование структурной схемы должно осуществляться на основании правил, приведенных в табл. 3.3.

Прежде всего каждое имеющееся в схеме типовое соединение звеньев (последовательное, параллельное и встречно-параллельное) следует заменить эквивалентным звеном (пп. 1, 2 и 3 табл. 3.3). Затем целесообразно выполнить перенос точек разветвления и сумматоров (пп. 4—11 табл. 3.3), чтобы в преобразованной таким образом схеме образовались новые типовые соединения звеньев. Эти соединения опять должны быть заменены эквивалентными звеньями, затем вновь может потребоваться перенос точек разветвления и сумматоров и т. д. Для предупреждения ошибок следует вычерчивать структурную схему после каждого этапа преобразований и указывать на ней значения или символы вводимых эквивалентных звеньев.

Таблица 3.3

Правила структурных преобразований ($W_i = W_i\ (s)$ — передаточная функция)

№ по пор.	Преобразование		Исходная структурная схема	Эквивалентная структурная схема
1	Свертывание последовательного соединения звеньев		$u \to W_1 \to W_2 \to \dots \to W_n \to y$	$u \to W_э \to y$; $W_э = W_1 W_2 \dots W_n$
2	Свертывание параллельного соединения звеньев		$u \to W_1, W_2, \dots, W_n \to y$	$u \to W_э \to y$; $W_э = W_1 + W_2 + \dots + W_n$
3	Свертывание встречно-параллельного соединения звеньев		$u \to \otimes \to W_1 \to y$; W_0 ($\pm$)	$u \to W_э \to y$; $W_э = \frac{W_1}{1 \mp W_0 W_1}$
4	Перенос точки разветвления через звено	а) по направлению передачи сигналов	$u \to W_1 \to y$; x	$u \to W_1 \to y$; $W_к \to u$; $W_к = \frac{1}{W_1}$
		б) против направления передачи сигналов	$u \to W_1 \to y$; y	$u \to W_1 \to y$; $W_к \to y$; $W_к = W_1$

Продолжение табл. 3.3

№ по пор.	Преобразование		Исходная структурная схема	Эквивалентная структурная схема
5	Перенос сумматора через звено	а) по направлению передачи сигналов		$W_K = W_1$
		б) против направления передачи сигналов		$W_K = \frac{1}{W_1}$
6	Перестановка точек разветвления			
7	Перестановка сумматоров			
8	Перенос точки разветвления через сумматор	а) по направлению передачи сигналов		
		б) против направления передачи сигналов		

Продолжение табл. 3.3

№ по пор.	Преобразование		Исходная структурная схема	Эквивалентная структурная схема
9	Перенос звена через звено		u → W_1 → W_2 → y	u → W_2 → W_1 → y
10	Перенос прямой связи через точку разветвления	а) по направлению передачи сигналов	u, W_2, W_1, $\pm$, y, y	u, W_2, W_1, $\pm$, y, W_K, y; $W_K = 1 \pm \frac{W_2}{W_1}$
			u, W_2, W_1, $\pm$, y, x	u, W_2, W_1, $\pm$, y, x
		б) против направления передачи сигналов	u, W_2, W_1, $\pm$, y, y_1	u, W_2, W_1, $\pm$, y, W_K, y; $W_K = \frac{W_1}{W_1 \pm W_2}$
			u, W_2, W_1, $\pm$, y, x	u, W_2, W_1, $\pm$, y, x

№ по пор.	Преобразование		Исходная структурная схема	Эквивалентная структурная схема
11	Перенос прямой связи через сумматор	а) по направлению передачи сигналов		
				$W_k = \frac{W_1}{W_1 \pm W_2}$
		б) против направления передачи сигналов		
				$W_k = 1 \pm \frac{W_2}{W_1}$

Продолжение табл. 3.3

№ по пор.	Преобразование		Исходная структурная схема	Эквивалентная структурная схема
12	Перенос прямой связи через звено	а) по направлению передачи сигналов		$W_K = W_2 W_3$
				$W_K = \frac{W_3}{W_1}$
		б) против направления передачи сигналов		$W_K = \frac{W_3}{W_2}$
				$W_K = W_1 W_3$

Продолжение табл. 3.3

№ по пор.	Преобразование		Исходная структурная схема	Эквивалентная структурная схема
		а) по направлению передачи сигналов		
13	Перенос обратной связи через точку разветвления			$W_K = \dfrac{1}{1 \mp W_0 W_1}$
		б) против направления передачи сигналов		
				$W_K = 1 \mp W_0 W_1$

Продолжение табл. 3.3

№ по пор.	Преобразование		Исходная структурная схема	Эквивалентная структурная схема
14	Перенос обратной связи через сумматор	а) по направлению передачи сигналов		$W_K = 1 \mp W_0 W_1$
		б) против направления передачи сигналов		$W = \frac{1}{1 \mp W_0 W_1}$

Продолжение табл. 3.3

№ по пор.	Преобразование		Исходная структурная схема	Эквивалентная структурная схема
15	Перенос обратной связи через звено	а) по направлению передачи сигналов		$W_к = \frac{W_0}{W_2}$
				$W_к = W_0 W_1$
		б) против направления передачи сигналов		$W_к = W_0 W_2$
				$W_к = \frac{W_0}{W_1}$
16	Вынос звена из параллельного соединения			$W_к = \frac{W_1 \pm W_2}{W_1 \pm 1}$

Продолжение табл. 3.3

№ по пор.	Преобразование		Исходная структурная схема	Эквивалентная структурная схема
17	Вынос из встречно-параллельного соединения	а) прямой цепи		$W_K = W_1$
		б) обратной связи		$W_{K1} = \frac{1}{W_0}$; $W_{K2} = W_0$
18	Перенос прямой связи на соседнее звено	а) по направлению передачи сигналов		$W_K = \frac{W_2 W_3}{W_1}$
		б) против направления передачи сигналов		$W_K = \frac{W_1 W_3}{W_2}$

№ по пор.	Преобразование		Исходная структурная схема	Эквивалентная структурная схема
19	Перенос обратной связи на соседнее звено	а) по направлению передачи сигналов	u, W_1, W_2, W_0, ±, y	u, W_1, W_2, W_K, ±, y; $W_K = \frac{W_0 W_1}{W_2}$
		б) против направления передачи сигналов	u, W_1, W_2, W_0, ±, y	u, W_1, W_2, W_K, ±, y; $W_K = \frac{W_0 W_2}{W_1}$
20	Перестановка звеньев во встречно-параллельном соединении		u, W_1, W_0, ±, y	u, $1/W_0$, $1/W_1$, −, y
21	Включение звена в параллельное соединение		u, W_1, ±, y	u, W_2, W_1, W_K, ±, y; $W_K = \frac{W_1 \pm 1}{W_1 \pm W_2}$

Продолжение табл. 3.3

№ по пор.	Преобразование		Исходная структурная схема	Эквивалентная структурная схема
22	Включение звена во встречно-параллельное соединение	а) в прямую цепь	u, y, W_0, ±	u, y, W_K, W_1, W_K, W_0, ±; $W_K=\frac{1}{W_1}$
		б) в обратную связь	u, y, W_1, ±	u, y, W_{K1}, W_{K2}, W_1, W_0, ±; $W_{K1}=W_0$; $W_{K2}=\frac{1}{W_0}$
23	Включение звена с единичной передаточной функцией		u	u, $W=1$, u
24	Замена звена встречно-параллельным соединением		u, W, y	u, y, W_1, W_0, ±; $W_0=\frac{1}{W}-\frac{1}{W_1}$

Продолжение табл. 3.3

№ по пор.	Преобразование		Исходная структурная схема	Эквивалентная структурная схема
25	То же, но при единичной обратной связи		u, W, y	u, W_1, y, $-$; $W_1 = \frac{W}{1-W}$
26	Замена последовательного соединения	а) параллельным	u, W_1, W_2, y	u, W_K, W_1, $+$, y; $W_K = W_1(W_2-1)$
		б) встречно-параллельным	u, W_1, W_2, y	u, W_1, W_0, $-$, y; $W_0 = \frac{1-W_2}{W_1 W_2}$
27	Замена параллельного соединения	а) последовательным	u, W_2, W_1, $+$, y	u, W_1, W_K, y; $W_K = 1 \pm \frac{W_2}{W_1}$
		б) встречно-параллельным	u, W_2, W_1, $\pm$, y	u, W_1, W_0, $-$, y; $W_0 = \frac{-W_2}{W_1(W_1+W_2)}$

Продолжение табл. 3.3

№ по пор.	Преобразование		Исходная структурная схема	Эквивалентная структурная схема
28	Замена встречно-параллельного соединения последовательным			$W_K = \dfrac{1}{1 \mp W_0 W_1}$
29	Разделение двух сцепленных контуров	а) с прямыми связями		$W_K = \dfrac{W_1 W_4}{W_1 + W_2}$
		б) с обратными связями		$W_K = \dfrac{W_{02}}{1 + W_{01} W_1}$
		в) с прямой и обратной связями		

№ по пор.	Преобразование		Исходная структурная схема	Эквивалентная структурная схема
30	Свертывание цепи из двух сцепленных контуров	а) с прямыми связями	W4, W5, W1, W2, W3; u, y; +, +	u → $W_э$ → y; $W_э = W_1 W_2 W_3 + W_1 W_5 + W_3 W_4$
		б) с обратными связями	W1, W2, W3, W01, W02; u, y; −, −	u → $W_э$ → y; $W_э = \dfrac{W_1 W_2 W_3}{1 + W_{01} W_1 W_2 + W_{02} W_2 W_3}$
		б) с прямой и обратной связями	W4, W1, W2, W3, W0; u, y; +, −	u → $W_э$ → y; $W_э = \dfrac{(W_1 W_2 + W_4) W_3}{1 + W_0 W_2 W_3}$
			W4, W1, W2, W3, W0; u, y; +, −	

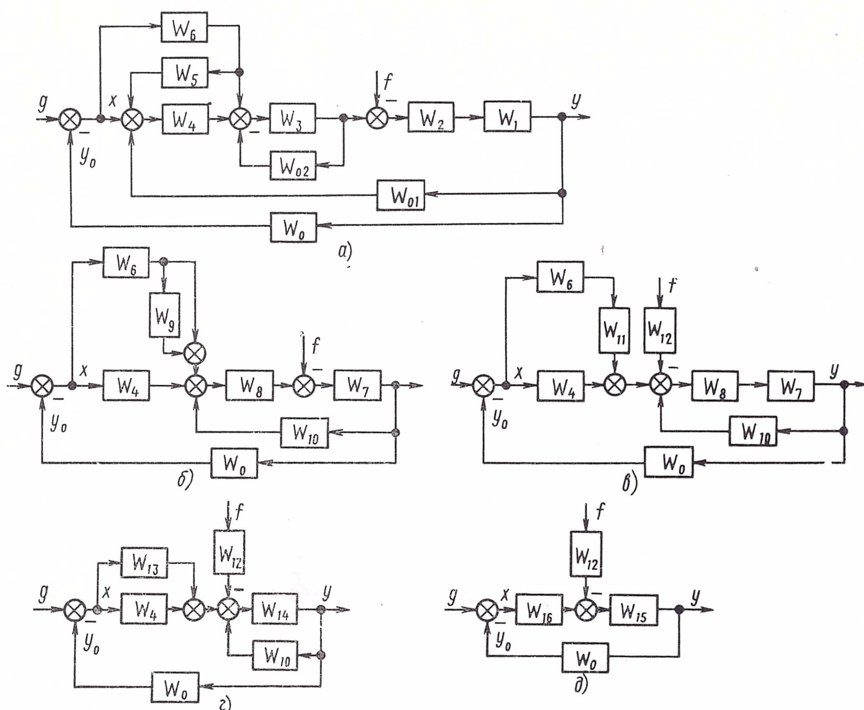


Рис. 3.3. Приведение многоконтурной структурной схемы к одноконтурной

Пример 3.1. Требуется определить передаточные функции САР, структурная схема которой показана на рис. 3.3, *а*.

Для решения задачи преобразуем схему в эквивалентную одноконтурную. Прежде всего последовательное соединение звеньев с передаточными функциями W_1 и W_2 заменим эквивалентным звеном (см. п. 1 табл. 3.3) с передаточной функцией

$$W_7 = W_1 W_2$$

и встречно-параллельное соединение звеньев с передаточными функциями W_3 и W_{o2} заменим эквивалентным звеном (см. п. 3 табл. 3.3) с передаточной функцией

$$W_8 = \frac{W_3}{1 + W_{o2} W_3}.$$

Кроме того, переносим сумматор через звено с передаточной функцией W_4. При этом последовательно с звеном, имеющим передаточную функцию W_5, а также последовательно с звеном, имеющим передаточную функцию W_{o1}, нужно включить (см. п. 5 табл. 3.3) звено с передаточной функцией W_4. Эти два последовательные соединения двух звеньев заменим эквивалентными звеньями с передаточными функциями

$$W_9 = W_4 W_5 \quad \text{и} \quad W_{10} = W_{o1} W_4.$$

В результате сделанных преобразований структурная схема упростилась (рис. 3.3, *б*).

Теперь участок цепи, параллельно которому включено звено с передаточной функцией W_9, заменяем эквивалентным звеном (см. п. 23 и 2 табл. 3.3) с передаточной функцией

$$W_{11} = 1 + W_9 = 1 + W_4 W_5.$$

Еще переносим сумматор через звено с передаточной функцией W_8 против направления передачи сигналов. Согласно п. 5 табл. 3.3 в цепь воздействия возмущения f нужно включить звено с передаточной функцией

$$W_{12} = \frac{1}{W_8} = \frac{1 + W_{o2} W_3}{W_3}.$$

Структурная схема после этих преобразований имеет вид, показанный на рис. 3.3, *в*.

В схеме имеются последовательные соединения звеньев с передаточными функциями W_6 и W_{11} и с передаточными функциями W_7 и W_8. Указанные последовательные соединения заменяем (см. п. 1 табл. 3.3) звеньями с передаточными функциями соответственно:

$$W_{13} = W_6 W_{11} = (1 + W_4 W_5) W_6$$

и

$$W_{14} = W_7 W_8 = \frac{W_1 W_2 W_3}{1 + W_{o2} W_3}.$$

Полученная структурная схема показана на рис. 3.3, *г*.

В заключение заменим эквивалентными звеньями встречно-параллельное соединение звеньев с передаточными функциями W_{14} и W_{10} и параллельное соединение звеньев с передаточными функциями W_4 и W_{13}. На основании п. 3 и 2 табл. 3.3 передаточные функции эквивалентных звеньев соответственно равны

$$W_{15} = \frac{W_{14}}{1 - W_{10} W_{14}} = \frac{W_1 W_2 W_3}{1 + W_{o2} W_3 - W_{o1} W_1 W_2 W_3 W_4}$$

и

$$W_{16} = W_4 + W_{13} = W_4 + W_4 W_5 W_6 + W_6.$$

Структурная схема становится одноконтурной (рис. 3.3, *д*). Сопоставляя ее со схемой, приведенной на рис. 3.1, и пользуясь формулами (3.1), (3.5) и (3.6), определим передаточные функции:

$$W = W_o W_{15} W_{16} = \frac{W_o W_1 W_2 W_3 (W_4 + W_4 W_5 W_6 + W_6)}{1 + W_{o2} W_3 - W_{o1} W_1 W_2 W_3 W_4};$$

$$W_g = \frac{W_{15} W_{16}}{1 + W} = \frac{W_1 W_2 W_3 (W_4 + W_4 W_5 W_6 + W_6)}{W_\Sigma};$$

$$W_f = \frac{W_{12} W_{15}}{1 + W} = \frac{W_1 W_2 (1 + W_{o2} W_3)}{W_\Sigma};$$

$$W_x = \frac{1}{1 + W} = \frac{1 + W_{o2} W_3 - W_{o1} W_1 W_2 W_3 W_4}{W_\Sigma},$$

где

$$W_\Sigma = 1 + W_{o2} W_3 - W_{o1} W_1 W_2 W_3 W_4 + W_o W_1 W_2 W_3 (W_4 + \\ + W_4 W_5 W_6 + W_6).$$

В примере были сделаны простейшие структурные преобразования. Обычно с их помощью и удается многоконтурную струк-

турную схему привести к одноконтурной. Более сложные структурные преобразования (п. 9—30 табл. 3.3) используют в тех случаях, когда исследуемую структурную схему нужно привести к известной, ранее исследованной.

3.3. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Передаточные функции сложной многоконтурной системы автоматического регулирования можно определить по структурной схеме и без приведения ее к одноконтурной, если использовать метод теории графов.

Структурную схему САР можно рассматривать как один из видов графа, и для определения передаточных функций использовать формулу Мезона. Для принятых здесь обозначений она принимает следующий вид:

$$W_{zv} = \frac{\sum_{i=1}^{r} H_i F_i}{F}, \qquad (3.12)$$

где $W_{zv} = W_{zv}(s)$ — отношение изображения по Лапласу $Z(s)$ переменной $z = z(t)$ к изображению $V(s)$ переменной $v = v(t)$;

$$F = 1 - \sum_{i=1}^{r_1} H_{1i} + \sum_{i=1}^{r_2} H_{2i} - \sum_{i=1}^{r_3} H_{3i} + \cdots;$$

$H_{1i} = H_{1i}(s)$ — передаточная функция разомкнутой цепи i-го замкнутого контура структурной схемы;

r_1 — число замкнутых контуров в схеме;

$H_{2i} = H_{2i}(s)$ — произведение передаточных функций разомкнутых цепей i-й пары несоприкасающихся замкнутых контуров;

r_2 — число пар несоприкасающихся контуров;

$H_{3i} = H_{3i}(s)$ — произведение передаточных функций разомкнутых цепей i-й тройки несоприкасающихся контуров;

r_3 — число троек несоприкасающихся контуров;

$H_i = H_i(s)$ — передаточная функция i-й прямой цепи от переменной v к переменной z;

r — число прямых цепей от v к z;

F_i — функция F для той части структурной схемы, которая не соприкасается с i-й прямой цепью от v к z.

Формула (3.12) позволяет без преобразования сложной структурной схемы САР определить любую ее передаточную функцию, т. е. отношение изображения одной из координат к изображению внешнего воздействия или другой координаты.

Используя формулу (3.12), нужно иметь в виду следующее. Прямые цепи от v к z могут частично совпадать одна с другой. При определении передаточной функции разомкнутой цепи каждого из контуров нужно учитывать знак обратной связи, образующей этот контур. Контуры не соприкасаются один с другим,

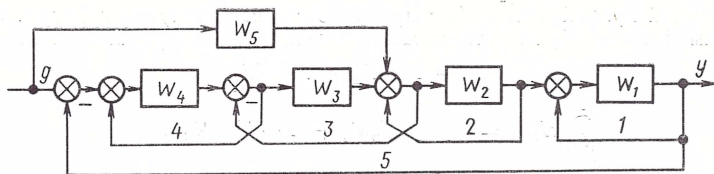


Рис. 3.4. Структурная схема многоконтурной САР с дополнительной связью по задающему воздействию

когда у них нет ни общей координаты (стрелки), ни общего звена (прямоугольника). Если в структурной схеме есть более трех несоприкасающихся контуров, то при вычислении функции F нужно добавить соответствующие суммы. Каждая из функций F_i вычисляется так же, как и функция F, но рассматривается лишь та часть структурной схемы, которая не соприкасается с i-й прямой цепью от v к z. Если с i-й прямой цепью соприкасаются все замкнутые контуры, то $F_i = 1$.

Пример 3.2. По структурной схеме САР (рис. 3.4) нужно определить ее передаточную функцию относительно задающего воздействия g. Воспользуемся формулой (3.12) и начнем с вычисления функции F. В рассматриваемой схеме пять замкнутых контуров. Передаточные функции их разомкнутых цепей W_1; W_2; $-W_3$; $-W_4$; $-W_1W_2W_3W_4$.

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{5} H_{i1} = W_1 + W_2 - W_3 - W_4 - W_1W_2W_3W_4.$$

По схеме выясняем, что имеются пары из 1-го и 2-го, 1-го и 3-го, 1-го и 4-го, 2-го и 4-го несоприкасающихся контуров. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{4} H_{2i} = W_1W_2 - W_1W_3 - W_1W_4 - W_2W_4.$$

Имеется только одна тройка из несоприкасающихся контуров, и она состоит из 1-го, 2-го и 4-го контуров, т. е.

$$H_{31} = -W_1W_2W_4.$$

Четырех несоприкасающихся контуров в схеме нет, и можно определить функцию

$$F = 1 - \sum_{i=1}^{5} H_{1i} + \sum_{i=1}^{4} H_{2i} - H_{31} =$$

$$= (1 - W_1)\,[(1 - W_2)\,(1 + W_4) + W_3] + W_1W_2W_3W_4.$$

От задающего воздействия g к регулируемой координате y идут две прямые цепи передачи сигнала. Их передаточные функции

$$H_1 = W_4W_3W_2W_1$$

и $H_2 = W_5W_2W_1$.

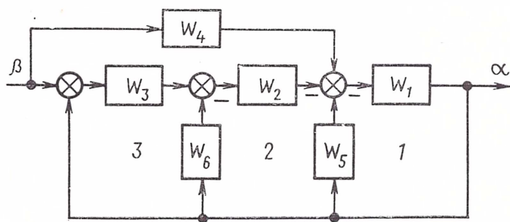


Рис. 3.5. Структурная схема дифференцирующего гироскопа

С первой прямой цепью H_1 соприкасаются все замкнутые контуры. Со второй прямой цепью H_2 не соприкасается только 4-й контур. Следовательно,

$$F_1 = 1 \text{ и } F_2 = 1 + W_4.$$

$$\sum_{i=1}^{2} H_i F_i = W_1 W_2 [W_3 W_4 + (1 + W_4) W_5].$$

Теперь можно определить искомую передаточную функцию

$$W_g = \frac{W_1 W_2 [W_3 W_4 + (1 + W_4) W_5]}{(1 - W_1)[(1 - W_2)(1 + W_4) + W_3] + W_1 W_2 W_3 W_4}.$$

Легко убедиться, что преобразование рассмотренной структурной схемы в эквивалентную одноконтурную сложнее проделанного расчета. Использование формулы (3.12) обычно уменьшает трудоемкость определения передаточных функций САР со сложной многоконтурной структурной схемой.

Пример 3.3. Составить передаточную функцию $W_{\alpha\beta}$ дифференцирующего гироскопа, структурная схема которого изображена на рис. 3.5.

Начнем с вычисления функции F. В схеме три замкнутых контура ($r_1 = 3$) и все они соприкасаются, так как имеют общее звено W_1. Следовательно, $r_2 = r_3 = \ldots = 0$. Передаточные функции разомкнутых цепей контуров

$$H_{11} = W_1(-W_5) = -W_1 W_5;$$

$$H_{12} = W_1(-W_6)(-W_2) = W_1 W_2 W_6;$$

$$H_{13} = W_1 W_3 (-W_2) = -W_1 W_2 W_3.$$

Определим функцию

$$F = 1 - (H_{11} + H_{12} + H_{13}) =$$
$$= 1 + W_1 W_5 - W_1 W_2 W_6 + W_1 W_2 W_3.$$

В схеме две прямых цепи от входной величины β к выходной α. Их передаточные функции:

$$H_1 = W_3(-W_2) W_1 = -W_1 W_2 W_3; \quad H_2 = W_4 W_1.$$

Обе прямые цепи содержат звено W_1, которое входит и во все замкнутые контуры системы, т. е. нет замкнутых контуров, не соприкасающихся с прямыми цепями. Поэтому $F_1 = F_2 = 1$.

Теперь по формуле (3.12) определим искомую передаточную функцию

$$W_{\alpha\beta} = \frac{H_1 F_1 + H_2 F_2}{F} = \frac{-W_1 W_2 W_3 + W_4 W_1}{1 + W_1 W_5 - W_1 W_2 W_6 + W_1 W_2 W_3} =$$

$$= \frac{W_1 (W_4 - W_2 W_3)}{1 + W_1 [W_2 (W_3 - W_6) + W_5]}.$$

Глава 4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

При анализе и синтезе САР обычно возникает необходимость в вычислении и построении той или иной временной характеристики. Наиболее часто оказываются необходимыми переходные характеристики системы относительно задающего воздействия и относительно возмущения.

Основные сведения о временных характеристиках были изложены в п. 2.4. Временные характеристики типовых динамических звеньев приведены в табл. 2.2. Данная глава содержит наиболее употребительные методы отыскания временных характеристик сложных элементов и систем и справочный материал, необходимый для их применения.

Числовое решение дифференциального уравнения можно получить на ЭЦВМ, при этом получают точность высокой степени. Всякая временная характеристика может быть вычислена по дифференциальному уравнению операционным методом. Если же имеется вещественная частотная характеристика системы, то ее приближенную переходную характеристику часто определяют графоаналитическим методом. Его широко используют при инженерных расчетах, так как он позволяет быстро получать результаты для предварительной оценки качества регулирования. Применение его особенно удобно, когда какой-либо элемент системы задается не дифференциальным уравнением или передаточной функцией, а экспериментально снятыми частотными характеристиками.

Два последних метода и будут рассмотрены ниже. Следует заметить, что с появлением микроЭВМ существенно повысилась продуктивность ручного счета и его применение в инженерной практике вновь становится целесообразным.

Следует также иметь в виду, что график временной характеристики можно получить на электронной модели этой системы. Большое преимущество моделирования заключается в возможности сопряжения электронной модели с реальным элементом.

4.1. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОПЕРАЦИОННЫМ МЕТОДОМ

Операционное исчисление дает экономный метод решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, который нашел широкое применение в расчетах, связанных с анализом и синтезом САР.

Сущность операционного исчисления заключается в следующем. Пусть требуется отыскать решение неоднородного линейного уравнения при заданных функциях времени его правой части и заданных начальных условиях. Прежде всего уравнение преобразуют почленно по Лапласу с учетом начальных условий. Из полученного алгебраического уравнения определяют изображение по Лапласу искомой функции времени. Затем это изображение подвергают обратному преобразованию Лапласа и таким образом находят оригинал, т. е. искомую функцию времени.

Если задана система линейных уравнений, то преобразуют по Лапласу каждое из уравнений. Затем из полученной системы алгебраических уравнений определяют изображение по Лапласу искомой функции времени и по изображению находят оригинал.

Общую формулу (П1.4) обратного преобразования Лапласа при инженерных расчетах не используют, так как имеются таблицы оригиналов и изображений, например в [31] и в данной книге (табл. 4.1).

Если изображение есть дробно-рациональная функция s, для отыскания оригинала могут быть использованы формулы (П1.6) или (П1.8) разложения Хевисайда.

Формула, определяющая решение дифференциального уравнения САР, т. е. регулируемую величину $y = y(t)$, составлена следующим образом [114].

Предположим, что изображение по Лапласу $V = V(s)$ внешнего воздействия $v = v(t)$ есть

$$V = \frac{V_1}{V_2},$$

где V_1 и V_2 — полиномы от s степени соответственно μ и ϑ, и передаточная функция $W_v = W_v(s)$ САР относительно этого воздействия

$$W_v = \frac{R_v}{\mathscr{D}},$$

где R_v и $\mathscr{D}$ — полиномы от s степени соответственно m и n $(m \leqslant n)$.

Тогда изображение $Y = Y(s)$ регулируемой величины есть

$$Y = W_v V + \frac{M_{\text{н}}}{\mathscr{D}}, \tag{4.1}$$

где $M_{\text{н}}$ — полином от s, содержащий начальные значения регулируемой величины и ее производных до $(n - 1)$-й включительно.

Если имеем $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — полюсы передаточной функции W_v (корни полинома $\mathscr{D}$); $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ — нули передаточной функции W_v (корни полинома R_v); $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\eta$ — полюсы изображения V (корни полинома V_2); $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\mu$ — нули изображения V (корни полинома V_1), то

$$Y = \frac{b_0 (s-\gamma_1)(s-\gamma_2)\cdots(s-\gamma_m)}{a_0 (s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n)} \cdot \frac{f_0 (s-\sigma_1)(s-\sigma_2)\cdots(s-\sigma_\mu)}{(s-\rho_1)(s-\rho_2)\cdots(s-\rho_\eta)} + \frac{M_{\text{н}}}{a_0 (s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n)}, \tag{4.2}$$

где a_0, b_0 и f_0 — постоянные.

Из равенства (4.2) следует, что изображение Y и, следовательно, регулируемая величина y во время динамического процесса, вызванного внешним воздействием v, зависят от значения нулей и полюсов как передаточной функции W_v, так и изображения V внешнего воздействия. Кроме того, процесс зависит от начальных условий. Значение регулируемой величины

$$y = y_{\text{в}} + y_{\text{с}} + y_{\text{св}}, \tag{4.3}$$

где $y_{\text{в}} = y_{\text{в}}(t)$ — вынужденная составляющая;
$y_{\text{с}} = y_{\text{с}}(t)$ — сопровождающая составляющая;
$y_{\text{св}} = y_{\text{св}}(t)$ — свободная составляющая.

Две последние составляющие образуют собственную составляющую.

Если все полюсы передаточной функции W_v и изображения V простые, т. е. отличаются от нуля и один от другого, то

$$y_{\text{в}} = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{R_v(\rho_k) V_1(\rho_k)}{\mathscr{D}(\rho_k) V_2' \rho_k} e^{\rho_k t};$$

$$y_{\text{с}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{R_v(\lambda_i) V_1(\lambda_i)}{\mathscr{D}'(\lambda_i) V_2(\lambda_i)} e^{\lambda_i t};$$

$$y_{\text{св}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{M_{\text{н}}(\lambda_i)}{\mathscr{D}'(\lambda_i)} e^{\lambda_i t}, \tag{4.4}$$

где

$$V_2'(\rho_k) = \left|\frac{dV_2}{ds}\right|_{s=\rho_k}; \quad \mathscr{D}'(\lambda_i) = \left|\frac{d\mathscr{D}}{ds}\right|_{s=\lambda_i}.$$

Если изображение V имеет нулевой полюс и $V_2(s) = sV_{21}(s)$, то $y_{\text{в}}$ имеет постоянную составляющую:

$$y_{\text{в}} = \frac{R_v(0) V_1(0)}{\mathscr{D}(0) V_{21}(0)} + \sum_{k=1}^{\nu-1} \frac{R_v(\rho_k) V_1(\rho_k)}{\rho_k \mathscr{D}(\rho_k) V_{21}'(\rho_k)} e^{\rho_k t}. \tag{4.5}$$

Переходная характеристика $h = h(t)$ есть реакция САР на единичное ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях. В этом случае $v = 1(t)$, $V = \frac{1}{s}$ и $M_н = 0$. Следовательно, изображение $H = H(s)$ переходной характеристики САР относительно внешнего воздействия v определяется равенством

$$H = W_v \frac{1}{s} = \frac{b_0 (s - \gamma_1)(s - \gamma_2) \cdots (s - \gamma_m)}{a_0 (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_n) s} \tag{4.6}$$

и при простых полюсах передаточной функции

$$h = \frac{R_v(0)}{\mathscr{D}(0)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{R_v(\lambda_i)}{\lambda_i \mathscr{D}'(\lambda_i)} e^{\lambda_i t}, \tag{4.7}$$

т. е. переходная характеристика САР относительно внешнего воздействия v зависит только от значения нулей и полюсов передаточной функции относительно этого воздействия.

Найдем решение уравнения

$$(Tp + 1) y = k (\tau p + 1) v,$$

где $v = \sin \omega t$ при начальном условии $y(0) = y^0$.

Преобразовав уравнение почленно по Лапласу, получим

$$(Ts + 1) Y - Ty^0 = k (\tau s + 1) V,$$

так как $v(0) = 0$,
или

$$Y = W_v V + \frac{M_н}{\mathscr{D}},$$

где

$$W_v = \frac{k(\tau s + 1)}{Ts + 1}; \quad V = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \text{ (по табл. П1.2);}$$

$$M_н = Ty^0 \text{ и } \mathscr{D} = Ts + 1.$$

Получено алгебраическое уравнение, которое имеет тот же вид, что и уравнение (4.1). Определим полюсы передаточной функции W_v и изображения V внешнего воздействия:

$$\lambda = -\frac{1}{T}; \; \rho_1 = j\omega; \; \rho_2 = -j\omega,$$

а также производные полиномов $\mathscr{D}$ и V_2 по s:

$$\mathscr{D}' = T; \; V_2' = 2s.$$

Теперь, пользуясь формулами (4.4), находим составляющие решения: вынужденную

$$y_в = \frac{k(j\tau\omega + 1)\omega}{(jT\omega + 1) 2j\omega} e^{j\omega t} + \frac{k(-j\tau\omega + 1)\omega}{(-jT\omega + 1) 2(-j\omega)} e^{-j\omega t} = A \sin(\omega t + \psi),$$

где

$$A = k \sqrt{\frac{1 + \omega^2\tau^2}{1 + \omega^2 T^2}} \text{ и } \psi = \operatorname{arctg} \frac{\omega(\tau - T)}{1 + \omega^2 \tau T};$$

сопровождающую

$$y_c = \frac{k\left(-\frac{\tau}{T}+1\right)\omega}{T\left(\frac{1}{T^2}+\omega^2\right)} e^{-\frac{t}{T}} = \frac{k\omega(T-\tau)}{1+\omega^2T^2} e^{-\frac{t}{T}}$$

и свободную

$$y_{св} = \frac{Ty^0}{T} e^{-\frac{t}{T}} = y^0 e^{-\frac{t}{T}}.$$

Согласно формуле (4.3), общее решение

$$y = A\sin(\omega t+\psi) + \left[\frac{k\omega(T-\tau)}{1+\omega^2T^2} + y^0\right] e^{-\frac{t}{T}},$$

где второе слагаемое есть собственная составляющая.

Для отыскания оригиналов по рациональным изображениям может быть использована табл. 4.1. Знаменатели изображений предварительно должны быть разложены на элементарные множители (см. приложение 2).

Может оказаться, что рассматривается изображение, знаменатель которого совпадает с имеющимся в табл. 4.1, а полином числителя имеет более высокую степень. Тогда следует выяснить, нельзя ли воспользоваться таблицей, если представить это изображение в виде суммы двух или трех слагаемых.

Изображение, у которого степень знаменателя выше, чем у изображений в табл. 4.1, можно разложить на сумму простейших дробей. Оригинал, соответствующий каждой из этих дробей, находят по табл. 4.1.

На простейшие дроби можно разложить всякое отношение $\frac{R}{Q}$, где R и Q — полиномы степени соответственно m и n $(n > m)$, не имеющие общих множителей.

Предположим, что полином Q представлен в виде произведения элементарных множителей s^q, $(T_i s+1)^\eta$ и $(T_j^2 s^2 + 2\xi T_j s + 1)^\mu$. Множителю s^q соответствуют дроби

$$\frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s^2} + \ldots + \frac{A_q}{s^q},$$

множителю $(T_i s + 1)^\eta$ дроби

$$\frac{B_1}{T_i s+1} + \frac{B_2}{(T_i s+1)^2} + \ldots + \frac{B_\eta}{(T_i s+1)^\eta}$$

и множителю $(T_j^2 s^2 + 2\xi T_j s + 1)^\mu$ дроби

$$\frac{C_1 s + \mathscr{D}_1}{T_j^2 s^2 + 2\xi T_j s + 1} + \frac{C_2 s + \mathscr{D}_2}{(T_j^2 s^2 + 2\xi T_j s + 1)^2} + \ldots + \frac{C_\mu s + \mathscr{D}_\mu}{(T_j^2 s^2 + 2\xi T_j s + 1)^\mu},$$

Таблица 4.1

Обратные преобразования Лапласа дробно-рациональных функций

(T, τ, ξ — положительные постоянные)

№ по пор.	Изображение	Оригинал
1	$\frac{1}{Ts+1}$	$\alpha e^{-\alpha t}$, где $\alpha = \frac{1}{T}$
2	$\frac{1}{s(Ts+1)}$	$1 - e^{-\alpha t}$, где $\alpha = \frac{1}{T}$
3	$\frac{\tau s+1}{s(Ts+1)}$	$1 + Ce^{-\alpha t}$, где $\alpha = \frac{1}{T}$; $C = \frac{\tau - T}{T}$
4	$\frac{1}{s^2(Ts+1)}$	$T(e^{-\alpha t} - 1) + t$, где $\alpha = \frac{1}{T}$
5	$\frac{\tau s+1}{s^2(Ts+1)}$	$C(1 - e^{-\alpha t}) + t$, где $\alpha = \frac{1}{T}$; $C = \tau - T$
6	$\frac{\tau_2^2 s^2 + \tau_1 s + 1}{s^2(Ts+1)}$	$C_1 + C_2 e^{-\alpha t} + t$, где $\alpha = \frac{1}{T}$; $C_1 = \tau_1 - T$; $C_2 = \frac{\tau_2^2 - \tau_1 T + T^2}{T}$
7	$\frac{1}{(Ts+1)^2}$	$\alpha^2 t e^{-\alpha t}$, где $\alpha = \frac{1}{T}$
8	$\frac{1}{s(Ts+1)^2}$	$1 - (1 + \alpha t)e^{-\alpha t}$, где $\alpha = \frac{1}{T}$
9	$\frac{1}{s^2(Ts+1)^2}$	$2T(e^{-\alpha t} - 1) + t(1 + e^{-\alpha t})$, где $\alpha = \frac{1}{T}$
10	$\frac{1}{s^3(Ts+1)^2}$	$3T^2(1 - e^{-\alpha t}) - Tt(2 + e^{-\alpha t}) + \frac{t^2}{2}$, где $\alpha = \frac{1}{T}$

№ по пор.	Изображение	Оригинал
11	$\dfrac{s}{(Ts+1)^2}$	$\alpha^2(1-\alpha t)\,e^{-\alpha t}$, где $\alpha=\dfrac{1}{T}$
12	$\dfrac{\tau s+1}{(Ts+1)^2}$	$(C_1+C_2t)\,e^{-\alpha t}$, где $C_1=\dfrac{\tau}{T^2}$; $C_2=\dfrac{T-\tau}{T^3}$; $\alpha=\dfrac{1}{T}$
13	$\dfrac{\tau s+1}{s(Ts+1)^2}$	$1-(1+Ct)\,e^{-\alpha t}$, где $C=\dfrac{T-\tau}{T^2}$; $\alpha=\dfrac{1}{T}$
14	$\dfrac{\tau_2^2s^2+\tau_1s+1}{s(Ts+1)^2}$	$1+(C_1-C_2t)\,e^{-\alpha t}$, где $C_1=\dfrac{\tau_2^2-T^2}{T^2}$; $C_2=\dfrac{\tau_2^2-\tau_1T+T^2}{T^3}$; $\alpha=\dfrac{1}{T}$
15	$\dfrac{1}{(Ts+1)^3}$	$\dfrac{\alpha^3t^2}{2}\,e^{-\alpha t}$, где $\alpha=\dfrac{1}{T}$
16	$\dfrac{1}{s(Ts+1)^3}$	$1-\left(1+\alpha t+\dfrac{\alpha^2t^2}{2}\right)e^{-\alpha t}$, где $\alpha=\dfrac{1}{T}$
17	$\dfrac{1}{s^2(Ts+1)^3}$	$-C+t+\left(C+2t+\dfrac{\alpha t^2}{2}\right)e^{-\alpha t}$, где $\alpha=\dfrac{1}{T}$; $C=3T$
18	$\dfrac{s}{(Ts+1)^3}$	$\alpha^3t\left(1-\dfrac{\alpha t}{2}\right)e^{-\alpha t}$, где $\alpha=\dfrac{1}{T}$
19	$\dfrac{s^2}{(Ts+1)^3}$	$\alpha^3\left(1-2\alpha t+\dfrac{\alpha^2t^2}{2}\right)e^{-\alpha t}$, где $\alpha=\dfrac{1}{T}$

№ по пор.	Изображение	Оригинал
20	$\dfrac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$	$C\left(e^{-\alpha_1 t}-e^{-\alpha_2 t}\right)$, где $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $C=\dfrac{1}{T_1-T_2}$.
21	$\dfrac{s}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$	$C_1e^{-\alpha_1 t}+C_2e^{-\alpha_2 t}$, где $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $C_1=\dfrac{1}{T_1(T_2-T_1)}$; $C_2=\dfrac{1}{T_2(T_1-T_2)}$
22	$\dfrac{\tau s+1}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$	$C_1e^{-\alpha_1 t}+C_2e^{-\alpha_2 t}$, где $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $C_1=\dfrac{T_1-\tau}{T_1(T_1-T_2)}$; $C_2=\dfrac{\tau-T_2}{T_2(T_1-T_2)}$
23	$\dfrac{1}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$	$1+C_1e^{-\alpha_1 t}+C_2e^{-\alpha_2 t}$, где $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $C_1=\dfrac{T_1}{T_2-T_1}$; $C_2=\dfrac{T_2}{T_1-T_2}$
24	$\dfrac{\tau s+1}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$	$1+C_1e^{-\alpha_1 t}+C_2e^{-\alpha_2 t}$, где $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $C_1=\dfrac{\tau-T_1}{T_1-T_2}$; $C_2=\dfrac{T_2-\tau}{T_1-T_2}$
25	$\dfrac{\tau_2^2s^2+\tau_1s+1}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$	$1+C_1e^{-\alpha_1 t}+C_2e^{-\alpha_2 t}$, где $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $C_1=\dfrac{\tau_2^2-\tau_1T_1+T_1^2}{T_1(T_2-T_1)}$; $C_2=\dfrac{\tau_2^2-\tau_1T_2+T_2^2}{T_2(T_1-T_2)}$

№ по пор.	Изображение	Оригинал
26	$\dfrac{1}{s^2(T_1s+1)(T_2s+1)}$	$C+C_1e^{-\alpha_1 t}+C_2e^{-\alpha_2 t}+t$, где $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $C=-(T_1+T_2)$; $C_1=\dfrac{T_1^2}{T_1-T_2}$; $C_2=\dfrac{T_2^2}{T_2-T_1}$
27	$\dfrac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)^2}$	$C_1e^{-\alpha_1 t}+(C_2+C_3t)\,e^{-\alpha_2 t}$, где $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $C_1=\dfrac{T_1}{(T_1-T_2)^2}$; $C_2=-C_1$; $C_3=\dfrac{1}{(T_2-T_1)\,T_2}$
28	$\dfrac{\tau s+1}{(T_1s+1)(T_2s+1)^2}$	$C_1e^{-\alpha_1 t}+(C_2+C_3t)\,e^{-\alpha_2 t}$, где $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $C_1=\dfrac{T_1-\tau}{(T_1-T_2)^2}$; $C_2=-C_1$; $C_3=\dfrac{\tau-T_2}{(T_1-T_2)\,T_2^2}$
29	$\dfrac{\tau_2^2s^2+\tau_1s+1}{s(T_1s+1)(T_2s+1)^2}$	$1+C_1e^{-\alpha_1 t}+(C_2+C_3t)\,e^{-\alpha_2 t}$, где $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $C_1=\dfrac{-\tau_2^2+(\tau_1-T_1)\,T_1}{(T_1-T_2)^2}$; $C_2=\dfrac{\tau_2^2-\tau_1T_1+(2T_1-T_2)\,T_2}{(T_1-T_2)^2}$; $C_3=\dfrac{\tau_2^2+(T_2-\tau_1)\,T_2}{(T_1-T_2)\,T_2^2}$
30	$\dfrac{1}{s(T_1s+1)(T_2s+1)^2}$	$1-C_1e^{-\alpha_1 t}+(C_2+C_3t)\,e^{-\alpha_2 t}$, где $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $C_1=\dfrac{T_1^2}{(T_1-T_2)^2}$; $C_2=\dfrac{2T_1-T_2)\,T_2}{(T_1-T_2)^2}$; $C_3=\dfrac{1}{T_1-T_2}$

№ по пор.	Изображение	Оригинал
31	$\dfrac{s}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)^2}$	$C_1 e^{-\alpha_1 t}+(C_2+C_3 t)\,e^{-\alpha_2 t}$, где $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $C_1=-\dfrac{1}{(T_1-T_2)^2}$; $C_2=-C_1$; $C_3=\dfrac{1}{(T_1-T_2)\,T_2^2}$
32	$\dfrac{s^2}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)^2}$	$C_1 e^{-\alpha_1 t}+(C_2+C_3 t)\,e^{-\alpha_2 t}$, где $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $C_1=\dfrac{1}{(T_1-T_2)^2\,T_1}$; $C_2=\dfrac{T_1-2T_2}{(T_1-T_2)^2 T_2^2}$; $C_3=\dfrac{1}{(T_2-T_1)\,T_2^3}$
33	$\dfrac{1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)^3}$	$C_1 e^{-\alpha_1 t}+(C_2+C_3 t+C_4 t^2)\,e^{-\alpha_2 t}$, где $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $C_1=\dfrac{T_1^2}{(T_1-T_2)^3}$; $C_2=-C_1$; $C_3=\dfrac{-T_1}{(T_1-T_2)^2\,T_2}$; $C_4=\dfrac{-1}{2\,(T_1-T_2)\,T_2^2}$
34	$\dfrac{\tau s+1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)^3}$	$C_1 e^{-\alpha_1 t}+(C_2+C_3 t+C_4 t^2)\,e^{-\alpha_2 t}$, где $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $C_1=\dfrac{(T_1-\tau)\,T_1}{(T_1-T_2)^3}$; $C_2=-C_1$; $C_3=\dfrac{\tau-T_1}{(T_1-T_2)^2 T_2}$; $C_4=\dfrac{\tau-T_2}{2\,(T_1-T_2)\,T_2^3}$

№ по пор.	Изображение	Оригинал
35	$\dfrac{1}{s(T_1s+1)(T_2s+1)^3}$	$1+C_1e^{-\alpha_1 t}+(C_2+C_3t+C_4t^2)e^{-\alpha_2 t}$, где $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $C_1=-\dfrac{T_1^3}{(T_1-T_2)^3}$; $C_2=\dfrac{T_1^3-(T_1-T_2)^3}{(T_1-T_2)^3}$; $C_3=\dfrac{2T_1-T_2}{(T_1-T_2)^2}$; $C_4=\dfrac{1}{2(T_1-T_2)T_2}$
36	$\dfrac{s}{(T_1s+1)(T_2s+1)^3}$	$C_1e^{-\alpha_1 t}+(C_2+C_3t+C_4t^2)e^{-\alpha_2 t}$, где $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $C_1=-\dfrac{T_1}{(T_1-T_2)^3}$; $C_2=-C_1$; $C_3=\dfrac{1}{(T_1-T_2)^2T_2}$; $C_4=\dfrac{1}{2(T_1-T_2)T_2^3}$
37	$\dfrac{s^2}{(T_1s+1)(T_2s+1)^3}$	$C_1e^{-\alpha_1 t}+(C_2+C_3t+C_4t^2)e^{-\alpha_2 t}$, где $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $C_1=\dfrac{1}{(T_1-T_2)^3}$; $C_2=-C_1$; $C_3=\dfrac{T_1-2T_2}{(T_1-T_2)^2T_2^3}$; $C_4=-\dfrac{1}{2(T_1-T_2)T_2^4}$
38	$\dfrac{1}{s(T_1s+1)^2(T_2s+1)^2}$	$1+(C_1+C_3t)e^{-\alpha_1 t}+(C_2+C_4t)e^{-\alpha_2 t}$, где $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $C_1=\dfrac{(3T_2-T_1)T_1^2}{(T_1-T_2)^3}$; $C_2=\dfrac{(T_2-3T_1)T_2^2}{(T_1-T_2)^3}$; $C_3=-\dfrac{T_1}{(T_1-T_2)^2}$; $C_4=-\dfrac{T_2}{(T_1-T_2)^2}$

№ по пор.	Изображение	Оригинал
39	$\dfrac{1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)(T_3 s+1)}$	$C_1 e^{-\alpha_1 t}+C_2 e^{-\alpha_2 t}+C_3 e^{-\alpha_3 t}$, где $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $\alpha_3=\dfrac{1}{T_3}$; $C_1=\dfrac{T_1}{(T_1-T_2)(T_1-T_3)}$; $C_2=\dfrac{T_2}{(T_2-T_1)(T_2-T_3)}$; $C_3=\dfrac{T_3}{(T_3-T_1)(T_3-T_2)}$
40	$\dfrac{\tau s+1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)(T_3 s+1)}$	$C_1 e^{-\alpha_1 t}+C_2 e^{-\alpha_2 t}+C_3 e^{-\alpha_3 t}$, где $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $\alpha_3=\dfrac{1}{T_3}$; $C_1=\dfrac{T_1-\tau}{(T_1-T_2)(T_1-T_3)}$; $C_2=\dfrac{T_2-\tau}{(T_2-T_1)(T_2-T_3)}$; $C_3=\dfrac{T_3-\tau}{(T_3-T_1)(T_3-T_2)}$
41	$\dfrac{\tau_2^2 s^2+\tau_1 s+1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)(T_3 s+1)}$	$C_1 e^{-\alpha_1 t}+C_2 e^{-\alpha_2 t}+C_3 e^{-\alpha_3 t}$, где $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $\alpha_3=\dfrac{1}{T_3}$; $C_1=\dfrac{\tau_2^2-\tau_1 T_1-T_1^2}{(T_1-T_2)(T_1-T_3)T_1}$; $C_2=\dfrac{\tau_2^2-\tau_1 T_2-T_2^2}{(T_2-T_1)(T_2-T_3)T_2}$; $C_3=\dfrac{\tau_2^2-\tau_1 T_3-T_3^2}{(T_3-T_1)(T_3-T_2)T_3}$

№ по пор.	Изображение	Оригинал
42	$\dfrac{1}{s(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}$	$1+C_1e^{-\alpha_1 t}+C_2e^{-\alpha_2 t}+C_3e^{-\alpha_3 t}$, где $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $\alpha_3=\dfrac{1}{T_3}$; $C_1=\dfrac{T_1^2}{(T_2-T_1)(T_1-T_3)}$; $C_2=\dfrac{T_2^2}{(T_1-T_2)(T_2-T_3)}$; $C_3=\dfrac{T_3^2}{(T_1-T_3)(T_3-T_2)}$
43	$\dfrac{\tau s+1}{s(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}$	$1+C_1e^{-\alpha_1 t}+C_2e^{-\alpha_2 t}+C_3e^{-\alpha_3 t}$, где $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $\alpha_3=\dfrac{1}{T_3}$; $C_1=\dfrac{(\tau-T_1)T_1}{(T_1-T_2)(T_1-T_3)}$; $C_2=\dfrac{(\tau-T_2)T_2}{(T_2-T_1)(T_2-T_3)}$; $C_3=\dfrac{(\tau-T_3)T_3}{(T_3-T_1)(T_3-T_2)}$
44	$\dfrac{s}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}$	$C_1e^{-\alpha_1 t}+C_2e^{-\alpha_2 t}+C_3e^{-\alpha_3 t}$, где $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $\alpha_3=\dfrac{1}{T_3}$; $C_1=\dfrac{1}{(T_2-T_1)(T_1-T_3)}$; $C_2=\dfrac{1}{(T_1-T_2)(T_2-T_3)}$; $C_3=\dfrac{1}{(T_1-T_3)(T_3-T_2)}$

№ по пор.	Изображение	Оригинал
45	$\dfrac{s^2}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)(T_3 s+1)}$	$C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t} + C_3 e^{-\alpha_3 t}$, где $\alpha_1 = \dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2 = \dfrac{1}{T_2}$; $\alpha_3 = \dfrac{1}{T_3}$; $C_1 = \dfrac{1}{(T_1 - T_2)(T_1 - T_3) T_1}$; $C_2 = \dfrac{1}{(T_2 - T_1)(T_2 - T_3) T_2}$; $C_3 = \dfrac{1}{(T_3 - T_1)(T_3 - T_2) T_3}$
46	$\dfrac{1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)(T_3 s+1)^2}$	$C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t} + (C_3 + C_4 t)\, e^{-\alpha_3 t}$, где $\alpha_1 = \dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2 = \dfrac{1}{T_2}$; $\alpha_3 = \dfrac{1}{T_3}$; $C_1 = \dfrac{T_1^2}{(T_1 - T_2)(T_1 - T_3)^2}$; $C_2 = -\dfrac{T_2^2}{(T_1 - T_2)(T_2 - T_3)^2}$; $C_3 = \dfrac{T_3(2T_1T_2 - T_1T_3 - T_2T_3)}{(T_1 - T_3)^2 (T_2 - T_3)^2}$; $C_4 = \dfrac{1}{(T_1 - T_3)(T_2 - T_3)}$
47	$\dfrac{\tau s+1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)(T_3 s+1)^2}$	$C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t} + (C_3 + C_4 t)\, e^{-\alpha_3 t}$, где $\alpha_1 = \dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2 = \dfrac{1}{T_2}$; $\alpha_3 = \dfrac{1}{T_3}$; $C_1 = \dfrac{T_1(T_1 - \tau)}{(T_1 - T_2)(T_1 - T_3)^2}$; $C_2 = \dfrac{T_2(\tau - T_2)}{(T_1 - T_2)(T_2 - T_3)^2}$; $C_3 = \dfrac{\tau [T_3^2 - T_1T_2) + T_3 [2T_1T_2 - (T_1 + T_2) T_3]}{(T_1 - T_3)^2 (T_2 - T_3)^2}$; $C_4 = \dfrac{T_3 - \tau}{T_3 (T_1 - T_3)(T_2 - T_3)}$

№ по пор.	Изображение	Оригинал
48	$\dfrac{1}{s(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)^2}$	$1+C_1e^{-\alpha_1 t}+C_2e^{-\alpha_2 t}+$ $+(C_3+C_4t)\,e^{-\alpha_3 t}$, где $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $\alpha_3=\dfrac{1}{T_3}$; $C_1=-\dfrac{T_1^3}{(T_1-T_2)(T_1-T_3)^2}$; $C_2=\dfrac{T_2^3}{(T_1-T_2)(T_2-T_3)^2}$; $C_3=\dfrac{T_3^2(-3T_1T_2+2T_1T_3+2T_2T_3-T_3^2)}{(T_1-T_3)^2(T_2-T_3)^2}$; $C_4=\dfrac{\tau-T_3}{(T_1-T_3)(T_2-T_3)}$;
49	$\dfrac{s}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)^2}$	$C_1e^{-\alpha_1 t}+C_2e^{-\alpha_2 t}+$ $+(C_3+C_4t)\,e^{-\alpha_3 t}$, где $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $\alpha_3=\dfrac{1}{T_3}$; $C_1=-\dfrac{T_1}{(T_1-T_2)(T_1-T_3)^2}$; $C_2=\dfrac{T_2}{(T_1-T_2)(T_2-T_3)^2}$; $C_3=\dfrac{-T_1T_2+T_3^2}{(T_1-T_3)^2(T_2-T_3)^2}$; $C_4=-\dfrac{1}{T_3(T_1-T_3)(T_2-T_3)}$

№ по пор.	Изображение	Оригинал
50	$\dfrac{1}{s(T_1s+1)(T_2s+1)\times(T_3s+1)(T_4s+1)}$	$1+C_1e^{-\alpha_1 t}+C_2e^{-\alpha_2 t}+$ $+C_3e^{-\alpha_3 t}+C_4e^{-\alpha_4 t}$, где $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $C_1=-\dfrac{T_1^3}{(T_1-T_2)(T_1-T_3)(T_1-T_4)}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $C_2=-\dfrac{T_2^3}{(T_2-T_1)(T_2-T_3)(T_2-T_4)}$; $\alpha_3=\dfrac{1}{T_3}$; $C_3=-\dfrac{T_3^3}{(T_3-T_1)(T_3-T_2)(T_3-T_4)}$; $\alpha_4=\dfrac{1}{T_4}$; $C_4=-\dfrac{T_4^3}{(T_4-T_1)(T_4-T_2)(T_4-T_3)}$
51	$\dfrac{\tau s+1}{s(T_1s+1)(T_2s+1)\times(T_3s+1)(T_4s+1)}$	$1+C_1e^{-\alpha_1 t}+C_2e^{-\alpha_2 t}+$ $+C_3e^{-\alpha_3 t}+C_4e^{-\alpha_4 t}$, где $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $C_1=\dfrac{T_1^2(\tau-T_1)}{(T_1-T_2)(T_1-T_3)(T_1-T_4)}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $C_2=\dfrac{T_2^2(\tau-T_2)}{(T_2-T_1)(T_2-T_3)(T_2-T_4)}$; $\alpha_3=\dfrac{1}{T_3}$; $C_3=\dfrac{T_3^2(\tau-T_3)}{(T_3-T_1)(T_3-T_2)(T_3-T_4)}$; $\alpha_4=\dfrac{1}{T_4}$; $C_4=\dfrac{T_4^2(\tau-T_4)}{(T_4-T_1)(T_4-T_2)(T_4-T_3)}$

№ по пор.	Изображение	Оригинал
52	$\frac{1}{T^2s^2+2\xi Ts+1}$, где $0<\xi<1$	$Ce^{-\gamma t}\sin\lambda t$, где $\gamma=\frac{\xi}{T}$; $\lambda=\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$; $C=\frac{1}{\lambda T^2}$
53	$\frac{\tau s+1}{T^2s^2+2\xi Ts+1}$, где $0<\xi<1$	$Ce^{-\gamma t}\sin(\lambda t+\theta)$, где $\gamma=\frac{\xi}{T}$; $\lambda=\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$; $C=\frac{\sqrt{(1-2\gamma\tau)T^2+\tau^2}}{\lambda T^3}$; $\theta=\mathrm{arctg}\frac{\tau\lambda}{1-\gamma\tau}$
54	$\frac{1}{s(T^2s^2+2\xi Ts+1)}$, где $0<\xi<1$	$1+Ce^{-\lambda t}\sin(\lambda t+\theta)$, где $\gamma=\frac{\xi}{T}$; $\lambda=\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$; $C=-\frac{1}{\lambda T}$; $\theta=\mathrm{arctg}\frac{\lambda}{\gamma}$
55	$\frac{\tau s+1}{s(T^2s^2+2\xi Ts+1)}$, где $0<\xi 1<1$	$1+Ce^{-\gamma t}\sin(\lambda t-\theta)$, где $\gamma=\frac{\xi}{T}$; $\lambda=\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$; $C=\frac{\sqrt{\tau^2+(1-2\gamma\tau)T^2}}{\lambda T^2}$; $\theta=\mathrm{arctg}\frac{\lambda T^2}{\tau-\gamma T^2}$
56	$\frac{1}{s^2(T^2s^2+2\xi Ts+1)}$, где $0<\xi<1$	$C+C_1e^{-\gamma t}\sin(\lambda t+\theta)+t$, где $\gamma=\frac{\xi}{T}$; $\lambda=\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$; $C=-2\gamma T^2$; $C_1=\frac{1}{\lambda}$; $\theta=\mathrm{arctg}\frac{2\gamma\lambda}{\gamma^2-\lambda^2}$

№ по пор.	Изображение	Оригинал
57	$\frac{s}{T^2s^2+2\xi Ts+1}$, где $0<\xi<1$	$Ce^{-\gamma t}\sin(\lambda t-\theta)$, где $\gamma=\frac{\xi}{T}$; $\lambda=\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$; $C=-\frac{1}{\lambda T^3}$; $\theta=\operatorname{arctg}\frac{\lambda}{\gamma}$
58	$\frac{\tau^2s^2+1}{s(T^2s^2+2\xi Ts+1)}$, где $0<\xi<1$	$1+Ce^{-\gamma t}\sin(\lambda t-\theta)$, где $\gamma=\frac{\xi}{T}$; $\lambda=\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$; $C=-\frac{\sqrt{\gamma^2(\tau^2+T^2)^2+\lambda^2(\tau^2-T^2)^2}}{\lambda T^2}$; $\theta=\operatorname{arctg}\frac{\lambda(\tau^2-T^2)}{\gamma(\tau^2+T^2)}$
59	$\frac{1}{(T_1^2s^2+2\xi T_1s+1)(T_2s+1)}$, где $0<\xi<1$	$C_1e^{-\gamma t}\sin(\lambda t+\theta)+C_2e^{-\alpha t}$, где $\gamma=\frac{\xi}{T_1}$; $\lambda=\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_1}$; $\alpha=\frac{1}{T_2}$; $C_1=\frac{1}{\lambda T_1\sqrt{T_1^2(1-2\gamma T_2)+T_2^2}}$; $C_2=\frac{T_2}{T_1^2(1-2\gamma T_2)+T_2^2}$; $\theta=-\operatorname{arctg}\frac{\lambda T_2}{1-\gamma T_2}$
60	$\frac{\tau s+1}{(T_1^2s^2+2\xi T_1s+1)\times(T_2s+1)}$, где $0<\xi<1$	$C_1e^{-\gamma t}\sin(\lambda t+\theta)+C_2e^{-\alpha t}$, где $\gamma=\frac{\xi}{T_1}$; $\lambda=\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_1}$; $\alpha=\frac{1}{T_2}$; $C_1=\frac{1}{\lambda T_1^2}\sqrt{\frac{\tau^2+T_1^2(1-2\gamma\tau)}{T_1^2(1-2\gamma T_2)+T_2^2}}$; $C_2=\frac{T_2-\tau}{T_1^2(1-2\gamma T_2)+T_2^2}$; $\theta=-\operatorname{arctg}\frac{\lambda T_2}{1-\gamma T_2}+\operatorname{arctg}\frac{\lambda\tau}{1-\gamma\tau}$

№ по пор.	Изображение	Оригинал
61	$\dfrac{1}{s(T_1^2s^2+2\xi T_1 s+1)\times(T_2s+1)}$, где $0<\xi<1$	$1+C_1e^{-\gamma t}\sin(\lambda t+\theta)+C_2e^{-\alpha t}$, где $\gamma=\dfrac{\xi}{T_1}$; $\lambda=\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_1}$; $\alpha=\dfrac{1}{T_2}$; $C_1=-\dfrac{1}{\lambda\sqrt{T_1^2(1-2\gamma T_2)+T_2^2}}$; $C_2=-\dfrac{T_2^2}{T_1^2(1-2\gamma T_2)+T_2^2}$; $\theta=-\operatorname{arctg}\dfrac{\lambda T_2}{1-\gamma T_2}+\operatorname{arctg}\dfrac{\lambda}{\gamma}$
62	$\dfrac{\tau s+1}{s(T_1^2s^2+2\xi T_1 s+1)\times(T_2s+1)}$, где $0<\xi<1$	$1+C_1e^{-\gamma t}\sin(\lambda t+\theta)+C_2e^{-\alpha t}$, где $\gamma=\dfrac{\xi}{T_1}$; $\lambda=\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_1}$; $\alpha=\dfrac{1}{T_2}$; $C_1=-\dfrac{1}{\lambda T_1}\sqrt{\dfrac{T_1^2(1-2\gamma\tau)+\tau^2}{T_1^2(1-2\gamma T_2)+T_2^2}}$; $C_2=\dfrac{T_2(\tau-T_2)}{T_1^2(1-2\gamma T_2)+T_2^2}$; $\theta=-\operatorname{arctg}\dfrac{\lambda T_2}{1-\gamma T_2}+\operatorname{arctg}\dfrac{\lambda T_1^2}{\gamma T_1^2-\tau}$
63	$\dfrac{s}{(T_1^2s^2+2\xi T_1 s+1)\times(T_2s+1)}$, где $0<\xi<1$	$C_1e^{-\gamma t}\sin(\lambda t+\theta)+C_2e^{-\alpha t}$, где $\gamma=\dfrac{\xi}{T_1}$; $\lambda=\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_1}$; $\alpha=\dfrac{1}{T_2}$; $C_1=-\dfrac{1}{\lambda T_1^2\sqrt{T_1^2(1-2\gamma T_2)+T_2^2}}$; $C_2=-\dfrac{1}{T_1^2(1-2\gamma T_2)+T_2^2}$; $\theta=-\operatorname{arctg}\dfrac{\lambda T_2}{1-\gamma T_2}-\operatorname{arctg}\dfrac{\lambda}{\gamma}$

№ по пор.	Изображение	Оригинал
64	$\dfrac{s^2}{(T_1^2 s^2 + 2\xi T_1 s + 1) \times (T_2 s + 1)}$, где $0 < \xi < 1$	$C_1 e^{-\gamma t} \sin(\lambda t + \theta) + C_2 e^{-\alpha t}$, где $\gamma = \dfrac{\xi}{T_1}$; $\lambda = \dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_1}$; $\alpha = \dfrac{1}{T_2}$; $C_1 = \dfrac{1}{\lambda T_1^3 \sqrt{T_1^2(1-2\gamma T_2) + T_2^2}}$; $C_2 = \dfrac{1}{T_2 [T_1^2(1-2\gamma T_2) + T_2^2]}$; $\theta = -\operatorname{arctg}\dfrac{\lambda T_2}{1-\gamma T_2} - 2\operatorname{arctg}\dfrac{\lambda}{\gamma}$
65	$\dfrac{1}{(T_1^2 s^2 + 2\xi T_1 s + 1) \times (T_2 s + 1)^2}$, где $0 < \xi < 1$	$C_1 e^{-\gamma t} \sin(\lambda t - \theta) + (C_2 + C_3 t) e^{-\alpha t}$, где $\gamma = \dfrac{\xi}{T_1}$; $\lambda = \dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_1}$; $\alpha = \dfrac{1}{T_2}$; $C_1 = \dfrac{1}{\lambda R}$; $\theta = 2\operatorname{arctg}\dfrac{\lambda T_2}{1-\gamma T_2}$; $C_2 = \dfrac{1}{R^2}[2T_1^2 T_2(1-\gamma T_2)]$; $C_3 = \dfrac{1}{R}$; $R = T_1^2(1-2\gamma T_2) + T_2^2$
66	$\dfrac{1}{s(T_1^2 s^2 + 2\xi T_1 s + 1) \times (T_2 s + 1)^2}$, где $0 < \xi < 1$	$1 + C_1 e^{-\gamma t} \sin(\lambda t - \theta) + (C_2 + C_3 t) e^{-\alpha t}$, где $\gamma = \dfrac{\xi}{T_1}$; $\lambda = \dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_1}$; $\alpha = \dfrac{1}{T_2}$; $C_1 = -\dfrac{T_1}{\lambda R}$; $C_2 = \dfrac{T_2^2(4\gamma T_1^2 T_2 - 3T_1^2 - T_2^2)}{R^2}$; $C_3 = -\dfrac{T_2}{R}$; $\theta = 2\operatorname{arctg}\dfrac{\lambda T_2}{1-\lambda T_2} - \operatorname{arctg}\dfrac{\lambda}{\gamma}$; $R = T_1^2(1-2\gamma T_2) + T_2^2$

№ по пор.	Изображение	Оригинал
67	$\dfrac{s}{(T_1^2s^2+2\xi T_1s+1)\times(T_2s+1)^2}$, где $0<\xi<1$	$C_1e^{-\gamma t}\sin(\lambda t-\theta)+(C_2+C_3t)e^{-\alpha t}$, где $\gamma=\dfrac{\xi}{T_1}$; $\lambda=\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_1}$; $\alpha=\dfrac{1}{T_2}$; $C_1=-\dfrac{1}{\lambda T_1R}$; $C_2=\dfrac{T_2^2-T_1^2}{R^2}$; $C_3=-\dfrac{1}{T_2R}$; $R=T_1^2(1-2\gamma T_2)+T_2^2$; $\theta=2\operatorname{arctg}\dfrac{\lambda T_2}{1-\gamma T_2}+\operatorname{arctg}\dfrac{\lambda}{\gamma}$
68	$\dfrac{s^2}{(T_1^2s^2+2\xi T_1s+1)\times(T_2s+1)^2}$, где $0<\xi<1$	$C_1e^{-\gamma t}\sin(\lambda t-\theta)+(C_2+C_3t)e^{-\alpha t}$, где $\gamma=\dfrac{\xi}{T_1}$; $\lambda=\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_1}$; $\alpha=\dfrac{1}{T_2}$; $C_1=\dfrac{1}{\lambda T_1^2R}$; $C_2=\dfrac{2(\gamma T_1^2-T_2)}{R^2}$; $C_3=\dfrac{1}{T_2^2R}$; $R=T_1^2(1-2\gamma T_2)+T_2^2$; $\theta=2\operatorname{arctg}\dfrac{\lambda T_2}{1-\gamma T_2}+2\operatorname{arctg}\dfrac{\lambda}{\gamma}$
69	$\dfrac{1}{(T_1^2s^2+2\xi T_1s+1)\times(T_2s+1)(T_3s+1)}$, где $0<\xi<1$	$C_1e^{-\gamma t}\sin(\lambda t+\theta)+C_2e^{-\alpha_2t}+C_3e^{-\alpha_3t}$, где $\gamma=\dfrac{\xi}{T_1}$; $\lambda=\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $\alpha_3=\dfrac{1}{T_3}$; $C_1=-\dfrac{1}{\lambda\sqrt{R_2R_3}}$; $C_2=\dfrac{T_2^2}{(T_2-T_3)R_2}$; $C_3=\dfrac{T_3^2}{(T_3-T_2)R_3}$; $R_2=T_1^2(1-2\gamma T_2)+T_2^2$; $R_3=T_1^2(1-2\gamma T_3)+T_3^2$; $\theta=\operatorname{arctg}\dfrac{\lambda(T_1^2-T_2T_3)}{(T_2+T_3)-\gamma(T_1^2+T_2T_3)}+\operatorname{arctg}\dfrac{\lambda}{\gamma}$

№ по пор.	Изображение	Оригинал
70	$\dfrac{\tau s+1}{(T_1^2s^2+2\xi T_1 s+1)\times(T_2s+1)(T_3s+1)}$, где $0<\xi<1$	$C_1 e^{-\gamma t}\sin(\lambda t+\theta)+C_2e^{-\alpha_2 t}+C_3e^{-\alpha_3 t}$, где $\gamma=\dfrac{\xi}{T_1}$; $\lambda=\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $\alpha_3=\dfrac{1}{T_3}$; $C_1=-\dfrac{1}{\lambda T_1}\sqrt{\dfrac{\tau^2-2\gamma\tau T_1^2+T_1^2}{R_2R_3}}$; $C_2=\dfrac{T_2(T_2-\tau)}{(T_2-T_3)R_2}$; $C_3=\dfrac{T_3(T_3-\tau)}{(T_3-T_2)R_3}$; $R_2=T_1^2(1-2\gamma T_2)+T_2^2$; $R_3=T_1^2(1-2\gamma T_3)+T_3^2$; $\theta=\operatorname{arctg}\dfrac{\lambda(T_1^2-T_2T_3)}{(T_2+T_3)-\gamma(T_1^2+T_2T_3)}+\operatorname{arctg}\dfrac{\lambda T_1^2}{\gamma T_1^2-\tau}$
71	$\dfrac{1}{s(T_1^2s^2+2\xi T_1 s+1)\times(T_2s+1)(T_3s+1)}$, где $0<\xi<1$	$1+C_1e^{-\gamma t}\sin(\lambda t+\theta)+C_2e^{-\alpha_2 t}+C_3e^{-\alpha_3 t}$, где $\gamma=\dfrac{\xi}{T_1}$; $\lambda=\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $\alpha_3=\dfrac{1}{T_3}$; $C_1=\dfrac{T_1}{\lambda\sqrt{R_2R_3}}$; $C_2=\dfrac{T_2^3}{(T_3-T_2)R_2}$; $C_3=\dfrac{T_3^3}{(T_2-T_3)R_3}$; $R_2=T_1^2(1-2\gamma T_2)+T_2^2$; $R_3=T_1^2(1-2\gamma T_3)+T_3^2$; $\theta=\operatorname{arctg}\dfrac{\lambda(T_1^2-T_2T_3)}{(T_2+T_3)-\gamma(T_1^2+T_2T_3)}+2\operatorname{arctg}\dfrac{\lambda}{\gamma}$

№ по пор.	Изображение	Оригинал
72	$\dfrac{s}{(T_1^2 s^2 + 2\xi T_1 s + 1) \times (T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}$, где $0 < \xi < 1$	$C_1 e^{-\gamma t} \sin(\lambda t + \theta) + C_2 e^{-\alpha_2 t} + C_3 e^{-\alpha_3 t}$, где $\gamma = \dfrac{\xi}{T_1}$; $\lambda = \dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_1}$; $\alpha_2 = \dfrac{1}{T_2}$; $\alpha_3 = \dfrac{1}{T_3}$; $C_1 = \dfrac{1}{\lambda T_1 \sqrt{R_2 R_3}}$; $C_2 = \dfrac{T_2}{(T_3 - T_2) R_2}$; $C_3 = \dfrac{T_3}{(T_2 - T_3) R_3}$; $R_2 = T_1^2(1 - 2\gamma T_2) + T_2^2$; $R_3 = T_1^2(1 - 2\gamma T_3) + T_3^2$; $\theta = \operatorname{arctg} \dfrac{\lambda (T_1^2 - T_2 T_3)}{(T_2 + T_3) - \gamma (T_1^2 + T_2 T_3)}$
73	$\dfrac{s^2}{(T_1^2 s^2 + 2\xi T_1 s + 1) \times (T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}$, где $0 < \xi < 1$	$C_1 e^{-\gamma t} \sin(\lambda t + \theta) + C_2 e^{-\alpha_2 t} + C_3 e^{-\alpha_3 t}$, где $\gamma = \dfrac{\xi}{T_1}$; $\lambda = \dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_1}$; $\alpha_2 = \dfrac{1}{T_2}$; $\alpha_3 = \dfrac{1}{T_3}$; $C_1 = -\dfrac{1}{\lambda T_1^2 \sqrt{R_2 R_3}}$; $C_2 = \dfrac{1}{(T_2 - T_3) R_2}$; $C_3 = \dfrac{1}{(T_3 - T_2) R_3}$; $R_2 = T_1^2(1 - 2\gamma T_2) + T_2^2$; $R_3 = T_1^2(1 - 2\gamma T_3) + T_3^2$; $\theta = \operatorname{arctg} \dfrac{\lambda (T_1^2 - T_2 T_3)}{(T_2 + T_3) - \gamma (T_1^2 + T_2 T_3)} - \operatorname{arctg} \dfrac{\lambda}{\gamma}$

№ по пор.	Изображение	Оригинал
74	$\dfrac{s^3}{(T_1^2s^2+2\xi T_1s+1)\times(T_2s+1)(T_3s+1)}$, где $0<\xi<1$	$C_1e^{-\gamma t}\sin(\lambda t+\theta)+C_2e^{-\alpha_2 t}+C_3e^{-\alpha_3 t}$, где $\gamma=\dfrac{\xi}{T_1}$; $\lambda=\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $\alpha_3=\dfrac{1}{T_3}$; $C_1=\dfrac{1}{\lambda T_1^3\sqrt{R_2R_3}}$; $C_2=\dfrac{1}{T_2(T_3-T_2)R_2}$; $C_3=\dfrac{1}{T_3(T_2-T_3)R_3}$; $R_2=T_1^2(1-2\gamma T_2)+T_2^2$; $R_3=T_1^2(1-2\gamma T_3)+T_3^2$; $\theta=\operatorname{arctg}\dfrac{\lambda(T_1^2-T_2T_3)}{(T_2+T_3)-\gamma(T_1^2+T_2T_3)}-2\operatorname{arctg}\dfrac{\lambda}{\gamma}$
75	$\dfrac{1}{(T^2s^2+2\xi Ts+1)^2}$, где $0<\xi<1$	$Ce^{-\gamma t}(\sin\lambda t-\lambda t\cos\lambda t)$, где $\gamma=\dfrac{\xi}{T}$; $\lambda=\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$; $C=\dfrac{1}{2\lambda^3T^4}$
76	$\dfrac{\tau s+1}{(T^2s^2+2\xi Ts+1)^2}$, где $0<\xi<1$	$e^{-\gamma t}[C\sin\lambda t+C_1t\cos(\lambda t-\theta_1)]$, где $\gamma=\dfrac{\xi}{T}$; $\lambda=\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$; $C=-\dfrac{1+\gamma\tau}{2\lambda^3T^4}$; $C_1=\dfrac{\sqrt{\tau^2+2\gamma\tau T^2+T^2}}{2\lambda^2T^5}$; $\theta_1=\operatorname{arctg}\dfrac{\lambda\tau}{\gamma\tau+1}$

№ по пор.	Изображение	Оригинал
77	$\dfrac{\tau_2^2 s^2 + \tau_1 s + 1}{(T^2 s^2 + 2\xi T s + 1)^2}$, где $0 < \xi < 1$	$e^{-\gamma t}[C \sin \lambda t + C_1 t \cos(\lambda t + \theta_1)]$, где $\gamma = \dfrac{\xi}{T}$; $\lambda = \dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$; $C = \dfrac{\tau_2^2 - T^2(\gamma\tau_1 - 1)}{2\lambda^3 T^6}$; $C_1 = \dfrac{\sqrt{\lambda^2(\tau_2^2 - T^2)^2 + [\tau_1 - \gamma(\tau_2^2 + T^2)]^2}}{2\lambda^2 T^5}$; $\theta_1 = \operatorname{arctg} \dfrac{\lambda(\tau_2^2 - T^2)}{\tau_1 - \gamma(\tau_2^2 + T^2)} - \operatorname{arctg} \dfrac{\lambda}{\gamma}$
78	$\dfrac{1}{s(T^2 s^2 + 2\xi T s + 1)^2}$, где $0 < \xi < 1$	$1 + Ce^{-\gamma t}[\lambda T \cos(\lambda t + 2\theta) - \sin(\lambda t + \theta) + \lambda t \cos(\lambda t + \theta)]$, где $\gamma = \dfrac{\xi}{T}$; $\lambda = \dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$; $C = \dfrac{1}{2\lambda^3 T^3}$; $\theta = \operatorname{arctg} \dfrac{\lambda}{\gamma}$
79	$\dfrac{\tau s + 1}{s(T^2 s^2 + 2\xi T s + 1)^2}$, где $0 < \xi < 1$	$1 + e^{-\gamma t}\{C \cos(\lambda t + \theta) + C_1[\sin(\lambda t - \theta_1) - \lambda t \cos(\lambda t - \theta_1)]\}$, где $\gamma = \dfrac{\xi}{T}$; $\lambda = \dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$; $C = \dfrac{1}{2\lambda^2 T^2}$; $C_1 = \dfrac{\sqrt{\tau^2 - 2\gamma\tau T^2 + T^2}}{2\lambda^3 T^4}$; $\theta = 2 \operatorname{arctg} \dfrac{\lambda}{\gamma}$; $\theta_1 = \operatorname{arctg} \dfrac{\lambda T^2}{\tau - \gamma T^2}$

№ по пор.	Изображение	Оригинал
80	$\dfrac{\tau_2^2 s^2 + \tau_1 s + 1}{s\,(T^2 s^2 + 2\xi T s + 1)^2}$, где $0 < \xi < 1$	$1 + e^{-\gamma t}\,[\cos(\lambda t + \theta) + C_1 \sin(\lambda t - \theta_1) + C_2 t \cos(\lambda t - \theta_2)]$, где $\gamma = \dfrac{\xi}{T}$; $\lambda = \dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$; $C = \dfrac{1}{2\lambda^2 T^2}$; $\theta = 2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{\lambda}{\gamma}$; $C_1 = \dfrac{\sqrt{\lambda^2 T^4 + [\tau_1 - \gamma(\tau_2^2 + T^2)]^2}}{2\lambda^3 T^4}$; $C_2 = \dfrac{\sqrt{\lambda^2(\tau_2^2 - T^2)^2 + [\gamma(\tau_2^2 + T^2) - \tau_1]^2}}{2\lambda^2 T^4}$; $\theta_1 = \mathrm{arctg}\,\dfrac{\lambda T^2}{\tau_1 - \gamma(\tau_2^2 + T^2)}$; $\theta_2 = \mathrm{arctg}\,\dfrac{\lambda(\tau_2^2 - T^2)}{\gamma(\tau_2^2 + T^2) - \tau_1}$
81	$\dfrac{s}{(T^2 s^2 + 2\xi T s + 1)^2}$, где $0 < \xi < 1$	$Ce^{-\gamma t}\,[-\gamma T \sin \lambda t + \lambda t \cos(\lambda t - \theta)]$, где $\gamma = \dfrac{\xi}{T}$; $\lambda = \dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$; $C = \dfrac{1}{2\lambda^3 T^5}$; $\theta = \mathrm{arctg}\,\dfrac{\lambda}{\gamma}$
82	$\dfrac{s^2}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1)^2}$, где $0 < \xi < 1$	$Ce^{-\gamma t}\,[\sin \lambda t - \lambda t \cos(\lambda t - 2\theta)]$, где $\gamma = \dfrac{\xi}{T}$; $\lambda = \dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$; $C = \dfrac{1}{2\lambda^3 T^6}$; $\theta = \mathrm{arctg}\,\dfrac{\lambda}{\gamma}$
83	$\dfrac{s^3}{(T^2 s^2 + 2\xi T s + 1)^2}$, где $0 < \xi < 1$	$Ce^{-\gamma t}\,[\lambda T \cos(\lambda t - 2\theta) + \sin(\lambda t - \theta) - \lambda t \cos(\lambda t - 3\theta)]$, где $\gamma = \dfrac{\xi}{T}$; $\lambda = \dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$; $C = -\dfrac{1}{2\lambda^3 T^7}$; $\theta = \mathrm{arctg}\,\dfrac{\lambda}{\gamma}$

№ по пор.	Изображение	Оригинал
84	$\dfrac{1}{(T_1^2s^2+2\xi_1T_1s+1)\times \times (T_2^2s^2+2\xi_2T_2s+1)}$, где $0<\xi_1<1$; $0<\xi_2<1$	$C_1e^{-\gamma_1 t}\sin(\lambda_1 t+\theta_1)+ + C_2e^{-\gamma_2 t}\sin(\lambda_2 t+\theta_2)$, где $\gamma_1=\dfrac{\xi_1}{T_1}$; $\lambda_1=\dfrac{\sqrt{1-\xi_1^2}}{T_1}$; $\gamma_2=\dfrac{\xi_2}{T_2}$; $\lambda_2=\dfrac{\sqrt{1-\xi_2^2}}{T_2}$; $C_1=-\dfrac{1}{\lambda_1\sqrt{R}}$; $C_2=-\dfrac{1}{\lambda_2\sqrt{R}}$; $R=(T_1^2-T_2^2)^2+4(\gamma_1-\gamma_2)\times \times(\gamma_1T_1^2-\gamma_2T_2^2)T_1^2T_2^2$; $\theta_1=\operatorname{arctg}\dfrac{\lambda_1(T_1^2-T_2^2)}{2\gamma_2T_2^2-\gamma_1(T_1^2+T_2^2)}+ + \operatorname{arctg}\dfrac{\lambda_1}{\gamma_1}$; $\theta_2=\operatorname{arctg}\dfrac{\lambda_2(T_2^2-T_1^2)}{2\gamma_1T_1^2-\gamma_2(T_1^2+T_2^2)}+ + \operatorname{arctg}\dfrac{\lambda_2}{\gamma_2}$
85	$\dfrac{\tau s+1}{(T_1^2s^2+2\xi_1T_1s+1)\times \times (T_2^2s^2+2\xi_2T_2s+1)}$, где $0<\xi_1<1$; $0<\xi_2<1$	$C_1e^{-\gamma_1 t}\sin(\lambda_1 t+\theta_1)+ + C_2e^{-\gamma_2 t}\sin(\lambda_2 t+\theta_2)$, где $\gamma_1=\dfrac{\xi_1}{T_1}$; $\lambda_1=\dfrac{\sqrt{1-\xi_1^2}}{T_1}$; $\gamma_2=\dfrac{\xi_2}{T_2}$; $\lambda_2=\dfrac{\sqrt{1-\xi_2^2}}{T_2}$; $C_1=\dfrac{1}{\lambda_1T_1}\sqrt{\dfrac{\tau^2+T_1^2(1-2\gamma_1\tau)}{R}}$; $C_2=\dfrac{1}{\lambda_2T_2}\sqrt{\dfrac{\tau^2+T_2^2(1-2\gamma_2\tau)}{R}}$; $R=(T_1^2-T_2^2)^2+4(\gamma_1-\gamma_2)\times \times(\gamma_1T_1^2-\gamma_2T_2^2)T_1^2T_2^2$; $\theta_1=\operatorname{arctg}\dfrac{\lambda_1(T_1^2-T_2^2)}{2\gamma_2T_2^2-\gamma_1(T_1^2+T_2^2)}- - \operatorname{arctg}\dfrac{\lambda_1T_1^2}{\tau-\gamma_1T_1^2}$; $\theta_2=\operatorname{arctg}\dfrac{\lambda_2(T_2^2-T_1^2)}{2\gamma_1T_1^2-\gamma_2(T_1^2+T_2^2)}- - \operatorname{arctg}\dfrac{\lambda_2T_2^2}{\tau-\gamma_2T_2^2}$

№ по пор.	Изображение	Оригинал
86	$\frac{1}{s\,(T_1^2 s^2 + 2\xi_1 T_1 s + 1) \times (T_2^2 s^2 + 2\xi_2 T_2 s + 1)}$, где $0 < \xi_1 < 1$; $0 < \xi_2 < 1$	$1 + C_1 e^{-\gamma_1 t} \sin(\lambda_1 t + \theta_1) + C_2 e^{-\gamma_2 t} \sin(\lambda_2 t + \theta_2)$, где $\gamma_1 = \frac{\xi_1}{T_1}$; $\lambda_1 = \frac{\sqrt{1 - \xi_1^2}}{T_1}$; $\gamma_2 = \frac{\xi_2}{T_2}$; $\lambda_2 = \frac{\sqrt{1 - \xi_2^2}}{T_2}$; $C_1 = \frac{T_1}{\lambda_1 \sqrt{R}}$; $C_2 = \frac{T_2}{\lambda_2 \sqrt{R}}$; $R = (T_1^2 - T_2^2)^2 + 4(\gamma_1 - \gamma_2) \times (\gamma_1 T_1^2 - \gamma_2 T_2^2) T_1 T_2^2$; $\theta_1 = \operatorname{arctg} \frac{\lambda_1 (T_1^2 - T_2^2)}{2\gamma_2 T_2^2 - \gamma_1 (T_1^2 + T_2^2)} + 2 \operatorname{arctg} \frac{\lambda_1}{\gamma_1}$; $\theta_2 = \operatorname{arctg} \frac{\lambda_2 (T_2^2 - T_1^2)}{2\gamma_1 T_1^2 - \gamma_2 (T_1^2 + T_2^2)} + 2 \operatorname{arctg} \frac{\lambda_2}{\gamma_2}$
87	$\frac{\tau s + 1}{s\,(T_1^2 s^2 + 2\xi_1 T_1 s + 1) \times (T_2^2 s^2 + 2\xi_2 T_2 s + 1)}$, где $0 < \xi_1 < 1$; $0 < \xi_2 < 1$	$1 + C_1 e^{-\gamma_1 t} \sin(\lambda_1 t + \theta_1) + C_2 e^{-\gamma_2 t} \sin(\lambda_2 t + \theta_2)$, где $\gamma_1 = \frac{\xi_1}{T_1}$; $\lambda_1 = \frac{\sqrt{1 - \xi_1^2}}{T_1}$; $\gamma_2 = \frac{\xi_2}{T_2}$; $\lambda_2 = \frac{\sqrt{1 - \xi_2^2}}{T_2}$; $C_1 = -\frac{1}{\lambda_1} \sqrt{\frac{\tau^2 + T_1^2 (1 - 2\gamma_1 \tau)}{R}}$; $C_2 = -\frac{1}{\lambda_2} \sqrt{\frac{\tau^2 + T_2^2 (1 - 2\gamma_2 \tau)}{R}}$; $R = (T_1^2 - T_2^2)^2 + 4(\gamma_1 - \gamma_2) \times (\gamma_1 T_1^2 - \gamma_2 T_2^2) T_1^2 T_2^2$; $\theta_1 = \operatorname{arctg} \frac{\lambda_1 (T_1^2 - T_2^2)}{2\gamma_2 T_2^2 - \gamma_1 (T_1^2 + T_2^2)} + \operatorname{arctg} \frac{\lambda_1 (\tau - 2\gamma_1 T_1^2)}{\gamma_1 \tau + (\lambda_1^2 - \gamma_1^2) T_1^2}$; $\theta_2 = \operatorname{arctg} \frac{\lambda_2 (T_2^2 - T_1^2)}{2\gamma_1 T_1^2 - \gamma_2 (T_1^2 + T_2^2)} + \operatorname{arctg} \frac{\lambda_2 (\tau - 2\gamma_2 T_2^2)}{\gamma_2 \tau + (\lambda_2^2 - \gamma_2^2) T_2^2}$

№ по пор.	Изображение	Оригинал
88	$\dfrac{s}{(T_1^2s^2+2\xi_1T_1s+1)\times(T_2^2s^2+2\xi_2T_2s+1)}$, где $0<\xi_1<1$; $0<\xi_2<1$	$C_1e^{-\gamma_1 t}\sin(\lambda_1 t+\theta_1)+ C_2e^{-\gamma_2 t}\sin(\lambda_2 t+\theta_2)$, где $\gamma_1=\dfrac{\xi_1}{T_1}$; $\lambda_1=\dfrac{\sqrt{1-\xi_1^2}}{T_1}$; $\gamma_2=\dfrac{\xi_2}{T_2}$; $\lambda_2=\dfrac{\sqrt{1-\xi_2^2}}{T_2}$; $C_1=\dfrac{1}{\lambda_1T_1\sqrt{R}}$; $C_2=\dfrac{1}{\lambda_2T_2\sqrt{R}}$; $R=(T_1^2-T_2^2)^2+4(\gamma_1-\gamma_2)\times(\gamma_1T_1^2-\gamma_2T_2^2)T_1^2T_2^2$; $\theta_1=\operatorname{arctg}\dfrac{\lambda_1(T_1^2-T_2^2)}{2\gamma_2T_2^2-\gamma_1(T_1^2+T_2^2)}$; $\theta_2=\operatorname{arctg}\dfrac{\lambda_2(T_2^2-T_1^2)}{2\gamma_1T_1^2-\gamma_2(T_1^2+T_2^2)}$
89	$\dfrac{s^2}{(T_1^2s^2+2\xi_1T_1s+1)\times(T_2^2s^2+2\xi_2T_2s+1)}$, где $0<\xi_1<1$; $0<\xi_2<1$	$C_1e^{-\gamma_1 t}\sin(\lambda_1 t+\theta_1)+ C_2e^{-\gamma_2 t}\sin(\lambda_2 t+\theta_2)$, где $\gamma_1=\dfrac{\xi_1}{T_1}$; $\lambda_1=\dfrac{\sqrt{1-\xi_1^2}}{T_1}$; $\gamma_2=\dfrac{\xi_2}{T_2}$; $\lambda_2=\dfrac{\sqrt{1-\xi_2^2}}{T_2}$; $C_1=-\dfrac{1}{\lambda_1T_1^2\sqrt{R}}$; $C_2=-\dfrac{1}{\lambda_2T_2^2\sqrt{R}}$; $R=(T_1^2-T_2^2)^2+4(\gamma_1-\gamma_2)\times(\gamma_1T_1^2-\gamma_2T_2^2)T_1^2T_2^2$; $\theta_1=\operatorname{arctg}\dfrac{\lambda_1(T_1^2-T_2^2)}{2\gamma_2T_2^2-\gamma_1(T_1^2+T_2^2)}-\operatorname{arctg}\dfrac{\lambda_1}{\gamma_1}$; $\theta_2=\operatorname{arctg}\dfrac{\lambda_2(T_2^2-T_1^2)}{2\gamma_1T_1^2-\gamma_2(T_1^2+T_2^2)}-\operatorname{arctg}\dfrac{\lambda_2}{\gamma_2}$

№ по пор.	Изображение	Оригинал
90	$\frac{1}{T^2s^2+1}$	$\frac{1}{T}\sin\alpha t$, где $\alpha=\frac{1}{T}$
91	$\frac{\tau s+1}{T^2s^2+1}$	$C\sin(\alpha t+\theta)$, где $\alpha=\frac{1}{T}$; $C=\frac{\sqrt{\tau^2+T^2}}{T^2}$; $\theta=\operatorname{arctg}\frac{\tau}{T}$
92	$\frac{1}{s(T^2s^2+1)}$	$1-\cos\alpha t$, где $\alpha=\frac{1}{T}$
93	$\frac{\tau s+1}{s(T^2s^2+1)}$	$1+C\cos(\alpha t+\theta)$, где $\alpha=\frac{1}{T}$; $C=-\frac{\sqrt{\tau^2+T^2}}{T}$; $\theta=\operatorname{arctg}\frac{\tau}{T}$
94	$\frac{\tau_2^2s^2+\tau_1s+1}{s(T^2s^2+1)}$	$1+C\cos(\alpha t+\theta)$, где $\alpha=\frac{1}{T}$; $C=-\frac{1}{T^2}\sqrt{\tau_1^2T^2+(T^2-\tau_2^2)^2}$; $\theta=\operatorname{arctg}\frac{\tau_1T}{T^2-\tau_2^2}$
95	$\frac{1}{s^2(T^2s^2+1)}$	$-T\sin\alpha t+t$, где $\alpha=\frac{1}{T}$
96	$\frac{s}{T^2s^2+1}$	$\frac{1}{T^2}\cos\alpha t$, где $\alpha=\frac{1}{T}$
97	$\frac{1}{(T_1^2s^2+1)(T_2s+1)}$	$C_1\sin(\alpha_1t-\theta_1)+C_2e^{-\alpha_2t}$, где $\alpha_1=\frac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\frac{1}{T_2}$; $C_1=\frac{1}{\sqrt{T_1^2+T_2^2}}$; $\theta=\operatorname{arctg}\frac{T_2}{T_1}$; $C_2=\frac{T_2}{T_1^2+T_2^2}$

№ по пор.	Изображение	Оригинал
98	$\frac{\tau s+1}{(T_1^2 s^2+1)(T_2 s+1)}$	$C_1 \sin(\alpha_1 t+\theta)+C_2 e^{-\alpha_2 t}$, где $\alpha_1=\frac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\frac{1}{T_2}$; $C_1=\frac{1}{T_1}\sqrt{\frac{\tau^2+T_1^2}{T_1^2+T_2^2}}$; $\theta=-\operatorname{arctg}\frac{T_2}{T_1}+\operatorname{arctg}\frac{\tau}{T_1}$; $C_2=\frac{T_2-\tau}{T_1^2+T_2^2}$
99	$\frac{1}{s(T_1^2 s^2+1)(T_2 s+1)}$	$1+C_1\cos(\alpha_1 t-\theta)+C_2 e^{-\alpha_2 t}$, где $\alpha_1=\frac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\frac{1}{T_2}$; $C_1=-\frac{T_1}{\sqrt{T_1^2+T_2^2}}$; $C_2=-\frac{T_2^2}{T_1^2+T_2^2}$; $\theta=\operatorname{arctg}\frac{T_2}{T_1}$
100	$\frac{\tau s+1}{s(T_1^2 s^2+1)(T_2 s+1)}$	$1+C_1\sin(\alpha_1 t-\theta)+C_2 e^{-\alpha_2 t}$, где $\alpha_1=\frac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\frac{1}{T_2}$; $C_1=\sqrt{\frac{T_1^2+\tau^2}{T_1^2+T_2^2}}$; $C_2=\frac{T_2(\tau-T_2)}{T_1^2+T_2^2}$; $\theta=\operatorname{arctg}\frac{T_2}{T_1}+\operatorname{arctg}\frac{T_1}{\tau}$
101	$\frac{1}{s^2(T_1^2 s^2+1)(T_2 s+1)}$	$C+C_1\sin(\alpha_1 t-\theta)+C_2 e^{-\alpha_2 t}+t$, где $\alpha_1=\frac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\frac{1}{T_2}$; $C=-T_2$; $C_1=-\frac{T_1^2}{\sqrt{T_1^2+T_2^2}}$; $C_2=\frac{T_2^3}{T_1^2+T_2^2}$; $\theta=\operatorname{arctg}\frac{T_2}{T_1}$

№ по пор.	Изображение	Оригинал
102	$\dfrac{s}{(T_1^2s^2+1)(T_2s+1)}$	$C_1\cos(\alpha_1 t-\theta)+C_2\mathrm{e}^{-\alpha_2 t}$, где $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $C_1=\dfrac{1}{T_1\sqrt{T_1^2+T_2^2}}$; $C_2=-\dfrac{1}{T_1^2+T_2^2}$; $\theta=\mathrm{arctg}\,\dfrac{T_2}{T_1}$
103	$\dfrac{s^2}{(T_1^2s^2+1)(T_2s+1)}$	$C_1\sin(\alpha_1 t-\theta)+C_2\mathrm{e}^{-\alpha_2 t}$, где $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $C_1=-\dfrac{1}{T_1^2\sqrt{T_1^2+T_2^2}}$; $C_2=\dfrac{1}{T_2(T_1^2+T_2^2)}$; $\theta=\mathrm{arctg}\,\dfrac{T_2}{T_1}$
104	$\dfrac{1}{(T_1^2s^2+1)(T_2s+1)^2}$	$C_1\sin(\alpha_1 t-\theta)+(C_2+C_3t)\,\mathrm{e}^{-\alpha_2 t}$, где $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $C_1=\dfrac{T_1}{T_1^2+T_2^2}$; $C_2=\dfrac{2T_1^2T_2}{(T_1^2+T_2^2)^2}$; $C_3=\dfrac{1}{T_1^2+T_2^2}$; $\theta=2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{T_2}{T_1}$
105	$\dfrac{\tau s+1}{(T_1^2s^2+1)(T_2s+1)^2}$	$C_1\sin(\alpha_1 t+\theta)+(C_2+C_3t)\,\mathrm{e}^{-\alpha_2 t}$, где $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $C_1=\dfrac{\sqrt{\tau^2+T_1^2}}{T_1^2+T_2^2}$; $\theta=-2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{T_2}{T_1}+\mathrm{arctg}\,\dfrac{\tau}{T_1}$; $C_2=\dfrac{\tau(T_2^2-T_1^2)+2T_1^2T_2}{(T_1^2+T_2^2)^2}$; $C_3=\dfrac{T_2-\tau}{T_2(T_1^2+T_2^2)}$

№ по пор.	Изображение	Оригинал
106	$\dfrac{1}{s\,(T_1^2 s^2+1)\,(T_2 s+1)^2}$	$1+C_1\cos(\alpha_1 t-\theta)+$ $+(C_2+C_3 t)\,e^{-\alpha_2 t}$, где $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $C_1=-\dfrac{T_1^2}{T_1^2+T_2^2}$; $\theta=2\operatorname{arctg}\dfrac{T_2}{T_1}$; $C_2=-\dfrac{T_2^2\,(T_2^2+3T_1^2)}{(T_1^2+T_2^2)^2}$; $C_3=-\dfrac{T_2}{T_1^2+T_2^2}$
107	$\dfrac{s}{(T_1^2 s^2+1)\,(T_2 s+1)^2}$	$C_1\cos(\alpha_1 t-\theta)+(C_2+C_3 t)\,e^{-\alpha_2 t}$, где $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $C_1=\dfrac{1}{T_1^2+T_2^2}$; $C_2=\dfrac{T_2^2-T_1^2}{(T_1^2+T_2^2)^2}$; $C_3=-\dfrac{1}{T_2\,(T_1^2+T_2^2)}$; $\theta=2\operatorname{arctg}\dfrac{T_2}{T_1}$
108	$\dfrac{s^2}{(T_1^2 s^2+1)\,(T_2 s+1)^2}$	$C_1\sin(\alpha_1 t-\theta)+(C_2+C_3 t)\,e^{-\alpha_2 t}$, где $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $C_1=\dfrac{-1}{T_1\,(T_1^2+T_2^2)}$; $C_2=-\dfrac{2T_2}{(T_1^2+T_2^2)^2}$; $C_3=\dfrac{1}{T_2^2\,(T_1^2+T_2^2)}$; $\theta=2\operatorname{arctg}\dfrac{T_2}{T_1}$

№ по пор.	Изображение	Оригинал
109	$\dfrac{1}{(T_1^2s^2+1)(T_2s+1)\times(T_3s+1)}$	$C_1\sin(\alpha_1t-\theta)+C_2e^{-\alpha_2t}+C_3e^{-\alpha_3t}$, где $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $\alpha_3=\dfrac{1}{T_3}$; $C_1=\dfrac{T_1}{\sqrt{(T_1^2+T_2^2)(T_1^2+T_3^2)}}$; $C_2=\dfrac{T_2^2}{(T_2-T_3)(T_1^2+T_2^2)}$; $C_3=\dfrac{T_3^2}{(T_3-T_2)(T_1^2+T_3^2)}$; $\theta=\operatorname{arctg}\dfrac{T_1(T_2+T_3)}{T_1^2-T_2T_3}$
110	$\dfrac{s}{(T_1^2s^2+1)(T_2s+1)\times(T_3s+1)}$	$C_1\cos(\alpha_1t-\theta)+C_2e^{-\alpha_2t}+C_3e^{-\alpha_3t}$, где $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $\alpha_3=\dfrac{1}{T_3}$; $C_1=\dfrac{1}{\sqrt{(T_1^2+T_2^2)(T_1^2+T_3^2)}}$; $C_2=\dfrac{T_2}{(T_3-T_2)(T_1^2+T_2^2)}$; $C_3=\dfrac{T_3}{(T_2-T_3)(T_1^2+T_3^2)}$; $\theta=\operatorname{arctg}\dfrac{T_1(T_2+T_3)}{T_1^2-T_2T_3}$

№ по пор.	Изображение	Оригинал
111	$\frac{s^2}{(T_1^2s^2+1)(T_2s+1)\times(T_3s+1)}$	$C_1\sin(\alpha_1 t-\theta)+C_2e^{-\alpha_2 t}+$ $+C_3e^{-\alpha_3 t}$, где $\alpha_1=\frac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\frac{1}{T_2}$; $\alpha_3=\frac{1}{T_3}$; $C_1=-\frac{1}{T_1\sqrt{(T_1^2+T_2^2)(T_1^2+T_3^2)}}$; $C_2=\frac{1}{(T_2-T_3)(T_1^2+T_2^2)}$; $C_3=\frac{1}{(T_3-T_2)(T_1^2+T_3^2)}$; $\theta=\operatorname{arctg}\frac{T_1(T_2+T_3)}{T_1^2-T_2T_3}$
112	$\frac{1}{(T^2s^2+1)^2}$	$\frac{1}{2T}\sin\alpha t-\frac{t}{2T^2}\cos\alpha t$, где $\alpha=\frac{1}{T}$
113	$\frac{\tau s+1}{(T^2s^2+1)^2}$	$C_1\sin\alpha t+C_2t\cos(\alpha t+\theta)$, где $\alpha=\frac{1}{T}$; $C_1=\frac{1}{2T}$; $C_2=-\frac{\sqrt{\tau^2+T^2}}{2T^3}$; $\theta=\operatorname{arctg}\frac{\tau}{T}$
114	$\frac{1}{s(T^2s^2+1)^2}$	$1-\cos\alpha t-\frac{t}{2T}\sin\alpha t$, где $\alpha=\frac{1}{T}$
115	$\frac{\tau s+1}{s(T^2s^2+1)^2}$	$1+C_1\cos(\alpha t+\theta_1)+$ $+C_2t\sin(\alpha t+\theta_2)$, где $\alpha=\frac{1}{T}$; $C_1=-\frac{\sqrt{\tau^2+4T^2}}{2T}$; $C_2=-\frac{\sqrt{\tau^2+T^2}}{2T^2}$; $\theta_1=\operatorname{arctg}\frac{\tau}{2T}$; $\theta_2=\operatorname{arctg}\frac{\tau}{T}$

№ по пор.	Изображение	Оригинал
116	$\dfrac{\tau_2^2 s^2 + \tau_1 s + 1}{s\,(T^2 s^2 + 1)^2}$	$1 + C_1 \cos(\alpha t + \theta_1) +$ $+ C_2 t \sin(\alpha t - \theta_2)$, где $\alpha = \dfrac{1}{T}$; $C_1 = -\dfrac{\sqrt{\tau_1^2 + 4T^2}}{2T}$; $C_2 = \dfrac{1}{2T^3}\sqrt{\tau_1^2 T^2 + (\tau_2^2 - T^2)^2}$, $\theta_1 = \operatorname{arctg}\dfrac{\tau_1}{2T}$; $\theta_2 = \operatorname{arctg}\dfrac{\tau_1 T}{\tau_2^2 - T^2}$
117	$\dfrac{s}{(T^2 s^2 + 1)^2}$	$\dfrac{t}{2T^3}\sin\alpha t$, где $\alpha = \dfrac{1}{T}$
118	$\dfrac{s^2}{(T^2 s^2 + 1)^2}$	$\dfrac{1}{2T^3}\sin\alpha t + \dfrac{t}{2T^4}\cos\alpha t$, где $\alpha = \dfrac{1}{T}$
119	$\dfrac{1}{(T_1^2 s^2 + 1)(T_2^2 s^2 + 1)}$	$C_1 \sin\alpha_1 t + C_2 \sin\alpha_2 t$, где $\alpha_1 = \dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2 = \dfrac{1}{T_2}$; $C_1 = \dfrac{T_1}{T_1^2 - T_2^2}$; $C_2 = \dfrac{T_2}{T_2^2 - T_1^2}$
120	$\dfrac{\tau s + 1}{(T_1^2 s^2 + 1)(T_2^2 s^2 + 1)}$	$C_1 \sin(\alpha_1 t + \theta_1) + C_2 \sin(\alpha_2 t + \theta_2)$, где $\alpha_1 = \dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2 = \dfrac{1}{T_2}$; $C_1 = \dfrac{\sqrt{\tau^2 + T_1^2}}{T_1^2 - T_2^2}$; $C_2 = \dfrac{\sqrt{\tau^2 + T_2^2}}{T_2^2 - T_1^2}$; $\theta_1 = \operatorname{arctg}\dfrac{\tau}{T_1}$; $\theta_2 = \operatorname{arctg}\dfrac{\tau}{T_2}$

№ по пор.	Изображение	Оригинал
121	$\dfrac{1}{s\,(T_1^2s^2+1)\,(T_2^2s^2+1)}$	$1+C_1\cos\alpha_1 t+C_2\cos\alpha_2 t$, где $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $C_1=\dfrac{T_1^2}{T_2^2-T_1^2}$; $C_2=\dfrac{T_2^2}{T_1^2-T_2^2}$
122	$\dfrac{\tau s+1}{s\,(T_1^2s^2+1)\,(T_2^2s^2+1)}$	$1+C_1\cos(\alpha_1 t+\theta_1)+$ $+C_2\cos(\alpha_2 t+\theta_2)$, где $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $C_1=\dfrac{T_1\sqrt{\tau^2+T_1^2}}{T_2^2-T_1^2}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $C_2=\dfrac{T_2\sqrt{\tau^2+T_2^2}}{T_1^2-T_2^2}$; $\theta_1=\operatorname{arctg}\dfrac{\tau}{T_1}$; $\theta_2=\operatorname{arctg}\dfrac{\tau}{T_2}$
123	$\dfrac{s}{(T_1^2s^2+1)\,(T_2^2s^2+1)}$	$C_1\cos\alpha_1 t+C_2\cos\alpha_2 t$, где $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $C_1=\dfrac{1}{T_1^2-T_2^2}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $C_2=\dfrac{1}{T_2^2-T_1^2}$
124	$\dfrac{s^2}{(T_1^2s^2+1)\,(T_2^2s^2+1)}$	$C_1\sin\alpha_1 t+C_2\sin\alpha_2 t$, где $\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$; $C_1=\dfrac{1}{T_1\,(T_2^2-T_1^2)}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$; $C_2=\dfrac{1}{T_2\,(T_1^2-T_2^2)}$

№ по пор.	Изображение	Оригинал
125	$\dfrac{1}{(T_1^2 s^2+1)(T_2^2 s^2+2\xi T_2 s+1)}$, где $0<\xi<1$	$C_1 \sin(\alpha t-\theta_1)+$ $+C_2 e^{-\gamma t}\sin(\lambda t+\theta_2)$, где $\alpha=\dfrac{1}{T_1}$; $\gamma=\dfrac{\xi}{T_2}$; $\lambda=\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_2}$; $C_1=\dfrac{T_1}{\sqrt{R}}$; $C_2=\dfrac{1}{\lambda\sqrt{R}}$; $R=(T_1^2-T_2^2)^2+4\gamma^2 T_1^2 T_2^4$; $\theta_1=\operatorname{arctg}\dfrac{2\gamma T_1 T_2^2}{T_1^2-T_2^2}$; $\theta_2=\operatorname{arctg}\dfrac{\lambda(T_1^2-T_2^2)}{\gamma(T_1^2+T_2^2)}+$ $+\operatorname{arctg}\dfrac{\lambda}{\gamma}$
126	$\dfrac{1}{s(T_1^2 s^2+1)\times(T_2^2 s^2+2\xi T_2 s+1)}$, где $0<\xi<1$	$1+C_1\cos(\alpha t-\theta_1)+$ $+C_2 e^{-\gamma t}\sin(\lambda t+\theta_2)$, где $\alpha=\dfrac{1}{T_1}$; $\gamma=\dfrac{\xi}{T_2}$; $\lambda=\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_2}$; $C_1=-\dfrac{T_1^2}{\sqrt{(T_1^2-T_2^2)^2+4\gamma^2T_1^2T_2^4}}$; $C_2=-\dfrac{T_2}{\lambda\sqrt{(T_1^2-T_2^2)^2+4\gamma^2T_1^2T_2^4}}$; $\theta_1=\operatorname{arctg}\dfrac{2\gamma T_1 T_2^2}{T_1^2-T_2^2}$; $\theta_2=\operatorname{arctg}\dfrac{\lambda(T_1^2-T_2^2)}{\gamma(T_1^2+T_2^2)}+$ $+2\operatorname{arctg}\dfrac{\lambda}{\gamma}$

Продолжение табл. 4.1

№ по пор.	Изображение	Оригинал
127	$\dfrac{s}{(T_1^2 s^2 + 1) \times (T_2^2 s^2 + 2\xi T_2 s + 1)}$, где $0 < \xi < 1$	$C_1 \cos(\alpha t - \theta_1) + C_2 e^{-\gamma t} \sin(\lambda t + \theta_2)$, где $\alpha = \dfrac{1}{T_1}$; $\gamma = \dfrac{\xi}{T_2}$; $\lambda = \dfrac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T_2}$; $C_1 = \dfrac{1}{\sqrt{(T_1^2 - T_2^2)^2 + 4\gamma^2 T_1^2 T_2^4}}$; $C_2 = -\dfrac{1}{\lambda T_2 \sqrt{(T_1^2 - T_2^2)^2 + 4\gamma^2 T_1^2 T_2^4}}$; $\theta_1 = \operatorname{arctg} \dfrac{2\gamma T_1 T_2^2}{T_1^2 - T_2^2}$; $\theta_2 = \operatorname{arctg} \dfrac{\lambda (T_1^2 - T_2^2)}{\gamma (T_1^2 + T_2^2)}$
128	$\dfrac{s^2}{(T_1^2 s^2 + 1) \times (T_2^2 s^2 + 2\xi T_2 s + 1)}$, где $0 < \xi < 1$	$C_1 \sin(\alpha t - \theta_1) + C_2 e^{-\gamma t} \sin(\lambda t + \theta_2)$, где $\alpha = \dfrac{1}{T_1}$; $\gamma = \dfrac{\xi}{T_2}$; $\lambda = \dfrac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T_2}$; $C_1 = -\dfrac{1}{T_1 \sqrt{(T_1^2 - T_2^2)^2 + 4\gamma^2 T_1^2 T_2^4}}$; $C_2 = \dfrac{1}{\lambda T_2^2 \sqrt{(T_1^2 - T_2^2)^2 + 4\gamma^2 T_1^2 T_2^4}}$; $\theta_1 = \operatorname{arctg} \dfrac{2\gamma T_1 T_2^2}{T_1^2 - T_2^2}$; $\theta_2 = \operatorname{arctg} \dfrac{\lambda (T_1^2 - T_2^2)}{\gamma (T_1^2 + T_2^2)} - \operatorname{arctg} \dfrac{\lambda}{\gamma}$

т. е. отношение $\frac{R}{Q}$ разлагается на $q + \eta + \mu$ простейших дробей. После этого обе части равенства нужно умножить на Q и сделать сокращения, а затем, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях s, составить систему уравнений, из которой и определятся коэффициенты A_i, B_i, C_i и $\mathscr{D}_i$.

Подобная процедура может оказаться громоздкой. Однако табл. 4.1 позволяет отыскивать оригиналы, соответствующие изображениям со знаменателем до пятой степени включительно. Поэтому при $n > 5$ изображение можно разлагать не на простейшие дроби, а на дроби со знаменателями не выше пятой степени.

4.2. МЕТОД ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Основой метода является зависимость, существующая между переходной характеристикой устойчивой САР и ее вещественной характеристикой $P = P(\omega)$ относительно одного из внешних воздействий:

$$h = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{P \sin \omega t}{\omega} d\omega. \tag{4.8}$$

Суть метода в следующем. Интеграл (4.8) вычислен при различных значениях параметров вещественной частотной характеристики простейшей формы (трапеция или треугольник) и результаты сведены в таблицу. Реальную характеристику P разбивают на несколько простейших P_i:

$$P = \sum_{i=1}^{l} P_i. \tag{4.9}$$

Для каждой простейшей характеристики P_i с помощью таблицы определяют соответствующую ей h_i. Тогда переходная характеристика h, соответствующая P, определяется суммированием составляющих h_i:

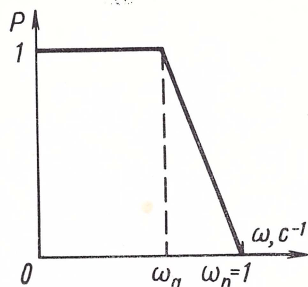
$$h = \sum_{i=1}^{l} h_i. \tag{4.10}$$

В качестве типовой В. В. Солодовниковым [113] была выбрана единичная трапецеидальная вещественная частотная характеристика (рис. 4.1). Ее высота равна единице, а основание равно $\omega_п = 1$ с$^{-1}$. Изменяющимся параметром является отношение меньшей параллельной стороны к большей (к основанию):

$$\chi = \frac{\omega_а}{\omega_п}, \tag{4.11}$$

которое называют коэффициентом наклона.

Рис. 4.1. Единичная трапецеидальная вещественная частотная характеристика



По равенству (4.8) вычислены значения h-функции, т. е. значения функции времени $\tau = t\omega_п$, условно соответствующие единичной трапеции с коэффициентом наклона χ, лежащим в пределах $0 < \chi < 1$. Значения h-функции приведены в табл. 4.2.

Построение переходной характеристики h по вещественной частотной характеристике P методом трапеций состоит из следующих этапов:

1. Вещественную частотную характеристику разбивают на трапеции.

Для этого кривую $P(\omega)$ заменяют приближенно прямолинейными отрезками и концы каждого отрезка соединяют с осью ординат прямыми, параллельными оси абсцисс (рис. 4.2). Первый отрезок должен начинаться из точки $P(0)$, так как эта точка определяет конечное значение переходной характеристики $h(\infty) = P(0)$. Более тщательно необходимо аппроксимировать начальную часть вещественной характеристики. Ее «хвост», т. е. конечную часть с ординатами, меньшими по абсолютной величине, чем $0{,}1P(0)$, можно не принимать во внимание.

На рис. 4.2 кривая $P(\omega)$ аппроксимирована шестью трапециями: *а*, *б*, *в* — трапеция 1; *в*, *г*, *д*, *е* — трапеция 2; *е*, *д*, *ж*, *з* — трапеция 3; *з*, *ж*, *и*, *й* — трапеция 4, *й*, *к*, *л*, *м* — трапеция 5; *м*, *л*, *н*, *о* — трапеция 6.

2. Определяют параметры трапеций.

Для каждой (i-й) трапеции по графику определяют частоты ω_{ai} и $\omega_{пi}$ и высоту P_i. Частоты отсчитывают от начала осей координат. По значениям ω_{ai} и $\omega_{пi}$ вычисляют коэффициент наклона $\chi = \frac{\omega_{ai}}{\omega_{пi}}$ и его значение округляют до 0,05.

Величине P_i приписывают положительный знак, если меньшая параллельная сторона трапеции расположена выше большей, отрицательный — в противоположном случае. Сумма высот всех трапеций равна $P(0)$.

Параметры трапеций, аппроксимирующих характеристику $P(\omega)$ на рис. 4.2, занесены в расчетную табл. 4.3.

3. Определяют составляющие переходной характеристики.

В таблице h-функций для каждой i-й трапеции отыскивают столбец, соответствующий значению χ. Затем для каждой точки по условному времени τ определяют действительное время

$$t = \frac{\tau}{\omega_{пi}}, \tag{4.12}$$

и по значению $h(\tau)$ определяют ординату $h_i(t) = P_i h(\tau)$ составляющей переходной характеристики, которая соответствует данной трапеции.

Таблица

	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,5	0,138	0,165	0,176	0,184	0,192	0,199	0,207	0,215	0,223	0,231
1,0	0,310	0,326	0,340	0,356	0,371	0,386	0,401	0,417	0,432	0,447
1,5	0,449	0,469	0,494	0,516	0,538	0,560	0,594	0,603	0,617	0,646
2,0	0,572	0,597	0,628	0,655	0,683	0,709	0,732	0,761	0,786	0,810
2,5	0,674	0,707	0,739	0,771	0,802	0,833	0,862	0,891	0,917	0,943
3,0	0,755	0,790	0,828	0,863	0,896	0,928	0,958	0,987	1,013	1,038
3,5	0,815	0,853	0,892	0,928	0,963	0,994	1,024	1,050	1,074	1,095
4,0	0,857	0,896	0,938	0,974	1,008	1,039	1,060	1,090	1,110	1,127
4,5	0,883	0,923	0,960	0,997	1,029	1,057	1,084	1,104	1,120	1,129
5,0	0,895	0,939	0,977	1,012	1,042	1,067	1,087	1,102	1,112	1,117
5,5	0,900	0,940	0,986	1,015	1,042	1,063	1,079	1,088	1,092	1,096
6,0	0,903	0,942	0,982	1,013	1,037	1,054	1,065	1,070	1,068	1,062
6,5	0,904	0,943	0,980	1,009	1,030	1,043	1,050	1,049	1,043	1,033
7,0	0,904	0,944	0,979	1,006	1,024	1,035	1,037	1,033	1,023	1,009
7,5	0,907	0,945	0,980	1,006	1,019	1,027	1,025	1,020	1,005	0,989
8,0	0,910	0,951	0,985	1,008	1,020	1,024	1,021	1,012	0,998	0,981
8,5	0,918	0,956	0,989	1,010	1,021	1,022	1,018	1,007	0,992	0,977
9,0	0,924	0,965	0,997	1,016	1,025	1,025	1,018	1,006	0,992	0,978
9,5	0,932	0,972	1,004	1,022	1,029	1,027	1,019	1,006	0,993	0,982
10,0	0,939	0,978	1,009	1,025	1,031	1,027	1,019	1,006	0,993	0,987
10,5	0,946	0,985	1,013	1,028	1,033	1,028	1,017	1,005	0,993	0,989
11,0	0,947	0,988	1,015	1,029	1,031	1,025	1,014	1,002	0,993	0,991
11,5	0,949	0,988	1,016	1,027	1,028	1,021	1,010	0,999	0,991	0,989
12,0	0,950	0,990	1,015	1,025	1,024	1,015	1,004	0,994	0,988	0,990
12,5	0,950	0,989	1,013	1,022	1,019	1,010	0,999	0,990	0,986	0,989
13,0	0,950	0,989	1,012	1,019	1,015	1,005	0,994	0,986	0,985	0,989
13,5	0,950	0,990	1,011	1,017	1,011	1,000	0,990	0,983	0,984	0,989
14,0	0,952	0,989	1,011	1,016	1,009	0,997	0,988	0,983	0,985	0,991
14,5	0,954	0,990	1,012	1,015	1,008	0,996	0,987	0,985	0,988	0,996
15,0	0,956	0,993	1,012	1,014	1,007	0,995	0,988	0,987	0,991	1,000
15,5	0,959	0,995	1,014	1,014	1,006	0,995	0,989	0,988	0,996	1,004
16,0	0,961	0,997	1,015	1,014	1,006	0,995	0,991	0,992	0,998	1,007
16,5	0,964	0,999	1,016	1,014	1,005	0,995	0,993	0,995	1,002	1,009
17,0	0,965	1,001	1,016	1,013	1,005	0,995	0,994	0,997	1,005	1,010
17,5	0,966	1,002	1,015	1,012	1,003	0,995	0,994	0,998	1,006	1,010
18,0	0,996	1,002	1,015	1,011	1,002	0,995	0,995	1,001	1,008	1,010
18,5	0,966	1,001	1,015	1,009	1,001	0,994	0,995	1,001	1,007	1,009
19,0	0,967	1,000	1,015	1,008	0,998	0,992	0,995	1,001	1,006	1,006
19,5	0,967	1,000	1,014	1,006	0,996	0,991	0,995	1,001	1,005	1,004
20,0	0,967	1,000	1,013	1,005	0,995	0,991	0,995	1,001	1,005	1,002
20,5	0,968	1,002	1,012	1,004	0,994	0,991	0,996	1,002	1,004	1,001
21,0	0,968	1,002	1,011	1,003	0,994	0,992	0,997	1,003	1,004	1,001
21,5	0,969	1,002	1,011	1,003	0,995	0,992	0,999	1,004	1,004	1,000
22,0	0,971	1,002	1,011	1,002	0,995	0,993	1,000	1,005	1,004	0,999
22,5	0,973	1,002	1,011	1,002	0,996	0,995	1,002	1,006	1,004	0,999
23,0	0,974	1,010	1,001	1,002	0,996	0,996	1,004	1,007	1,003	0,998
23,5	0,975	1,005	1,010	1,002	0,996	0,998	1,004	1,008	1,003	0,998
24,0	0,975	1,005	1,010	1,001	0,996	0,999	1,005	1,007	1,005	0,997
24,5	0,975	1,005	1,009	1,000	0,996	0,999	1,005	1,006	1,001	0,997
25,0	0,975	1,005	1,008	1,000	0,995	0,999	1,005	1,004	1,005	0,996
25,5	0,975	1,005	1,008	0,999	0,995	0,999	1,004	1,003	0,998	0,996
26,0	0,975	1,005	1,007	0,999	0,995	0,999	1,004	1,002	0,997	0,996

Таблица 4.2

0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,240	0,248	0,255	0,259	0,267	0,275	0,282	0,290	0,297	0,304	0,314
0,461	0,476	0,490	0,505	0,519	0,534	0,547	0,562	0,575	0,593	0,603
0,665	0,685	0,706	0,722	0,740	0,758	0,776	0,794	0,813	0,832	0,844
0,833	0,856	0,878	0,899	0,919	0,938	0,956	0,974	0,986	1,003	1,020
0,967	0,985	1,010	1,030	1,050	1,067	1,084	1,090	1,105	1,120	1,133
1,061	1,082	1,100	1,117	1,130	1,142	1,154	1,164	1,172	1,176	1,178
1,115	1,132	1,145	1,158	1,161	1,166	1,171	1,174	1,175	1,175	1,175
1,142	1,152	1,158	1,159	1,160	1,161	1,156	1,149	1,141	1,131	1,118
1,134	1,138	1,138	1,134	1,132	1,127	1,111	1,099	1,085	1,071	1,053
1,118	1,115	1,107	1,098	1,084	1,069	1,053	1,037	1,019	1,001	0,986
1,092	1,083	1,070	1,050	1,032	1,016	0,994	0,979	0,962	0,951	0,932
1,051	1,037	1,021	1,003	0,984	0,956	0,949	0,934	0,922	0,920	0,906
1,018	1,001	0,982	0,946	0,948	0,936	0,920	0,910	0,903	0,903	0,905
0,993	0,975	0,957	0,941	0,927	0,917	0,911	0,908	0,909	0,915	0,925
0,974	0,958	0,944	0,926	0,922	0,911	0,920	0,927	0,934	0,946	0,958
0,966	0,951	0,941	0,935	0,932	0,936	0,944	0,955	0,970	0,986	1,004
0,966	0,949	0,944	0,948	0,951	0,958	0,974	0,990	1,006	1,023	1,041
0,970	0,960	0,961	0,966	0,976	0,990	1,006	1,023	1,039	1,053	1,061
0,975	0,972	0,980	0,987	1,000	1,015	1,033	1,048	1,059	1,066	1,066
0,982	0,985	0,993	1,006	1,020	1,036	1,049	1,059	1,063	1,062	1,056
0,987	0,996	1,007	1,017	1,033	1,046	1,054	1,058	1,055	1,048	1,033
0,993	1,002	1,014	1,027	1,039	1,047	1,048	1,044	1,034	1,021	1,005
0,997	1,006	1,017	1,029	1,037	1,043	1,034	1,024	1,010	0,994	0,977
0,997	1,006	1,019	1,026	1,027	1,025	1,015	1,000	0,984	0,969	0,958
0,997	1,006	1,018	1,019	1,017	1,010	0,995	0,979	0,965	0,954	0,949
0,997	1,006	1,014	1,012	1,005	0,993	0,980	0,964	0,955	0,950	0,955
0,998	1,006	1,010	1,005	0,995	0,982	0,968	0,958	0,954	0,958	0,970
1,000	1,006	1,008	0,999	0,987	0,974	0,965	0,961	0,965	0,976	0,990
1,002	1,006	1,005	0,994	0,983	0,970	0,969	0,971	0,981	0,997	1,010
1,005	1,007	1,002	0,993	0,983	0,976	0,978	0,987	1,001	1,017	1,030
1,008	1,007	1,001	0,993	0,985	0,984	0,991	1,003	1,019	1,032	1,040
1,011	1,008	1,000	0,994	0,990	0,993	1,003	1,018	1,031	1,039	1,039
1,011	1,008	1,001	0,996	0,995	1,001	1,014	1,027	1,036	1,038	1,028
1,012	1,007	0,999	0,997	0,999	1,008	1,020	1,030	1,032	1,027	1,012
1,009	1,005	0,997	0,998	1,002	1,012	1,023	1,027	1,023	1,013	0,988
1,008	1,002	0,997	0,998	1,004	1,014	1,020	1,018	1,008	0,993	0,979
1,006	0,999	0,995	0,998	1,003	1,012	1,014	1,007	0,933	0,978	0,969
1,001	0,995	0,993	0,997	1,004	1,009	1,006	1,007	0,981	0,969	0,956
0,998	0,992	0,992	0,996	1,003	1,005	0,998	0,985	0,973	0,967	0,973
0,996	0,991	0,992	0,995	1,003	1,001	0,991	0,979	0,972	0,974	0,985
0,995	0,991	0,994	0,996	1,001	0,996	0,986	0,976	0,974	0,990	1,001
0,995	0,993	0,997	0,996	0,999	0,993	0,983	0,975	0,981	1,002	1,016
0,996	0,995	1,000	0,995	0,998	0,992	0,986	0,988	0,997	1,013	1,024
0,996	0,996	1,000	0,997	0,997	0,991	0,991	0,997	1,012	1,024	1,029
0,997	1,000	1,004	1,000	0,996	0,992	0,998	1,008	1,022	1,028	1,026
0,998	1,001	1,006	1,001	0,997	0,994	1,002	1,015	1,025	1,027	1,016
0,999	1,002	1,007	1,002	0,998	0,997	1,007	1,017	1,023	1,023	1,002
1,000	1,002	1,008	1,003	0,999	1,000	1,008	1,017	1,015	1,012	0,988
1,000	1,002	1,006	1,003	1,000	1,002	1,008	1,014	1,005	0,995	0,979
1,000	1,002	1,004	1,003	1,001	1,003	1,005	1,008	0,991	0,985	0,975
1,000	1,002	1,002	1,002	1,002	1,004	1,004	1,001	0,986	0,978	0,977
1,000	1,002	1,000	1,001	1,002	1,004	1,002	0,987	0,984	0,977	0,983

Таблица 4.3

Построение переходной характеристики методом трапеций

Трапеция 1		Трапеция 2		Трапеция 3		Трапеция 4		Трапеция 5		Трапеция 6	
$\omega_{a1} = 0$		$\omega_{a2} = 6$		$\omega_{a3} = 8$		$\omega_{a4} = 10,6$		$\omega_{a5} = 14$		$\omega_{a6} = 22$	
$\omega_{п1} = 4$		$\omega_{п2} = 8$		$\omega_{п3} = 10,6$		$\omega_{п4} = 13$		$\omega_{п5} = 22$		$\omega_{п6} = 45$	
$\chi_1 = 0$		$\chi_2 = 0,75$		$\chi_3 = 0,75$		$\chi_4 = 0,80$		$\chi_5 = 0,65$		$\chi_6 = 0,50$	
$P_1 = -0,04$		$P_2 = 0,39$		$P_3 = 0,90$		$P_4 = 0,20$		$P_5 = -0,25$		$P_6 = -0,2$	
t	$h_1(t)$	t	$h_2(t)$	t	$h_3(t)$	t	$h_4(t)$	t	$h_5(t)$	t	$h_6(t)$
0,125	—0,006	0,06	0,11	0,05	0,25	0,08	0,11	0,05	—0,13	0,04	—0,17
0,250	—0,012	0,13	0,21	0,09	0,48	0,15	0,19	0,09	—0,22	0,09	—0,23
0,375	—0,018	0,19	0,30	0,14	0,68	0,23	0,23	0,14	—0,28	0,13	—0,21
0,500	—0,023	0,25	0,37	0,19	0,84	0,31	0,23	0,18	—0,29	0,18	—0,19
0,625	—0,027	0,31	0,42	0,24	0,96	0,39	0,21	0,23	—0,27	0,22	—0,20
0,750	—0,030	0,38	0,45	0,28	1,02	0,46	0,19	0,27	—0,25	0,27	—0,20
0,875	—0,031	0,44	0,45	0,33	1,05	0,54	0,18	0,32	—0,24	0,31	—0,20
1,000	—0,034	0,50	0,45	0,38	1,04	0,62	0,19	0,36	—0,23	0,36	—0,20
1,125	—0,035	0,63	0,42	0,47	0,96	0,69	0,20	0,41	—0,24		
		0,75	0,38	0,57	0,86	0,77	0,21	0,45	—0,25		
		0,88	0,36	0,66	0,83	0,85	0,21	0,50	—0,26		
		0,94	0,36	0,76	0,84	0,92	0,20	0,55	—0,26		
		1,00	0,37	0,85	0,89	1,00	0,20	0,59	—0,25		
		1,13	0,39	0,94	0,93	1,08	0,19	0,64	—0,25		
				1,04	0,94						
				1,13	0,92						

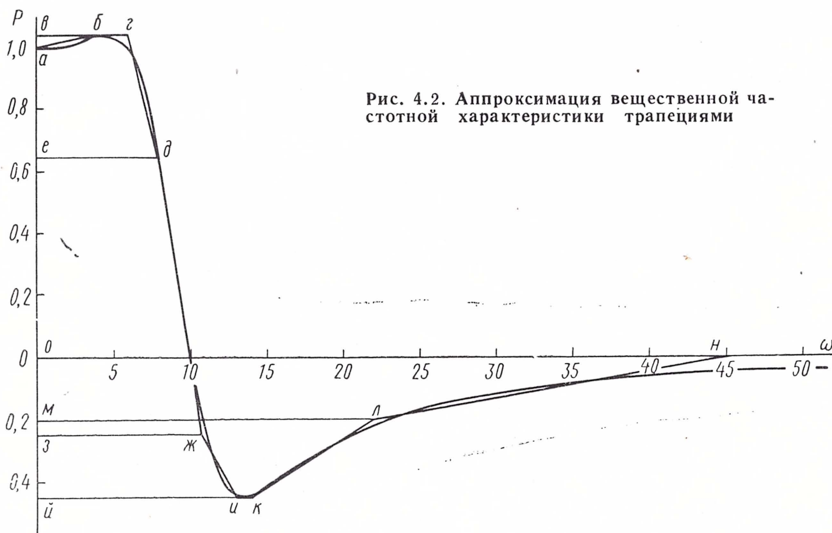


Рис. 4.2. Аппроксимация вещественной частотной характеристики трапециями

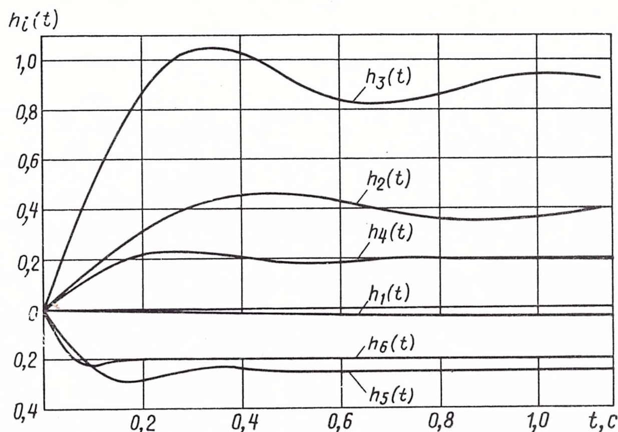


Рис. 4.3. График составляющих h_i (t) переходной характеристики

Полученные значения t и h_i (t) целесообразно заносить в таблицу расчета. Иногда можно брать лишь часть точек h-функции. Чем больше значение $\omega_{\text{п}i}$, тем меньше точек h-функции нужно брать. При этом следует выбирать точки, равномерно отстоящие одна от другой и определяющие максимумы и минимумы h-функции.

В табл. 4.3 определены составляющие переходной характеристики, соответствующие трапециям рис. 4.2.

4. Строят график составляющих переходной характеристики.

Все составляющие строят на одном графике. Знак каждой из них определяется знаком высоты P_i соответствующей трапеции.

Обычно оказывается, что некоторые составляющие определены на меньших отрезках времени, чем другие. Это означает, что указанные составляющие раньше других достигли установившегося значения и в дальнейшем остаются неизменными.

Составляющие, определенные в табл. 4.3, построены на рис. 4.3.

5. Строят график переходной характеристики.

Ординаты переходной характеристики определяют суммированием ординат всех составляющих в выбранные моменты времени. Целесообразно сначала определить ординаты через равные промежутки времени. Затем определить дополнительные точки там, где вероятны максимумы или минимумы характеристики и имеются максимумы или минимумы составляющих.

После построения достаточного числа точек характеристики их соединяют плавной кривой (рис. 4.4). Штриховой линией показано точное значение переходной характеристики этой системы.

Следует заметить, что погрешности переходной характеристики тем больше, чем сложнее форма кривой вещественной частотной характеристики. Значительное увеличение числа аппроксими-

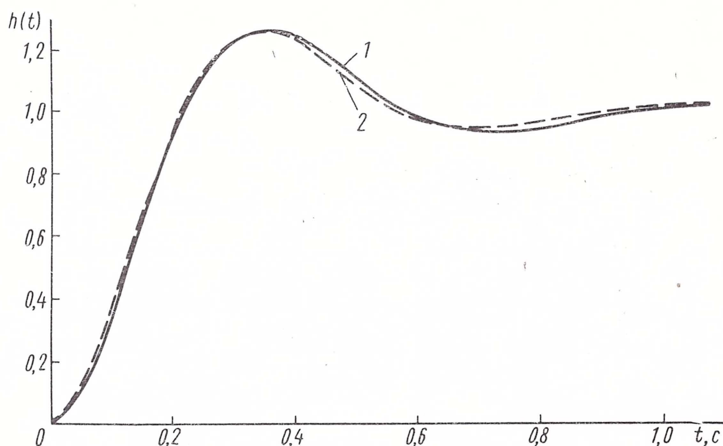


Рис. 4.4. Переходная характеристика

рующих ее прямолинейных отрезков (и трапеций) может не уменьшить погрешностей. Ведь для каждой трапеции округляется значение χ_i, возникают погрешности при построении и суммировании составляющих.

А. А. Вороновым в качестве типовой вещественной частотной характеристики выбрана треугольная [24]. При этом возможно избежать графического суммирования составляющих переходной характеристики.

Другой метод определения переходной характеристики по вещественной частотной характеристике системы [89] заключается в следующем.

Вещественную частотную характеристику аппроксимируют отрезками прямых. Аппроксимацию начинают из начальной точки характеристики ($\omega_0 = 0$; $P_0 = P(0)$). Конец каждого i-го отрезка ($i = 1, 2\ldots$) характеризуется ординатой P_i и абсциссой ω_i.

Затем для каждого прямолинейного участка характеристики вычисляют значения производной

$$P'_i = \frac{P_i - P_{i-1}}{\omega_i - \omega_{i-1}} \tag{4.13}$$

и вспомогательной величины

$$b_i = (P'_{i+1} - P'_i)\,\omega_i. \tag{4.14}$$

Переходную характеристику определяют по формуле

$$h(t) = \sum_{i=1}^{n} b_i B(\tau_i), \tag{4.15}$$

Таблица 4.4

Значения функции $B(\tau)$

τ	$B(\tau)$	τ	$B(\tau)$	τ	$B(\tau)$	τ	$B(\tau)$	τ	$B(\tau)$
0,05	0,0159	1,40	0,4223	2,75	0,7168	4,2	0,8681	10,5	0,9437
0,10	0,0318	1,45	0,4357	2,80	0,7248	4,3	0,8732	11,0	0,9472
0,15	0,0477	1,50	0,4489	2,85	0,7325	4,4	0,8777	11,5	0,9491
0,20	0,0636	1,55	0,4620	2,90	0,7401	4,5	0,8818	12,0	0,9498
0,25	0,0794	1,60	0,4749	2,95	0,7475	4,6	0,8853	13,0	0,9500
0,30	0,0953	1,65	0,4876	3,00	0,7546	4,7	0,8885	14,0	0,9515
0,35	0,1110	1,70	0,5001	3,05	0,7615	4,8	0,8912	15,0	0,9555
0,40	0,1268	1,75	0,5125	3,10	0,7683	4,9	0,8935	16,0	0,9606
0,45	0,1424	1,80	0,5246	3,15	0,7748	5,0	0,8955	17,0	0,9646
0,50	0,1581	1,85	0,5366	3,20	0,7811	5,1	0,8972	18,0	0,9662
0,55	0,1736	1,90	0,5483	3,25	0,7872	5,2	0,8986	19,0	0,9664
0,60	0,1891	1,95	0,5599	3,30	0,7931	5,3	0,8997	20,0	0,9668
0,65	0,2045	2,00	0,5713	3,35	0,7988	5,4	0,9006	21	0,9684
0,70	0,2198	2,05	0,5824	3,40	0,8043	5,5	0,9013	22	0,9710
0,75	0,2350	2,10	0,5934	3,45	0,8097	5,6	0,9018	23	0,9733
0,80	0,2502	2,15	0,6042	3,50	0,8148	5,7	0,9022	24	0,9745
0,85	0,2652	2,20	0,6147	3,55	0,8197	5,8	0,9025	25	0,9748
0,90	0,2801	2,25	0,6251	3,60	0,8245	5,9	0,9027	30	0,9795
0,95	0,2950	2,30	0,6352	3,65	0,8290	6,0	0,9028	35	0,9820
1,00	0,3096	2,35	0,6451	3,70	0,8334	6,5	0,9029	40	0,9838
1,05	0,3242	2,40	0,6548	3,75	0,8376	7,0	0,9036	45	0,9856
1,10	0,3387	2,45	0,6643	3,80	0,8417	7,5	0,9063	50	0,9873
1,15	0,3530	2,50	0,6736	3,85	0,8455	8,0	0,9110	60	0,9894
1,20	0,3671	2,55	0,6827	3,90	0,8492	8,5	0,9175	70	0,9908
1,25	0,3812	2,60	0,6915	3,95	0,8528	9,0	0,9248	80	0,9921
1,30	0,3950	2,65	0,7001	4,00	0,8561	9,5	0,9322	90	0,9929
1,35	0,4087	2,70	0,7086	4,1	0,8624	10,0	0,9387	100	0,9937

где n — число прямолинейных отрезков, аппроксимирующих вещественную частотную характеристику;

$$\tau_i = t\omega_i.$$

Значения функции $B(\tau)$ приведены в табл. 4.4.

На рис. 4.5 аппроксимирована отрезками прямых ранее рассматривавшаяся вещественная частотная характеристика (см. рис. 4.2). Значения координат ω_i и P_i, определяющих положение

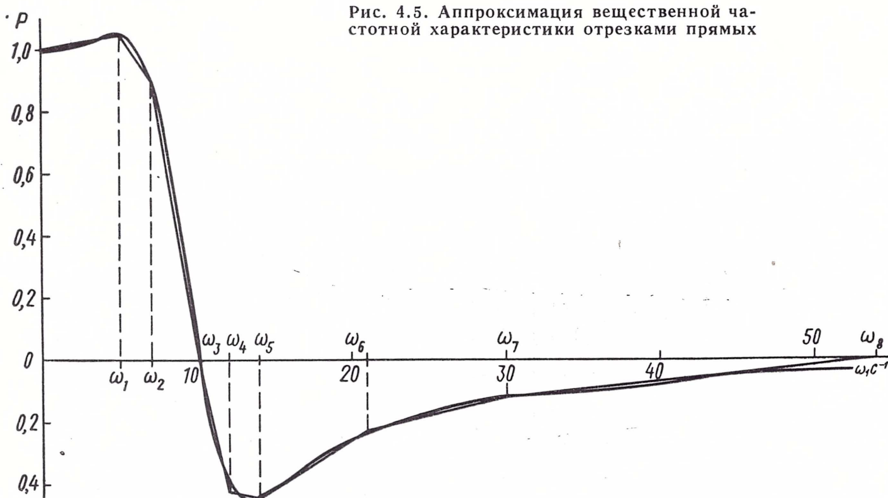


Рис. 4.5. Аппроксимация вещественной частотной характеристики отрезками прямых

прямолинейных отрезков, и результаты вычисления величин P_i' и b_i сведены в табл. 4.5.

По формуле (4.15) составляем выражение для определения переходной характеристики

$$h(t) = -0{,}425B(5t) - 1{,}575B(7t) + 0{,}850B(10t) + \\ + 2{,}460B(12t) + 0{,}588B(14t) - 0{,}420B(21t) - \\ - 0{,}209B(30t) - 0{,}269B(54t).$$

Таблица 4.5

Данные для определения переходной характеристики

i	ω_i	P_i	$\widetilde{P}_i$	b_i
0	0	1,00	—	—
1	5	1,05	0,010	—0,425
2	7	0,90	—0,075	—1,575
3	10	0	—0,300	0,850
4	12	—0,43	—0,215	2,460
5	14	—0,45	—0,010	0,588
6	21	—0,23	0,032	—0,420
7	30	—0,12	0,012	—0,209
8	54	0	0,005	—0,269
				$\sum_{i=1}^{8} b_i = 1{,}000$

Таблица 4.6

Определение переходной характеристики

t, с	0,10	0,20	0,30	0,35	0,40	0,50	0,60	0,70	0,90	1,10
—0,425B (5t)	—0,07	—0,13	—0,19	—0,22	—0,24	—0,29	—0,32	—0,35	—0,38	—0,38
—1,575B (7t)	—0,35	—0,67	—0,94	—1,05	—1,14	—1,28	—1,37	—1,41	—1,42	—1,43
0,850B (10t)	0,26	0,49	0,64	0,69	0,73	0,76	0,77	0,77	0,79	0,81
2,460B (12t)	0,90	1,61	2,03	2,14	2,19	2,22	2,23	2,25	2,33	2,34
0,588B (14t)	0,25	0,43	0,51	0,53	0,53	0,53	0,54	0,55	0,56	0,56
—0,420B (21t)	—0,25	—0,37	—0,38	—0,38	—0,40	—0,40	—0,40	—0,40	—0,41	—0,41
—0,209B (30t)	—0,16	—0,19	—0,19	—0,20	—0,20	—0,20	—0,20	—0,20	—0,20	—0,21
—0,269B (54t)	—0,24	—0,26	—0,26	—0,26	—0,26	—0,26	—0,26	—0,26	—0,27	—0,27
h (t)	0,35	0,92	1,22	1,25	1,22	1,09	0,98	0,95	1,00	1,02

Расчеты по определению переходной характеристики сведены в табл. 4.6, а ее график изображен на рис. 4.4 кривой *1*. Кривая *2* на рис. 4.4 есть действительная переходная характеристика рассматриваемой системы.

Переходную характеристику замкнутой системы по ее вещественной или мнимой частотной характеристике можно построить также методом спектральных преобразований [1]. Метод не требует какой-либо аппроксимации вещественной или мнимой частотной характеристики и специальных таблиц. При расчете может быть использовано планиметрирование.

---

[1] **Саперштейн Н. Д., Сапожников Р. А., Файншмидт В. Л., Родин Б. П.** Процессы автоматического управления и обобщенное дифференцирование. М., «Высшая школа», 1973. 240 с.

Глава 5

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Частотные характеристики — это чрезвычайно популярное средство описания динамических свойств технических систем и в том числе систем автоматического регулирования. Это объясняется, во-первых, тем, что входное воздействие произвольного характера может быть представлено в виде эквивалентной ему суммы гармоник различной частоты; во-вторых, гармонический сигнал передается линейными элементами и системами в установившемся режиме без искажения.

В п. 2.5 даны определения частотных характеристик и показана взаимосвязь между ними. В табл. 2.3 приведены некоторые частотные характеристики типовых звеньев. Содержанием настоящей главы являются различные методы определения и построения частотных характеристик сложных динамических звеньев, их соединений и систем, которые необходимы для инженерных расчетов.

Потребность в частотных характеристиках возникает как при проектировании, так и при исследовании свойств спроектированных и выполненных систем. Например, амплитудно-частотные характеристики САР позволяют оценивать воспроизведение гармонического задающего воздействия и гашение гармонического возмущения при различных частотах. Логарифмические амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики разомкнутой системы часто используют для проверки устойчивости (см. гл. 6) и для выбора элементов, обеспечивающих желаемые динамические свойства системы (см. гл. 9). Вещественная частотная характеристика позволяет построить переходную характеристику (см. гл. 4). Эти примеры далеко не исчерпывают всего многообразия применения частотных характеристик в инженерных расчетах.

Частотные характеристики в общем случае рассматривают при изменении угловой частоты ω от 0 до ∞. Однако всякий реальный элемент может пропускать гармонические сигналы лишь некоторого конечного диапазона частот. Поэтому в каждом конкретном

случае целесообразно выяснить, в каком диапазоне частот следует рассматривать частотные характеристики.

Например, для электродвигателя предельное физически допустимое значение угловой частоты входного сигнала [130]

$$\omega_{\text{м}} = \sqrt{\frac{M_{\text{н}}\alpha_{\text{п}}}{iJ\,\Delta}}, \qquad (5.1)$$

где $M_{\text{н}}$ — номинальный момент двигателя; $\alpha_{\text{п}}$ — коэффициент допустимой перегрузки двигателя; i — передаточное число редуктора; J — момент инерции вращающихся масс; Δ — зазор механической передачи.

При расчетах систем с электродвигателем частотные характеристики рекомендуется [130] рассматривать лишь при $\omega < 0{,}5\omega_{\text{м}}$.

Для уменьшения затрат труда на вычисления и построения частотных характеристик используют зависимости между отдельными характеристиками, графоаналитические методы, номограммы и таблицы.

5.1. ПОСТРОЕНИЕ АМПЛИТУДНО-ФАЗОВОЙ ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАЗОМКНУТОЙ САР

Для построения амплитудно-фазовой частотной характеристики должна быть известна передаточная функция разомкнутой системы или экспериментально полученная АФЧХ объекта регулирования и передаточная функция регулятора.

В первом случае по передаточной функции W нужно определить частотную передаточную функцию $\overline{W}$ и затем представить ее в алгебраическом или показательном виде.

Пусть

$$W = \frac{kR}{Q},$$

где k — передаточный коэффициент; R и Q — полиномы от s степени соответственно m и n $(m \leqslant n)$, у которых коэффициент младшего члена равен единице.

После подстановки $s = j\omega$, получим

$$\overline{W} = \frac{k\,(u_1 + jv_1)}{u_2 + jv_2}, \qquad (5.2)$$

где u_1, v_1, u_2 и v_2 — полиномы от ω.

Чтобы представить $\overline{W}$ в алгебраическом виде, нужно числитель и знаменатель умножить на комплексное число, сопряженное со знаменателем, и затем отделить действительную часть от мнимой. В результате $\overline{W}$ примет следующий вид:

$$\overline{W} = \frac{k\,(u_1 + jv_1)\,(u_2 - jv_2)}{(u_2 + jv_2)\,(u_2 - jv_2)} = U + jV, \qquad (5.3)$$

где

$$U=\frac{k\,(u_1u_2+v_1v_2)}{u_2^2+v_2^2} \qquad (5.4)$$

и

$$V=\frac{k\,(v_1u_2-v_2u_1)}{u_2^2+v_2^2}. \qquad (5.5)$$

После этого иногда начинают определять значения U и V при различных произвольно выбранных значениях ω от 0 до ∞, наносят точки на комплексную плоскость U; jU и соединяют их плавной кривой. Однако при таком подходе, несмотря на трудоемкость подсчетов, наиболее важная часть характеристики может оказаться неточной.

Значительно целесообразнее сначала определить характерные точки АФЧХ: ее точки при предельных значениях ω ($\omega=0$ и $\omega=\infty$) и точки пересечения характеристикой осей координат.

Частоты, при которых характеристика пересекает ось ординат или ось абсцисс, определяют соответственно из уравнений

$$U=0,\ \text{т. е.}\ u_1u_2+v_1v_2=0, \qquad (5.6)$$

$$V=0,\ \text{т. е.}\ v_1u_2-v_2u_1=0. \qquad (5.7)$$

Искомыми частотами являются действительные положительные корни этих уравнений.

Найденные значения частот позволяют определить по равенствам (5.5) и (5.4) соответственно значения ординат и абсцисс, при которых АФЧХ пересекает эти оси.

После нанесения характерных точек на комплексную плоскость U; jV вырисовывается расположение АФЧХ. Иногда это оказывается достаточным для достижения цели, с которой строится характеристика. Если необходимо иметь точное ее расположение, то можно установить, при каких значениях частоты ω нужно вычислять значения U и V. Таким образом, предварительное определение характерных точек АФЧХ существенно упрощает расчет (что особенно важно при ручном счете).

Пример 5.1. Построить АФЧХ разомкнутой САР по ее передаточной функции

$$W=\frac{k\,(\tau s+1)}{a_0s^4+a_1s^3+a_2s^2+a_3s+1},$$

где $k=25$; $\tau=0{,}15$ с; $a_0=0{,}0002$ с^4; $a_1=0{,}006$ с^3; $a_2=0{,}08$ с^2; $a_3=0{,}5$ с.

Определим частотную передаточную функцию

$$\overline{W}=\frac{k\,(1+j\tau\omega)}{(1-a_2\omega^2+a_0\omega^4)+j\omega\,(a_3-a_1\omega^2)}.$$

Выделим ее действительную и мнимую части:

$$\overline{W}=\frac{k\,(1+j\tau\omega)\,[(1-a_2\omega^2+a_0\omega^4)-j\omega\,(a_3-a_1\omega^2)]}{[(1-a_2\omega^2+a_0\omega^4)+j\omega\,(a_3-a_1\omega^2)]\,[(1-a_2\omega^2+a_0\omega^4)-j\omega\,(a_3-a_1\omega^2)]}=U+jV,$$

где

$$U = \frac{kB_1}{B} \text{ и } V = \frac{kB_2}{B};$$

$$B_1 = 1 + (\tau a_3 - a_2)\,\omega^2 + (a_0 - \tau a_1)\,\omega^4 =$$
$$= 1 - 5\cdot 10^{-3}\omega^2 - 7\cdot 10^{-4}\omega^4;$$

$$B_2 = \omega\,[(\tau - a_3) + (a_1 - \tau a_2)\,\omega^2 + \tau a_0\omega^4] =$$
$$= -\,\omega\,(0{,}35 + 6\cdot 10^{-3}\omega^2 - 3\cdot 10^{-5}\omega^4);$$

$$B = 1 + (a_3^2 - 2a_2)\,\omega^2 + (a_2^2 + 2a_0 - 2a_1a_3)\,\omega^4 +$$
$$+ (a_1^2 - 2a_0a_2)\,\omega^6 + a_0^2\omega^8 = 1 + 0{,}09\omega^2 + 8\cdot 10^{-4}\omega^4 +$$
$$+ 4\cdot 10^{-6}\omega^6 + 4\cdot 10^{-8}\omega^8.$$

Определим значения U и V при предельных значениях ω:

$$U(0) = \frac{kB_1(0)}{B(0)} = k = 15; \quad V(0) = \frac{kB_2(0)}{B(0)} = 0;$$

$$U(\infty) = \frac{kB_1(\infty)}{B(\infty)} = 0; \quad V(\infty) = \frac{kB_2(\infty)}{B(\infty)} = 0.$$

Составим условие пересечения АФЧХ оси ординат:

$$B_1 = 0, \text{ т. е. } 1 - 5\cdot 10^{-3}\omega^2 - 7\cdot 10^{-4}\omega^4 = 0.$$

Полученное биквадратное уравнение имеет один положительный действительный корень $\omega_1 = 5{,}86$. Следовательно, АФЧХ пересекает ось ординат при $\omega = \omega_1$ и $V(\omega_1) = \dfrac{kB_2(\omega_1)}{B(\omega_1)} = -8{,}65$.

Составим условие пересечения АФЧХ оси абсцисс:

$$B_2 = 0, \text{ т. е. } \omega\,(0{,}35 + 6\cdot 10^{-3}\omega^2 - 3\cdot 10^{-5}\omega^4) = 0.$$

Биквадратное уравнение

$$0{,}35 + 6\cdot 10^{-3}\omega^2 - 3\cdot 10^{-5}\omega^4 = 0$$

имеет один положительный действительный корень $\omega_2 = 15{,}7$. Следовательно, АФЧХ пересекает ось абсцисс при $\omega = \omega_2$ и

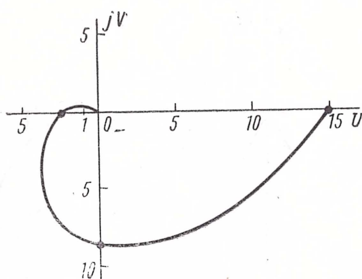
$$U(\omega_2) = \frac{kB_1(\omega_2)}{B(\omega_2)} = -2{,}29.$$

Полученные данные и выражения для U и V позволяют сделать следующее заключение о расположении АФЧХ:

$$\omega = 0 : U = 15 \text{ и } V = 0;$$
$$0 < \omega < 5{,}86 : U > 0 \text{ и } V < 0;$$
$$\omega = 5{,}86 : U = 0 \text{ и } V = -8{,}65;$$
$$5{,}86 < \omega < 15{,}7 : U < 0 \text{ и } V < 0;$$
$$\omega = 15{,}7 : U = -2{,}29 \text{ и } V = 0;$$
$$15{,}7 < \omega < \infty : U < 0 \text{ и } V > 0;$$
$$\omega = \infty : U = V = 0.$$

На основании этих данных построена ориентировочная АФЧХ (рис. 5.1). По ней уже можно, например, решить вопрос об устойчивости системы (см. гл. 6). Для уточнения АФЧХ следует вычислить значения U и V при $\omega = 2$; 4; 10; 13; 25 и 50 $с^{-1}$.

Рис. 5.1. Ориентировочная АФЧХ к примеру 5.1



Частотную передаточную функцию, определяемую выражением (5.2), можно представить в показательном виде

$$\overline{W} = Ae^{j\psi}, \tag{5.8}$$

где

$$A = k\sqrt{\frac{u_1^2 + v_1^2}{u_2^2 + v_2^2}}; \tag{5.9}$$

$$\psi = \operatorname{arctg}\frac{v_1}{u_1} - \operatorname{arctg}\frac{v_2}{u_2} = \operatorname{arctg}\frac{v_1 u_2 - v_2 u_1}{u_1 u_2 + v_1 v_2}. \tag{5.10}$$

По формулам (5.9) и (5.10) можно вычислить длины и фазовые углы векторов $\overline{W}$ при различных значениях ω от 0 до ∞ и построить затем АФЧХ. Предварительно целесообразно определить ее характерные точки: при $\omega = 0$, $\omega = \infty$ и точки пересечения осей координат. Условиями пересечения оси ординат и оси абсцисс являются соответственно равенства:

$$\operatorname{tg}\psi = \infty, \text{ т. е. } u_1 u_2 + v_1 v_2 = 0, \tag{5.11}$$

$$\operatorname{tg}\psi = 0, \text{ т. е. } v_1 u_2 - v_2 u_1 = 0. \tag{5.12}$$

Пример 5.2. Построить АФЧХ разомкнутой САР с передаточной функцией

$$W = \frac{k(\tau s + 1)}{a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + 1},$$

где $k = 2$; $\tau = 0{,}25$ с; $a_0 = 0{,}002$ с^3; $a_1 = 0{,}075$ с^2 и $a_2 = 0{,}2$ с.

Определим частотную передаточную функцию

$$\overline{W} = \frac{k(1 + j\tau\omega)}{(1 - a_1\omega^2) + j\omega(a_2 - a_0\omega^2)}.$$

Составим выражения для вычисления длин и фазовых углов векторов:

$$A = k\sqrt{\frac{1 + v_1^2}{u_2^2 + v_2^2}};$$

$$\psi = \operatorname{arctg} v_1 - \operatorname{arctg}\frac{v_2}{u_2},$$

где

$$v_1 = \tau\omega = 0{,}25\omega;$$

$$u_2 = 1 - a_1\omega^2 = 1 - 0{,}075\omega^2;$$

$$v_2 = \omega(a_2 - a_0\omega^2) = \omega(0{,}2 - 0{,}002\omega^2).$$

Вычислим значения A и ψ при предельных значениях ω:

$$A(0) = k = 2;\ \psi(0) = 0;\ A(\infty) = 0.$$

Выпишем условие (5.11) пересечения оси ординат:

$$(1 - 0{,}075\omega^2) + 0{,}25\omega^2(0{,}2 - 0{,}002\omega^2) = 1 - 0{,}025\omega^2 - 0{,}0005\omega^4 = 0.$$

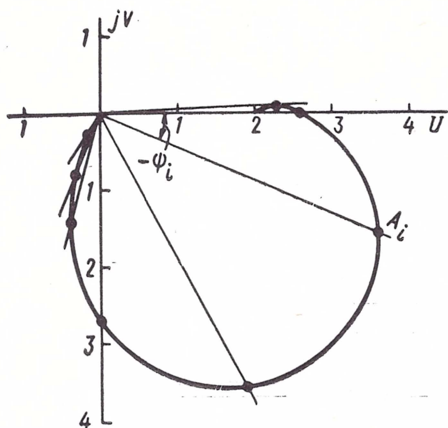


Рис. 5.2. АФЧХ к примеру 5.2

Положительный действительный корень полученного уравнения $\omega = 5{,}12$

Составим условие (5.12) пересечения оси абсцисс:

$$0{,}25\omega\,(1 - 0{,}075\omega^2) - \omega\,(0{,}2 - -0{,}002\omega^2) = \omega\,(0{,}05 - 0{,}01675\omega^2) = = 0.$$

Полученное уравнение имеет положительный действительный корень $\omega = 1{,}74$.

Итак, АФЧХ начинается на оси абсцисс и $A(0) = 2$, затем при $\omega = 1{,}74$ эта ось пересекается и при $\omega = 5{,}12$ пересекается ось ординат. Заканчивается АФЧХ в начале осей координат. На основании этих сведений об АФЧХ намечаем частоты для вычисления значений A и ψ и проводим эти вычисления, сводя их в табл. 5.1. По результатам расчета строим АФЧХ (рис. 5.2). Для каждой частоты ω_i проводится радиус-вектор под углом ψ_i (угол отсчитываем от положительной действительной полуоси против часовой стрелки) и на него наносят точку на расстоянии A_i от начала осей координат. Плавная кривая, соединяющая эти точки, является искомой АФЧХ.

Иногда возникает задача построения АФЧХ разомкнутой САР по известным частотным характеристикам двух ее последовательно соединенных звеньев: объекта регулирования и регулятора. По формуле (2.41) передаточная функция двух последовательно соединенных звеньев равна произведению передаточных функций этих звеньев. Очевидно, что формула (2.41) справедлива и для частотных передаточных функций. Тогда легко получить следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} A &= A_1 A_2, \\ \psi &= \psi_1 + \psi_2 = \operatorname{arctg}\frac{V_1}{U_1} + \operatorname{arctg}\frac{V_2}{U_2}, \end{aligned}\right\} \qquad (5.13)$$

где $A = A(\omega)$ и $\psi = \psi(\omega)$ — амплитудная и фазовая частотные характеристики разомкнутой системы; $A_k = A_k(\omega)$, $\psi_k = \psi_k(\omega)$, $U_k = U_k(\omega)$ и $V_k = V_k(\omega)$ — амплитудная, фазовая, вещественная и мнимая частотные характеристики соединенных звеньев (объекта регулирования при $k = 1$ и регулятора при $k = 2$).

Соотношения (5.13) позволяют вычислить значения амплитудной и фазовой частотных характеристик разомкнутой системы при каждом значении частоты.

Если амплитудная $A_1 = A_1(\omega)$ и фазовая $\psi_1 = \psi_1(\omega)$ частотные характеристики объекта регулирования получены экспериментально и известна частотная передаточная функция $\overline{W}_2 = \overline{W}_2(j\omega)$ регулятора, то для частот ω_i, при которых проводился

Таблица 5.1

Результаты расчета к примеру 5.2

ω	ω^2	v_1	v_1^2	$1+v_1^2$	u_2	u_2^2	v_2
1	1	0,25	0,063	1,063	0,925	0,856	0,198
1,74	3,02	0,435	0,189	1,189	0,773	0,598	0,337
3	9	0,75	0,563	1,563	0,325	0,106	0,546
4	16	1,00	1,00	2,00	—0,20	0,040	0,672
5,12	26,2	1,28	1,64	2,64	—0,968	0,937	0,756
7	49	1,75	3,06	4,06	—2,68	7,16	0,714
10	100	2,5	6,25	7,25	—6,50	42,3	0
20	400	5,0	25,0	26,0	—29,0	841	—12,0
30	900	7,5	56,3	57,3	—66,5	4 422	—48,0
40	1600	10,0	100	101	—119	14 160	—120

v_2^2	$u_2^2+v_2^2$	$\dfrac{1+v_1^2}{u_2^2+v_2^2}$	A	arctg v_1, град	$\dfrac{v_2}{u_2}$	arctg $\dfrac{v_2}{u_2}$, град	ψ, град
0,039	0,895	1,19	2,18	14,0	0,214	12,0	2,0
0,114	0,712	1,67	2,58	23,5	0,436	23,5	0
0,298	0,404	3,87	3,93	36,9	1,68	59,2	—22,3
0,452	0,492	4,07	4,03	45,0	—3,36	106,6	—61,6
0,571	1,508	1,75	2,64	52,0	—0,781	142,0	—90,0
0,510	7,670	0,53	1,46	60,3	—0,267	165,1	—104,8
0	42,3	0,172	0,83	68,2	0	180,0	—111,8
144	985	0,026	0,33	78,7	0,414	202,5	—123,8
2 304	6 926	0,0083	0,18	82,4	0,722	215,8	—133,4
14 400	28 560	0,0035	0,04	84,3	1,00	225,0	—140,7

Рис. 5.4. АФЧХ к примеру 5.3

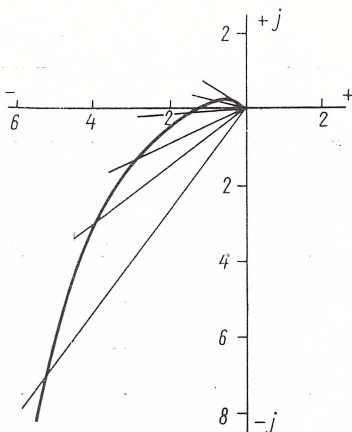
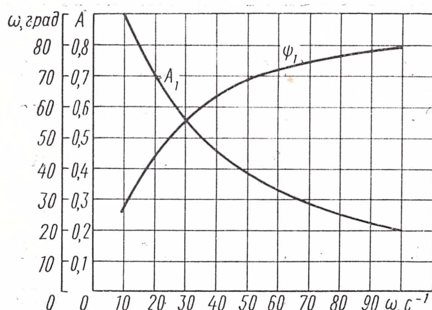


Рис. 5.3. Амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики к примеру 5.3



эксперимент определяют значения A_{1i} и ψ_{1i} по характеристикам A_1 и ψ_1 и вычисляют значения A_{2i} и ψ_{2i} по частотной передаточной функции $\overline{W}_2$. Остается для каждой такой частоты определить значения A_i и ψ_i по формулам (5.13), нанести полученные точки на комплексную плоскость и соединить их плавной кривой.

Пример 5.3. Построить АФЧХ разомкнутой цепи САР, состоящей из объекта регулирования, частотные характеристики которого представлены на рис. 5.3, и регулятора с передаточной функцией

$$W_2 = \frac{k_2}{s(T_2 s + 1)},$$

где

$$k_2 = 100;\ T_2 = 0{,}02\ \text{с}.$$

Частотными характеристиками объекта охватывается диапазон частот от 10 до 100 $с^{-1}$. Следовательно, и АФЧХ может быть построена только для этого диапазона частот. Значения A и ψ будем определять при частотах 10; 15; 20; 30; 40; 60; 80 и 100 $с^{-1}$.

По частотным характеристикам объекта для каждой из выбранных частот определим значения A_1 и ψ_1 и занесем их в табл. 5.2.

Определим частотную передаточную функцию регулятора

$$\overline{W}_2 = \frac{k_2}{j\omega(1 + jT_2\omega)} = \frac{k_2}{(-T_2\omega + j)\,\omega}.$$

Затем составим аналитические выражения для частотных характеристик регулятора:

$$A_2 = \frac{k_2}{\omega\sqrt{1 + T_2^2\omega^2}} = \frac{100}{\omega\sqrt{1 + (0{,}02\omega)^2}},$$

$$\psi_2 = -90° - \operatorname{arctg} T_2\omega = -90° - \operatorname{arctg} 0{,}02\omega$$

и определим значения A_2 и ψ_2 при выбранных частотах. Результаты расчета занесены в табл. 5.2.

В заключение при каждой из выбранных частот определим по формулам (5.13) длину и фазовый угол результирующего вектора, нанесем полученные точки АФЧХ на комплексную плоскость и соединим их плавной кривой (рис. 5.4).

Таблица 5.2

Данные расчета к примеру 5.3

ω	A_1	ψ_1, град	$0,02\omega$	$(0,02\omega)^2$	$\sqrt{1+(0,02\omega)^2}$	A_2	ψ_2, град	A	ψ, град
10	0,89	—26	0,2	0,04	1,02	9,80	—101	8,7	—127
15	0,80	—37	0,3	0,09	1,04	6,40	—107	5,1	—144
20	0,71	—45	0,4	0,16	1,08	4,64	—112	3,3	—156
30	0,56	—56	0,6	0,36	1,17	2,84	—121	1,6	—177
40	0,45	—63	0,8	0,64	1,28	1,91	—129	0,86	—192
60	0,32	—72	1,2	1,44	1,56	1,07	—140	0,34	—212
80	0,24	—76	1,6	2,56	1,89	0,66	—148	0,16	—224
100	0,20	—79	2,0	4,00	2,24	0,45	—153	0,09	—232

5.2. СВЯЗЬ МЕЖДУ ЧАСТОТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ЗАМКНУТОЙ И РАЗОМКНУТОЙ САР

В системе с единичной обратной связью частотная передаточная функция $\overline{\Phi} = \overline{\Phi}(j\omega)$ относительно задающего воздействия

$$\overline{\Phi} = \frac{\overline{W}}{1+\overline{W}}, \tag{5.14}$$

где $\overline{W} = \overline{W}(j\omega)$ — частотная передаточная функция разомкнутой системы.

Равенство (5.14) определяет связь между частотными характеристиками замкнутой и разомкнутой систем.

Подставив в равенство (5.14)

$$\overline{\Phi} = P + jN \text{ и } \overline{W} = U + jV,$$

где

$$P = P(\omega);\ N = N(\omega);\ U = U(\omega) \text{ и } V = V(\omega),$$

и разделив его действительную и мнимую части, получим

$$P = \frac{U(1+U)+V^2}{(1+U)^2+V^2}; \tag{5.15}$$

$$N = \frac{V}{(1+U)^2+V^2}. \tag{5.16}$$

Равенства (5.15) и (5.16) определяют зависимость соответственно вещественной и мнимой частотных характеристик замкнутой системы от таких же характеристик разомкнутой системы.

Подставив в равенство (5.14)

$$\overline{\Phi} = Me^{j\theta} \text{ и } \overline{W} = U + jV,$$

где

$$M = M(\omega) \text{ и } \theta = \theta(\omega),$$

и разделив его модуль и аргумент, получим:

$$M = +\sqrt{\frac{U^2 + V^2}{(1 + U)^2 + V^2}}; \tag{5.17}$$

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{V}{U(1 + U) + V^2}. \tag{5.18}$$

Равенства (5.17) и (5.18) определяют зависимость соответственно амплитудной и фазовой частотных характеристик замкнутой системы от вещественной и мнимой частотных характеристик разомкнутой системы.

Легко составить и равенства, определяющие обратную зависимость частотных характеристик разомкнутой системы от вещественной и мнимой частотных характеристик замкнутой системы:

$$U = \frac{P(1 - P) - N^2}{(1 - P)^2 + N^2};$$

$$V = \frac{N}{(1 - P)^2 + N^2};$$

$$A = +\sqrt{\frac{P^2 + N^2}{(1 - P)^2 + N^2}};$$

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{N}{P(1 - P) - N^2}. \tag{5.19}$$

Для определения частотных характеристик P, N, M и θ замкнутой системы по частотным характеристикам U и V ее разомкнутой цепи вместо формул (5.15)—(5.18) можно использовать графический метод круговых диаграмм. Точность расчетов при этом ниже, но она все же достаточна для практических целей.

Суть метода круговых диаграмм [32, 106] заключается в следующем. Формулы (5.15)—(5.18) можно рассматривать как уравнения кривых в системе координат U; V, каждая из которых определяет некоторое постоянное значение соответственно P, N, M или θ. Уравнения всех этих четырех кривых есть уравнения окружностей, причем положение центра и значение радиуса каждой зависит соответственно от P, N, M или θ.

Поэтому, задавшись различными значениями, предположим P, можно построить семейство окружностей в системе координат U; V — это будет вещественная круговая диаграмма. Если затем в этой же системе координат построить АФЧХ разомкнутой цепи интересующей нас системы, то по точкам ее пересечения с семейством окружностей можно определить вещественную

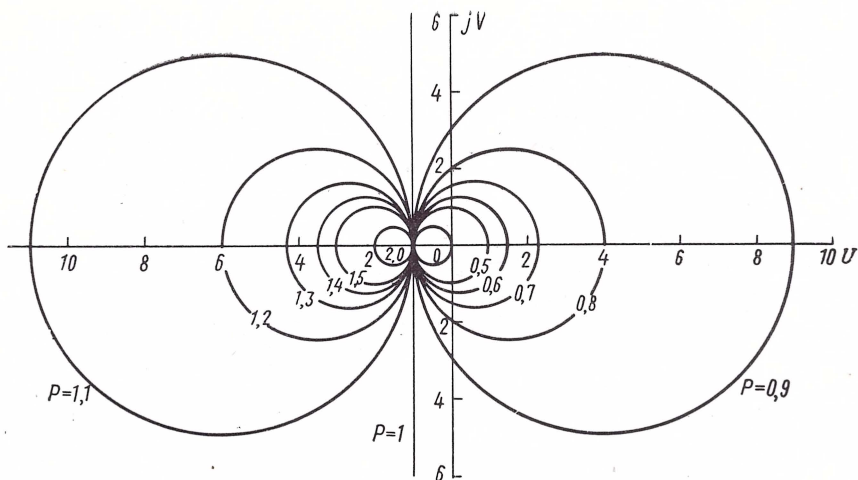


Рис. 5.5. Вещественная круговая диаграмма

частотную характеристику $P(\omega)$ этой системы в замкнутом состоянии. Точка АФЧХ, соответствующая некоторой частоте ω_i и совпадающая с окружностью $P = P_a$, определяет значение P при частоте $\omega_i : P(\omega_i) = P_a$.

Точно так же строят и используют мнимую, амплитудную и фазовую круговые диаграммы.

Вещественная круговая диаграмма (рис. 5.5) состоит из семейства окружностей радиуса

$$r_i = \frac{1}{2\,|1 - P|}. \tag{5.20}$$

Центр каждой из них расположен на действительной оси от начала осей координат на расстоянии

$$d = -\frac{1 - 2P}{2(1 - P)}. \tag{5.21}$$

Все окружности пересекают ось абсцисс в критической точке $(-1;\ j0)$. При $P = 1$ окружность вырождается в прямую, которая проходит через эту точку параллельно оси ординат и делит всю плоскость на две области. Левая область соответствует значениям $P > 1$, правая — значениям $P < 1$. Область, соответствующая отрицательным значениям P, ограничивается окружностью, проходящей через начало осей координат и критическую точку.

Часть вещественной круговой диаграммы, прилегающая к критической точке, показана на рис. 5.6.

Мнимая круговая диаграмма (рис. 5.7) состоит из окружностей радиуса

$$r_i = \frac{1}{2\,|N|}. \tag{5.22}$$

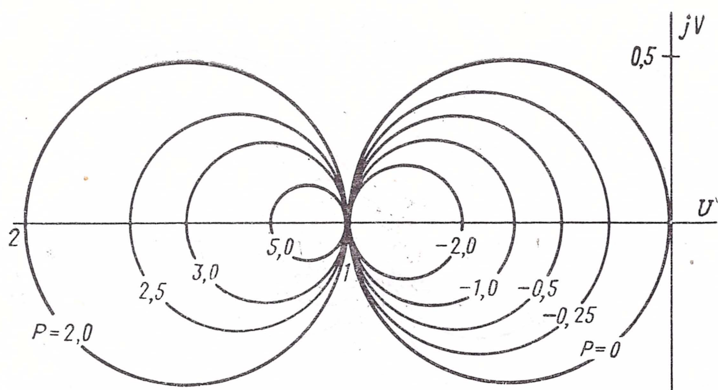


Рис. 5.6. Вещественная круговая диаграмма вблизи критической точки (—1; j 0)

Их центры расположены на прямой, проходящей через критическую точку (—1; $j0$) параллельно оси ординат, и находятся от действительной оси на расстоянии

$$d = \frac{1}{2N}. \qquad (5.23)$$

При $N = 0$ окружность вырождается в прямую, совпадающую с осью абсцисс. Она делит плоскость на две области. Верхняя область соответствует положительным значениям N, нижняя — отрицательным.

Амплитудная круговая диаграмма (рис. 5.8 и 5.9) состоит из окружностей радиуса

$$r_i = \frac{M}{|1 - M^2|}. \qquad (5.24)$$

Их центры расположены на оси абсцисс от начала осей координат на расстоянии

$$d = -\frac{M^2}{M^2 - 1}. \qquad (5.25)$$

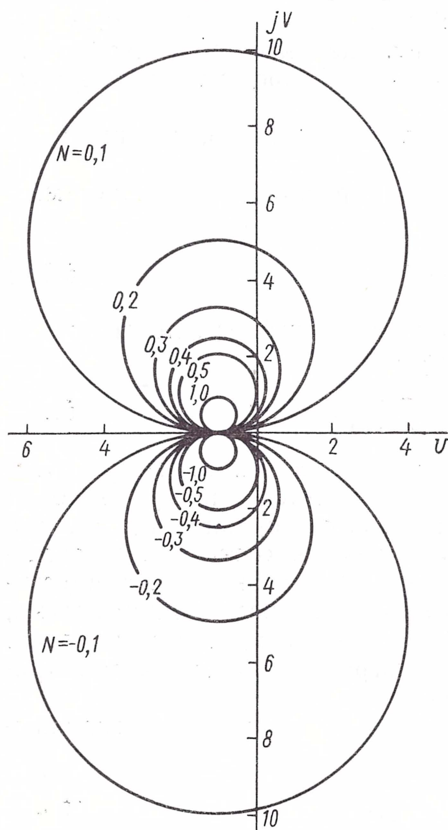


Рис. 5.7 Мнимая круговая диаграмма

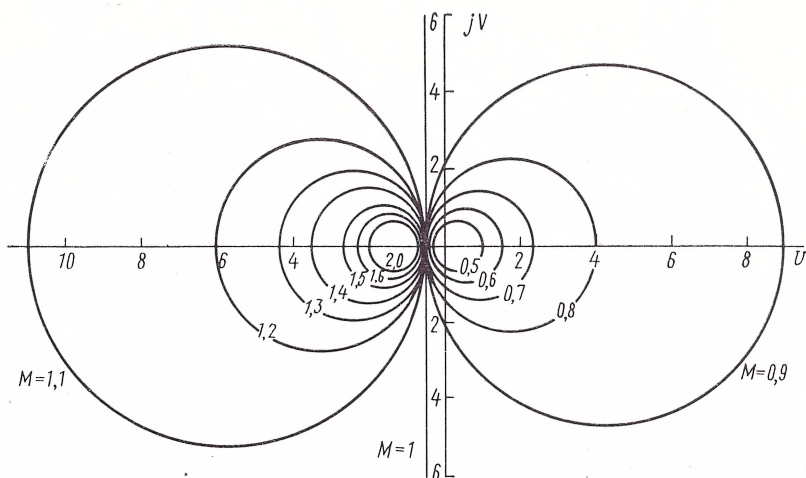


Рис. 5.8. Амплитудная круговая диаграмма

При $M = 1$ окружность вырождается в прямую, которая параллельна оси ординат и пересекает ось абсцисс в точке (—0,5; $j0$).

Область слева от этой прямой соответствует значениям $M > 1$, область справа — значениям $M < 1$.

Фазовая круговая диаграмма (рис. 5.10) состоит из окружностей, которые проходят через начало осей координат и критическую точку (—1; $j0$). Центры окружностей располагаются на

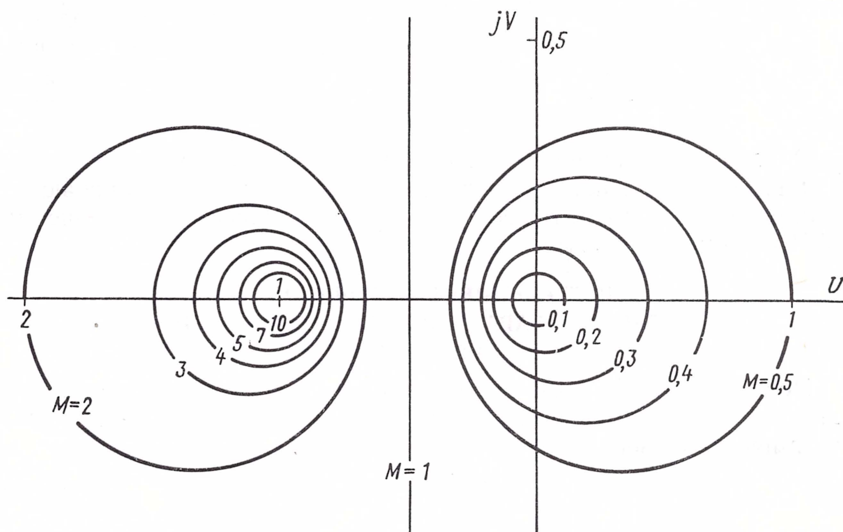


Рис. 5.9. Амплитудная круговая диаграмма вблизи критической точки (—1; $j0$)

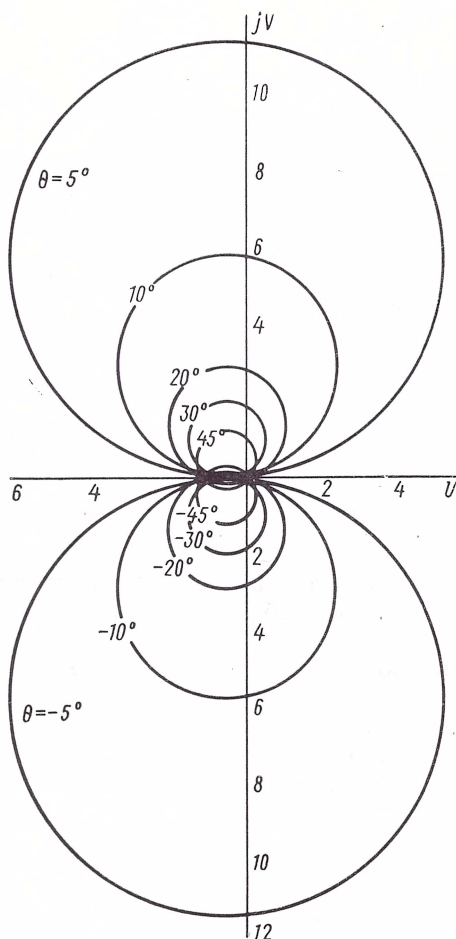


Рис. 5.10. Фазовая круговая диаграмма

прямой, которая параллельна оси ординат и имеет абсциссу —0,5. Расстояние центров окружностей от оси абсцисс

$$d = \frac{1}{2 \operatorname{tg} \theta}. \tag{5.26}$$

Радиусы этих окружностей

$$r_i = \frac{1}{2 \sin \theta}. \tag{5.27}$$

Круговые диаграммы удобно вычерчивать на прозрачной бумаге и затем накладывать на чертеж с АФЧХ разомкнутой системы. Масштабы чертежей должны быть одинаковыми и достаточно крупными. Это позволит изобразить на круговой диаграмме значительное число окружностей и определить частотные характеристики замкнутой системы с большой точностью. Участок АФЧХ около начала осей координат и соответствующую область круговой диаграммы обычно вычерчивают в более крупном масштабе.

Основное затруднение при использовании круговых диаграмм и причина погрешностей, возникающих при этом, заключаются в определении частот, соответствующих точкам пересечения АФЧХ с окружностями.

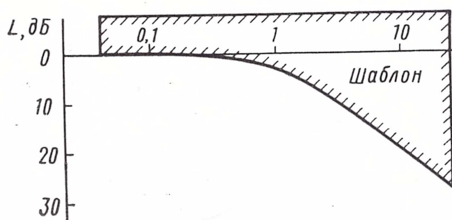
5.3. ПОСТРОЕНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК РАЗОМКНУТОЙ ОДНОКОНТУРНОЙ САР

Передаточная функция одноконтурной разомкнутой САР представляет собой произведение передаточных функций типовых динамических звеньев:

$$W = \prod_{i=1}^{l} W_i, \tag{5.28}$$

или может быть приведена к такому виду.

Рис. 5.11. Шаблон для построения ЛАЧХ звеньев первого порядка



Ее логарифмические амплитудно- и фазочастотные характеристики определяются соответственно равенствами

$$L = 20 \lg |\overline{W}| = \sum_{i=1}^{l} 20 \lg |\overline{W}_i|; \tag{5.29}$$

$$\psi = \arg \{\overline{W}\} = \sum_{i=1}^{l} \arg \{\overline{W}_i\}, \tag{5.30}$$

где $L = L(\omega)$, $\psi = \psi(\omega)$, $\overline{W} = \overline{W}(j\omega)$ и $\overline{W}_i = \overline{W}_i(j\omega)$.

Таким образом, ЛАЧХ разомкнутой одноконтурной системы равна сумме ЛАЧХ, составляющих ее звеньев, и ЛФЧХ равна сумме ЛФЧХ этих звеньев. Следовательно, для построения ЛАЧХ и ЛФЧХ системы достаточно построить и просуммировать ЛАЧХ всех звеньев, а затем построить и просуммировать ЛФЧХ всех звеньев.

Асимптотические ЛАЧХ типовых динамических звеньев приведены в табл. 2.3, поэтому построение асимптотической ЛАЧХ системы не может вызвать затруднений.

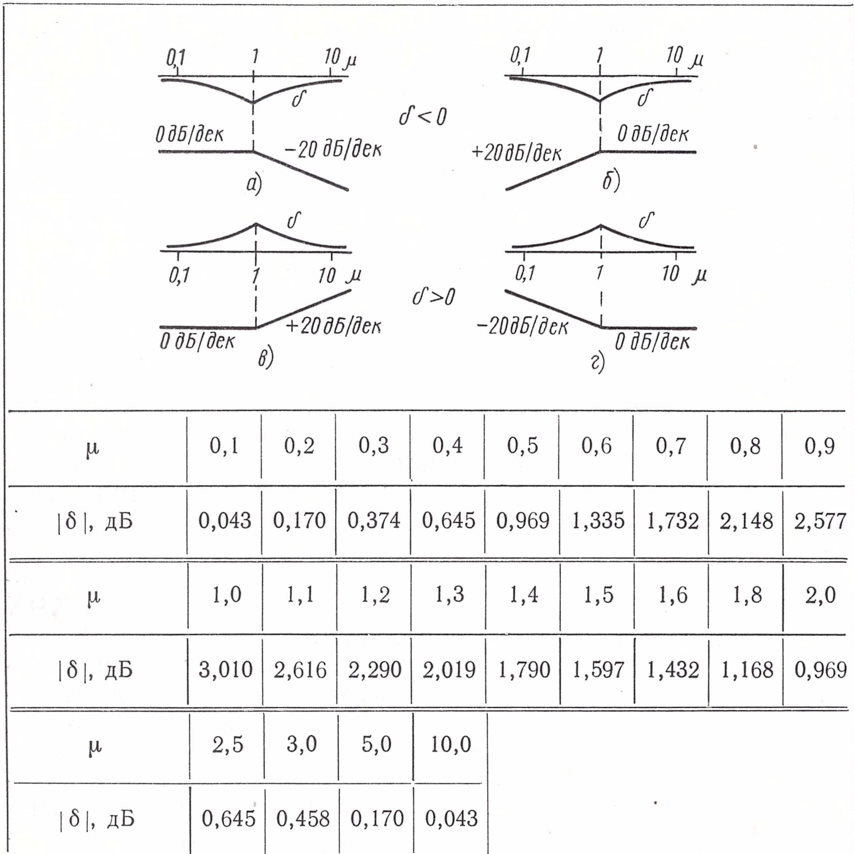
У звеньев первого порядка (их передаточные функции содержат полином $Ts + 1$ или $\tau s + 1$) максимальное отклонение асимптотической ЛАЧХ от действительной составляет только 3 Дб. Однако у звеньев второго порядка (их передаточные функции содержат полином $T^2s^2 + 2\xi Ts + 1$, где $0 < \xi < 1$, или полином $\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1$, где $0 < \zeta < 1$) асимптотическая ЛАЧХ лишь при $0{,}4 \leqslant \xi \leqslant 0{,}7$ и $0{,}4 \leqslant \zeta \leqslant 0{,}7$ отклоняется от действительной не более чем на 3 дБ, а при малых ξ и ζ различие между действительной и асимптотической ЛАЧХ существенное и стремится к бесконечности при $\xi \to 0$ и $\zeta \to 0$. Поэтому во многих случаях необходима действительная ЛАЧХ разомкнутой системы, которую можно получить, суммируя действительные ЛАЧХ отдельных звеньев.

Действительную ЛАЧХ звена первого порядка можно построить с помощью шаблона, который изготовляют из твердого и прозрачного материала. Шаблон (рис. 5.11) прикладывают к чертежу так, чтобы его асимптоты совпадали с асимптотической ЛАЧХ и относительная частота $\mu = \frac{\omega}{\omega_0} = 1$ совпадала с сопрягающей частотой ω_0. Затем проводят кривую действительной ЛАЧХ.

Таблица 5.3

Поправки δ к асимптотическим ЛАЧХ с наклоном ±20 дБ/дек

$\left(\mu = \frac{\omega}{\omega_0};\ \omega_0 \text{ — сопрягающая частота}\right)$

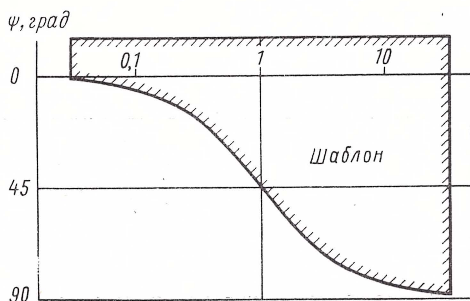


μ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
|δ|, дБ	0,043	0,170	0,374	0,645	0,969	1,335	1,732	2,148	2,577
μ	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,8	2,0
|δ|, дБ	3,010	2,616	2,290	2,019	1,790	1,597	1,432	1,168	0,969
μ	2,5	3,0	5,0	10,0					
|δ|, дБ	0,645	0,458	0,170	0,043					

Действительную ЛАЧХ типового звена как первого, так и второго порядка удобно получить, суммируя ординаты асимптотической ЛАЧХ с поправками δ. Значения модуля поправки δ в зависимости от относительной частоты μ приведены в табл. 5.3 и 5.4. Рисунки, помещенные в этих таблицах, показывают, с каким знаком должны быть взяты поправки при этой или иной форме асимптотической ЛАЧХ.

Данные для построения ЛФЧХ типовых звеньев приведены в табл. 5.5. Она содержит значения модуля фазы ψ в зависимости от относительной частоты μ при различных значениях ξ или ζ. Рисунки, имеющиеся в таблице, указывают знак и расположение ЛФЧХ при различной форме асимптотической ЛАЧХ.

Рис. 5.12. Шаблон для построения ЛФЧХ звеньев первого порядка



ЛФЧХ звеньев первого порядка можно строить с помощью шаблона (рис. 5.12). Располагать шаблон нужно в соответствии с табл. 2.3.

Несомненное преимущество рассмотренного метода построения в том, что он позволяет легко выяснить влияние каждого из звеньев на форму логарифмических частотных характеристик системы. Однако проще поступать несколько иначе: сначала построить асимптотическую ЛАЧХ всей системы и затем сделать поправки, если это необходимо, и строить ЛФЧХ.

Для этого передаточную функцию нужно привести к виду

$$W = \frac{k \prod_{j=1}^{r} R_j}{s^{\nu} \prod_{i=1}^{l} Q_i}, \tag{5.31}$$

где k — передаточный коэффициент; ν — порядок астатизма; R_j — полиномы вида $\tau_j s + 1$ и $\tau_j^2 s^2 + 2\zeta_j \tau_j s + 1$ $(\zeta_j < 1)$; Q_i — полиномы вида $T_i s + 1$ и $T_i^2 s^2 + 2\xi_i T s + 1$ $(\xi_i < 1)$.

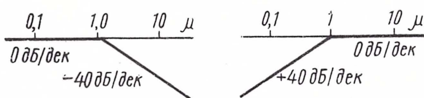
Прежде всего нужно определить сопрягающие частоты $\omega_i = \frac{1}{T_i}$ и $\omega_j = \frac{1}{\tau_j}$ и отметить их на графике (для каждой частоты провести штриховую линию). После этого можно построить низкочастотную асимптоту ЛАЧХ. Ее наклон составляет -20ν дБ/дек. Ордината низкочастотной ЛАЧХ или ее продолжения при $\omega = 1$ будет $20 \lg k$ дБ. Для быстрого перевода натуральных чисел в децибелы служат номограммы (рис. 5.13). Каждая из них имеет пять шкал натуральных чисел A и пять шкал соответствующих им значений L в дБ. Со шкалы A нужно переходить на соединенную с ней шкалу L. Например, натуральному числу $A = 12{,}5$ соответствует (рис. 5.13, *а*) $L \approx 21{,}9$ дБ; натуральному числу $A = 0{,}725$ соответствует (рис. 5.13, *б*) $L \approx -2{,}8$ дБ.

Низкочастотную асимптоту ЛАЧХ проводят до первой (наименьшей) сопрягающей частоты. На всех сопрягающих частотах наклон ЛАЧХ изменяется. На сопрягающих частотах, созданных полиномами числителя передаточной функции W, изменение наклона положительное (табл. 5.6). Наоборот, на сопрягающих частотах, созданных полиномами знаменателя W, изменение наклона отрицательное.

Высокочастотную (после наибольшей сопрягающей частоты) асимптоту проводят на требуемом диапазоне частоты.

Поправки δ к асимптотическим

$\left(\mu = \frac{\omega}{\omega_0};\ \omega_0\right.$ — **сопря**



Значения δ из таблицы

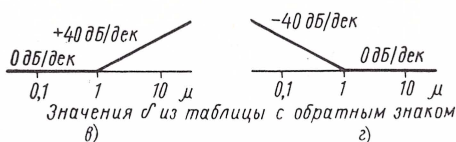
а) *б)*

ξ или ζ	Значения δ при										
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1
0,025	0,09	0,35	0,82	1,51	2,49	3,87	5,83	8,82	14,19	26,02	14,92
0,050	0,09	0,35	0,82	1,51	2,48	3,84	5,77	8,67	13,55	20,00	14,16
0,075	0,09	0,35	0,81	1,49	2,46	3,79	5,67	8,42	12,65	16,48	13,12
0,100	0,09	0,35	0,80	1,48	2,42	3,73	5,53	8,09	11,64	13,98	11,99
0,125	0,08	0,34	0,79	1,45	2,38	3,64	5,37	7,71	10,62	12,04	10,87
0,150	0,08	0,34	0,78	1,43	2,33	3,55	5,17	7,28	9,63	10,46	9,81
0,175	0,08	0,33	0,76	1,40	2,27	3,43	4,95	6,82	8,69	9,12	8,82
0,200	0,08	0,32	0,74	1,36	2,20	3,31	4,70	6,35	7,81	7,96	7,90
0,225	0,08	0,32	0,72	1,32	2,12	3,17	4,45	5,86	6,99	6,94	7,04
0,250	0,08	0,31	0,70	1,27	2,04	3,01	4,17	5,38	6,22	6,02	6,26
0,275	0,07	0,30	0,68	1,23	1,95	2,85	3,89	4,91	5,51	5,19	5,53
0,300	0,07	0,29	0,65	1,17	1,85	2,68	3,60	4,44	4,85	4,44	4,85
0,325	0,07	0,28	0,62	1,12	1,75	2,51	3,31	3,98	4,22	3,74	4,21
0,350	0,07	0,26	0,59	1,06	1,64	2,32	3,01	3,53	3,64	3,10	3,61
0,375	0,06	0,25	0,56	0,99	1,53	2,13	2,71	3,10	3,08	2,50	3,05
0,400	0,06	0,24	0,53	0,93	1,41	1,94	2,41	2,68	2,56	1,94	2,53
0,425	0,06	0,22	0,49	0,86	1,29	1,74	2,12	2,28	2,07	1,41	2,03
0,450	0,05	0,20	0,45	0,78	1,16	1,54	1,82	1,88	1,60	0,92	1,55
0,475	0,05	0,19	0,41	0,71	1,03	1,34	1,53	1,50	1,15	0,45	1,10
0,500	0,04	0,17	0,37	0,63	0,90	1,14	1,25	1,14	0,73	0,00	0,67
0,525	0,04	0,15	0,33	0,55	0,77	0,93	0,97	0,78	0,32	−0,42	0,26
0,550	0,03	0,13	0,28	0,46	0,63	0,73	0,69	0,44	−0,07	−0,83	−0,13
0,575	0,03	0,11	0,24	0,38	0,49	0,53	0,42	0,11	−0,44	−1,21	−0,50
0,600	0,02	0,09	0,19	0,29	0,35	0,32	0,15	−0,22	−0,80	−1,58	−0,86
0,625	0,02	0,07	0,14	0,20	0,21	0,12	−0,11	−0,53	−1,15	−1,94	−1,21
0,650	0,01	0,05	0,09	0,11	0,07	−0,08	−0,37	−0,83	−1,48	−2,28	−1,54
0,675	0,01	0,02	0,03	0,01	−0,08	−0,28	−0,62	−1,13	−1,80	−2,61	−1,86
0,700	0,00	0,00	−0,02	−0,08	−0,22	−0,47	−0,87	−1,41	−2,11	−2,92	−2,17
0,725	0,00	−0,02	−0,07	−0,18	−0,37	−0,67	−1,11	−1,69	−2,40	−3,23	−2,47
0,750	−0,01	−0,05	−0,13	−0,28	−0,51	−0,86	−1,34	−1,96	−2,69	−3,52	−2,76
0,775	−0,02	−0,08	−0,19	−0,37	−0,66	−1,05	−1,58	−2,22	−2,97	−3,81	−3,04
0,800	−0,02	−0,10	−0,25	−0,47	−0,80	−1,24	−1,80	−2,47	−3,24	−4,08	−3,32
0,825	−0,03	−0,13	−0,31	−0,57	−0,94	−1,43	−2,03	−2,72	−3,51	−4,35	−3,58
0,850	−0,04	−0,16	−0,37	−0,67	−1,09	−1,61	−2,24	−2,96	−3,76	−4,61	−3,84
0,875	−0,05	−0,19	−0,43	−0,78	−1,23	−1,80	−2,46	−3,20	−4,01	−4,86	−4,08
0,900	−0,05	−0,22	−0,49	−0,88	−1,38	−1,98	−2,67	−3,43	−4,25	−5,11	−4,33
0,925	−0,06	−0,25	−0,55	−0,98	−1,52	−2,15	−2,87	−3,65	−4,48	−5,34	−4,56
0,950	−0,07	−0,28	−0,62	−1,08	−1,66	−2,33	−3,07	−3,87	−4,71	−5,58	−4,79
0,975	−0,08	−0,31	−0,68	−1,19	−1,80	−2,50	−3,27	−4,09	−4,94	−5,80	−5,01
1,000	−0,09	−0,34	−0,75	−1,29	−1,94	−2,67	−3,46	−4,30	−5,15	−6,02	−5,23

Таблица 5.4

ЛАЧХ с наклоном ±40 дБ/дек

гающая частота)

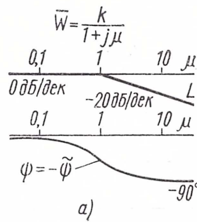


различных μ

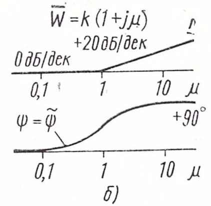
1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,8	2,0	2,5	3,0	5,0	10,0
10,22	7,74	6,18	5,09	4,29	3,20	2,49	1,51	1,02	0,35	0,09
9,99	7,63	6,11	5,04	4,26	3,18	2,48	1,51	1,02	0,35	0,09
9,63	7,45	6,00	4,97	4,20	3,14	2,46	1,49	1,01	0,35	0,09
9,17	7,20	5,85	4,86	4,12	3,10	2,42	1,48	1,00	0,35	0,09
8,64	6,91	5,66	4,73	4,03	3,03	2,38	1,45	0,99	0,34	0,08
8,07	6,58	5,44	4,58	3,91	2,96	2,33	1,43	0,97	0,34	0,08
7,49	6,21	5,19	4,40	3,78	2,88	2,27	1,40	0,95	0,33	0,08
6,89	5,83	4,93	4,21	3,63	2,78	2,20	1,36	0,93	0,32	0,08
6,31	5,43	4,64	3,99	3,46	2,67	2,12	1,32	0,90	0,32	0,08
5,73	5,02	4,35	3,77	3,29	2,56	2,04	1,27	0,87	0,31	0,08
5,18	4,61	4,04	3,54	3,10	2,43	1,95	1,23	0,84	0,30	0,07
4,64	4,21	3,73	3,29	2,91	2,30	1,85	1,17	0,81	0,29	0,07
4,13	3,80	3,42	3,04	2,71	2,16	1,75	1,12	0,77	0,28	0,07
3,63	3,40	3,10	2,79	2,50	2,01	1,64	1,06	0,73	0,26	0,07
3,15	3,01	2,78	2,53	2,28	1,86	1,53	0,99	0,69	0,25	0,06
2,69	2,63	2,47	2,27	2,07	1,70	1,41	0,93	0,65	0,24	0,06
2,25	2,26	2,16	2,01	1,85	1,54	1,29	0,86	0,60	0,22	0,06
1,83	1,90	1,85	1,75	1,63	1,38	1,16	0,78	0,55	0,20	0,05
1,43	1,54	1,55	1,49	1,40	1,21	1,03	0,71	0,50	0,19	0,05
1,04	1,20	1,25	1,23	1,18	1,04	0,90	0,63	0,45	0,17	0,04
0,66	0,87	0,96	0,98	0,96	0,87	0,77	0,55	0,40	0,15	0,04
0,30	0,54	0,67	0,72	0,74	0,70	0,63	0,46	0,34	0,13	0,03
−0,05	0,23	0,39	0,47	0,52	0,52	0,49	0,38	0,28	0,11	0,03
−0,39	−0,08	0,11	0,23	0,30	0,35	0,35	0,29	0,22	0,09	0,02
−0,71	−0,38	−0,16	−0,01	0,08	0,18	0,21	0,20	0,16	0,07	0,02
−1,03	−0,67	−0,42	−0,25	−0,13	0,00	0,07	0,11	0,10	0,05	0,01
−1,33	−0,95	−0,68	−0,49	−0,35	−0,17	−0,08	0,01	0,03	0,02	0,01
−1,63	−1,23	−0,93	−0,72	−0,56	−0,35	−0,22	−0,08	−0,03	0,00	0,00
−1,91	−1,49	−1,18	−0,95	−0,77	−0,52	−0,37	−0,18	−0,10	−0,02	0,00
−2,19	−1,76	−1,42	−1,17	−0,97	−0,69	−0,51	−0,28	−0,17	−0,05	−0,01
−2,46	−2,01	−1,66	−1,39	−1,17	−0,86	−0,66	−0,37	−0,24	−0,08	−0,02
−2,72	−2,26	−1,89	−1,60	−1,37	−1,03	−0,80	−0,47	−0,31	−0,10	−0,02
−2,98	−2,50	−2,12	−1,81	−1,57	−1,20	−0,95	−0,57	−0,38	−0,13	−0,03
−3,22	−2,73	−2,34	−2,02	−1,76	−1,37	−1,09	−0,67	−0,46	−0,16	−0,04
−3,46	−2,96	−2,56	−2,23	−1,95	−1,53	−1,24	−0,78	−0,53	−0,19	−0,05
−3,70	−3,19	−2,77	−2,43	−2,14	−1,70	−1,38	−0,88	−0,61	−0,22	−0,05
−3,93	−3,41	−2,98	−2,62	−2,33	−1,86	−1,52	−0,98	−0,68	−0,25	−0,06
−4,15	−3,62	−3,18	−2,82	−2,51	−2,02	−1,66	−1,08	−0,76	−0,28	−0,07
−4,37	−3,83	−3,38	−3,01	−2,69	−2,18	−1,80	−1,19	−0,84	−0,31	−0,08
−4,58	−4,04	−3,58	−3,19	−2,86	−2,34	−1,94	−1,29	−0,92	−0,34	−0,09

Логарифмические фазоча

($\overline{W} = \overline{W}\,(j\omega)$ — частотная передаточная функция;

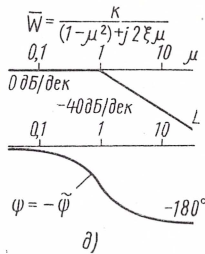


а)

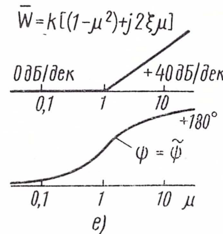


б)

μ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1
$\lvert\tilde{\varphi}\rvert$, град	5,7	11,3	16,7	21,8	26,6	31,0	35,0	38,7	42,0	45,0	47,7



д)

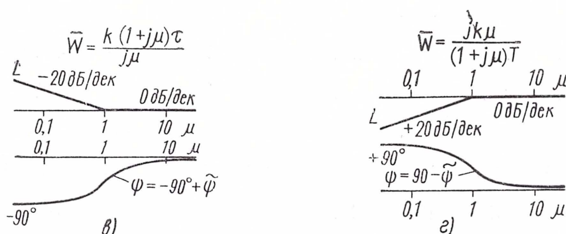


е)

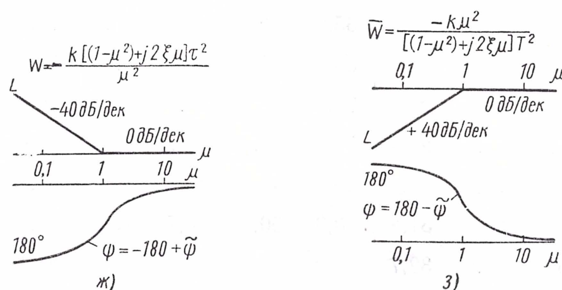
ξ, ζ	Значения $\lvert\tilde{\varphi}\rvert$ при										
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1
0,025	0,3	0,6	0,9	1,4	1,9	2,7	3,9	6,3	13,3	90,0	165,3
0,050	0,6	1,2	1,9	2,7	3,8	5,4	7,8	12,5	25,4	90,0	152,4
0,075	0,9	1,8	2,8	4,1	5,7	8,0	11,6	18,4	35,4	90,0	141,8
0,100	1,2	2,4	3,8	5,4	7,6	10,6	15,4	24,0	43,5	90,0	133,7
0,125	1,5	3,0	4,7	6,8	9,5	13,2	18,9	29,1	49,8	90,0	127,4
0,150	1,7	3,6	5,7	8,1	11,3	15,7	22,4	33,7	54,9	90,0	122,5
0,175	2,0	4,2	6,6	9,5	13,1	18,2	25,7	37,9	58,9	90,0	118,6
0,200	2,3	4,8	7,5	10,8	14,9	20,6	28,8	41,6	62,2	90,0	115,5
0,225	2,6	5,4	8,4	12,1	16,7	22,9	31,7	45,0	64,9	90,0	113,0
0,250	2,9	6,0	9,4	13,4	18,4	25,1	34,5	48,0	67,1	90,0	110,9

стотные характеристики

$\mu = \dfrac{\omega}{\omega_0}$; ω_0 — сопрягающая частота)



1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,8	2,0	2,5	3,0	5,0	10,0
50,2	52,4	54,5	56,3	58,0	60,9	63,4	68,2	71,5	78,7	84,3

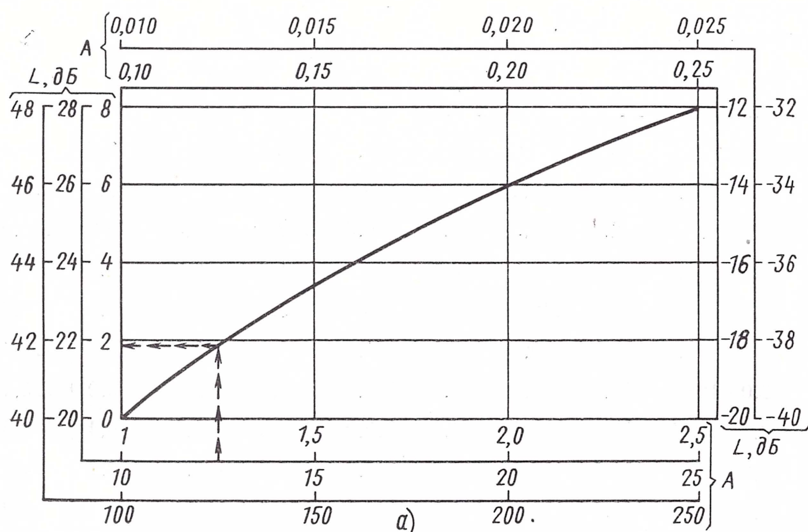


различных μ, град

1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,8	2,0	2,5	3,0	5,0	10,0
172,2	174,6	175,8	176,6	177,1	177,7	178,1	178,6	178,9	179,4	179,7
164,7	169,3	171,7	173,2	174,1	175,4	176,2	177,3	177,9	178,8	179,4
157,8	164,2	167,7	169,8	171,3	173,1	174,3	175,9	176,8	178,2	179,1
151,4	159,4	163,7	166,5	168,4	170,9	172,4	174,6	175,7	177,6	178,8
145,7	154,8	160,0	163,3	165,6	168,6	170,5	173,2	174,6	177,0	178,6
140,7	150,5	156,4	160,2	162,9	166,5	168,7	171,9	173,6	176,4	178,3
136,3	146,6	153,0	157,2	160,3	164,3	166,9	170,5	172,5	175,8	178,0
132,5	143,0	149,7	154,4	157,7	162,2	165,1	169,2	171,5	175,2	177,7
129,2	139,7	146,7	151,6	155,2	160,1	163,3	167,9	170,4	174,6	177,4
126,3	136,7	143,9	149,0	152,9	158,1	161,6	166,6	169,4	174,1	177,1

ξ, ζ	Значения |$\widetilde{\psi}$| при										
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1
0,275	3,2	6,5	10,3	14,7	20,1	27,3	37,1	50,7	69,0	90,0	109,1
0,300	3,5	7,1	11,2	16,0	21,8	29,4	39,5	53,1	70,6	90,0	107,7
0,325	3,8	7,7	12,1	17,2	23,4	31,4	41,7	55,3	72,0	90,0	106,4
0,350	4,0	8,3	13,0	18,4	25,0	33,3	43,9	57,3	73,2	90,0	105,3
0,375	4,3	8,9	13,9	19,7	26,6	35,1	45,8	59,0	74,3	90,0	104,3
0,400	4,6	9,5	14,8	20,9	28,1	36,9	47,7	60,6	75,2	90,0	103,4
0,425	4,9	10,0	15,7	22,0	29,5	38,6	49,4	62,1	76,1	90,0	102,7
0,450	5,2	10,6	16,5	23,2	31,0	40,2	51,0	63,4	76,8	90,0	102,0
0,475	5,5	11,2	17,4	24,3	32,4	41,7	52,5	64,7	77,5	90,0	101,4
0,500	5,8	11,8	18,3	25,5	33,7	43,2	53,9	65,8	78,1	90,0	100,8
0,525	6,1	12,3	19,1	26,6	35,0	44,6	55,2	66,8	78,6	90,0	100,3
0,550	6,3	13,0	19,9	27,7	36,3	45,9	56,5	67,8	79,1	90,0	99,9
0,575	6,6	13,5	20,8	28,7	37,5	47,2	57,6	68,6	79,6	90,0	99,4
0,600	6,9	14,0	21,6	29,7	38,7	48,4	58,7	69,4	80,0	90,0	99,0
0,625	7,2	14,6	22,4	30,8	39,8	49,5	59,8	70,2	80,4	90,0	98,7
0,650	7,5	15,2	23,2	31,8	40,9	50,6	60,7	70,9	80,8	90,0	98,4
0,675	7,8	15,7	24,0	32,7	42,0	51,7	61,7	71,6	81,1	90,0	98,1
0,700	8,1	16,3	24,8	33,7	43,0	52,7	62,5	72,2	81,4	90,0	97,8
0,725	8,3	16,8	25,6	34,6	44,0	53,7	63,3	72,8	81,7	90,0	97,5
0,750	8,6	17,4	26,3	35,5	45,0	54,6	64,1	73,3	82,0	90,0	97,3
0,775	8,9	17,9	27,1	36,4	45,9	55,5	64,8	73,8	82,2	90,0	97,0
0,800	9,2	18,4	27,8	37,3	46,9	56,3	65,5	74,3	82,5	90,0	96,8
0,825	9,5	19,0	28,5	38,2	47,7	57,1	66,2	74,7	82,7	90,0	96,6
0,850	9,7	19,5	29,3	39,0	48,6	57,9	66,8	75,2	82,9	90,0	96,4
0,875	10,0	20,0	30,0	39,8	49,4	58,6	67,4	75,6	83,1	90,0	96,2
0,900	10,3	20,6	30,7	40,6	50,2	59,4	68,0	76,0	83,3	90,0	96,1
0,925	10,6	21,1	31,4	41,4	51,0	60,0	68,5	76,3	83,5	90,0	95,9
0,950	10,9	21,6	32,1	42,1	51,7	60,7	69,0	76,7	83,7	90,0	95,7
0,975	11,1	22,1	32,7	42,9	52,4	61,3	69,5	77,0	83,8	90,0	95,6
1,000	11,4	22,6	33,4	43,6	53,1	61,9	70,0	77,3	84,0	90,0	95,5

различных μ, град										
1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,8	2,0	2,5	3,0	5,0	10,0
123,7	134,0	141,3	146,6	150,6	156,2	159,9	165,3	168,4	173,5	176,8
121,4	131,5	138,8	144,3	148,4	154,3	158,2	164,1	167,3	172,9	176,5
119,4	129,2	136,5	142,1	146,3	152,4	156,6	162,8	166,3	172,3	176,2
117,7	127,2	134,4	140,0	144,3	150,6	155,0	161,6	165,3	171,7	176,0
116,1	125,3	132,4	138,0	142,4	148,9	153,4	160,4	164,3	171,1	175,7
114,6	123,6	130,6	136,2	140,6	147,3	151,9	159,2	163,3	170,5	175,4
113,3	122,0	128,9	134,4	138,9	145,7	150,5	158,0	162,3	170,0	175,1
112,2	120,5	127,3	132,8	137,3	144,1	149,0	156,8	161,4	169,4	174,8
111,1	119,2	125,8	131,3	135,7	142,6	147,7	155,7	160,4	168,8	174,5
110,1	118,0	124,4	129,8	134,3	141,2	146,3	154,5	159,4	168,2	174,2
109,3	116,8	123,2	128,4	132,9	139,8	145,0	153,4	158,5	167,7	174,0
108,4	115,8	121,9	127,2	131,6	138,5	143,8	152,4	157,6	167,1	173,7
107,7	114,8	120,8	125,9	130,3	137,3	142,5	151,3	156,7	166,5	173,4
107,0	113,9	119,7	124,8	129,1	136,0	141,3	150,3	155,8	166,0	173,1
106,4	113,0	118,8	123,7	128,0	134,9	140,2	149,2	154,9	165,4	172,8
105,8	112,2	117,8	122,7	126,9	133,8	139,1	148,2	154,0	164,9	172,5
105,2	111,5	116,9	121,7	125,8	132,7	138,0	147,3	153,2	164,3	172,2
104,7	110,8	116,1	120,8	124,9	131,6	137,0	146,3	152,3	163,7	172,0
104,2	110,1	115,3	119,9	123,9	130,6	136,0	145,4	151,5	163,2	171,7
103,7	109,5	114,6	119,1	123,0	129,7	135,0	144,5	150,6	162,7	171,4
103,3	108,9	113,9	118,3	122,2	128,8	134,1	143,6	149,8	162,1	171,1
102,9	108,4	113,2	117,5	121,4	127,9	133,2	142,7	149,0	161,6	170,8
102,5	107,8	112,6	116,8	120,6	127,0	132,3	141,8	148,3	161,0	170,5
102,2	107,3	112,0	116,1	119,8	126,2	131,4	141,0	147,5	160,5	170,3
101,8	106,9	111,4	115,5	119,1	125,4	130,6	140,2	146,7	160,0	170,0
101,5	106,4	110,9	114,8	118,4	124,7	129,8	139,4	146,0	159,4	169,7
101,2	106,0	110,3	114,3	117,8	123,9	129,0	138,6	145,3	158,9	169,4
100,9	105,6	109,8	113,7	117,2	123,2	128,3	137,9	144,5	158,4	169,1
100,7	105,2	109,4	113,1	116,6	122,6	127,6	137,1	143,8	157,9	168,9
100,4	104,9	108,9	112,6	116,0	121,9	126,9	136,4	143,1	157,4	168,6



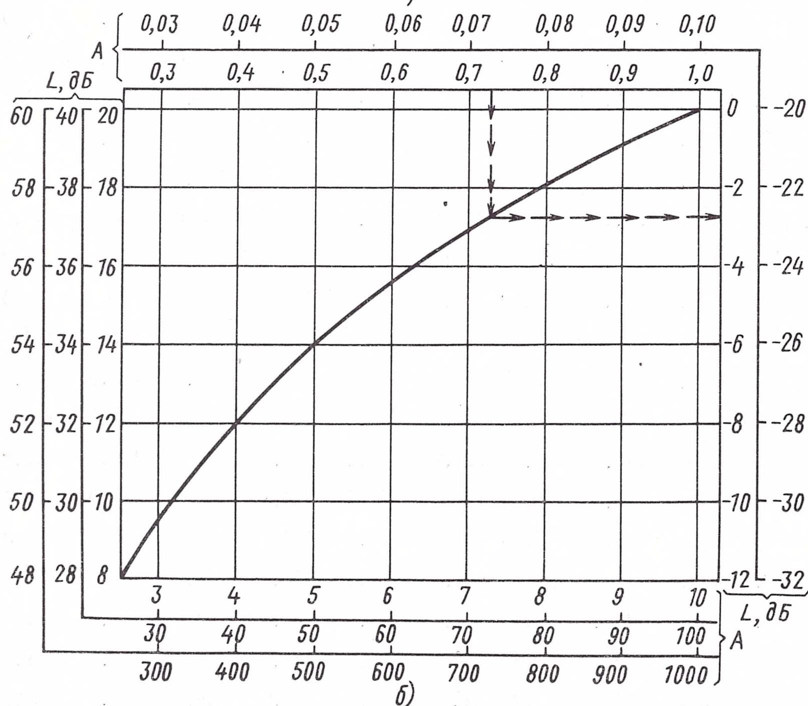


Рис. 5.13. Номограммы для перевода натуральных чисел в децибелы

Если необходима действительная ЛАЧХ, то около каждой из сопрягающих частот нужно строить кривую поправок. Значения поправок δ следует брать из табл. 5.3, если сопрягающая частота изменяет наклон на ± 20 дБ/дек, и из табл. 5.4 при изменении наклона на ± 40 дБ/дек. В последнем случае значения поправок зависят от коэффициентов демпфирования ζ и ξ.

Таблица 5.6

Изменение наклона асимптотической ЛАЧХ

Полином, определяющий сопрягающую частоту		Изменение наклона ЛАЧХ, дБ/дек
$(\tau s + 1)$	числителя	$+20$
$(\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1)$	числителя	$+40$
$(Ts + 1)$	знаменателя	-20
$(T^2 s^2 + 2\xi T s + 1)$	знаменателя	-40

Таблицы дают значения поправок δ в функции относительной частоты $\mu = \frac{\omega}{\omega_0}$, где ω_0 — сопрягающая частота. При нанесении значений поправок на график удобно пользоваться подвижной шкалой относительной частоты μ. На рис. 5.14 подвижная шкала приложена к сопрягающей частоте, равной 4 $с^{-1}$.

После построения кривых всех поправок их суммируют с асимптотической ЛАЧХ и получают действительную ЛАЧХ.

Для построения ЛФЧХ сначала наносят на график все ее составляющие. Первой из них является составляющая от интегрирующих звеньев — прямая, параллельная оси абсцисс с ординатой $-\nu \cdot 90°$. Затем строят составляющие АФЧХ соответственно каждой из сопрягающих частот. Значения этих составляющих следует брать из табл. 5.5. При этом если наклон ЛАЧХ на рассматриваемой сопрягающей частоте изменяется на ± 20 дБ/дек, то нужно следовать указаниям рис. *а*, *б*, *в* или *г* таблицы. Если изменение наклона составляет ± 40 дБ/дек, то нужно следовать указаниям рис. *д*, *е*, *ж* или *з* таблицы. В заключение все составляющие суммируют и получают ЛФЧХ.

Если имеются интегрирующие звенья, то составляющие ЛФЧХ, соответствующие сопрягающим частотам, можно откладывать не от оси абсцисс, а от прямой с ординатой $-\nu \cdot 90°$. Тогда для получения ЛФЧХ суммируют относительно этой прямой все остальные составляющие, т. е. при каждой частоте расстояние ЛФЧХ от прямой равно сумме расстояний от этой прямой всех остальных составляющих.

Пример 5.4. Передаточная функция разомкнутой САР

$$W = \frac{k(\tau s + 1)}{s(Ts + 1)},$$

где $k = 25$; $\tau = 0{,}1$ с; $T = 0{,}0125$ с.

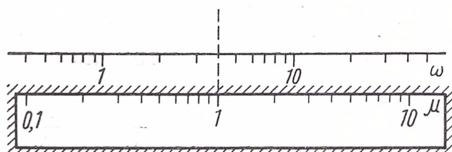


Рис. 5.14. Применение подвижной шкалы μ

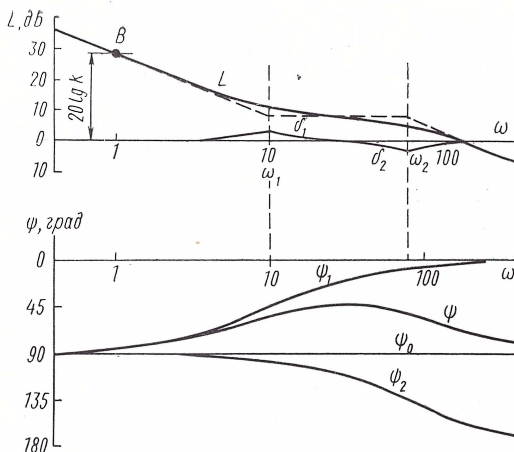


Рис. 5.15. ЛЧХ к примеру 5.4

Построить ее логарифмические частотные характеристики.

Определим сопрягающие частоты

$$\omega_1 = \frac{1}{\tau} = 10\ \text{с}^{-1};$$

$$\omega_2 = \frac{1}{T} = 80\ \text{с}^{-1}$$

и отметим их на графике (рис. 5.15).

Определим ординату ЛАЧХ при $\omega = 1$ по номограмме (см. рис. 5.13, *а*):

$$L\,(1) = 20\lg k = 20\lg 25 \approx 28\text{дБ}$$

и нанесем точку B на график.

Строим асимптотическую ЛАЧХ. Через точку B проводим низкочастотную асимптоту с наклоном —20 дБ/дек до сопрягающей частоты ω_1. Следующую асимптоту проводим с наклоном 0 дБ/дек до частоты ω_2. Высокочастотную асиптоту строим с наклоном —20 дБ/дек.

Кривые поправок строим, пользуясь табл. 5.3: около сопрягающей частоты ω_1 в соответствии с рис. *г* и около частоты ω_2 по рис. *а* этой таблицы.

Суммируя две кривые поправок (δ_1 и δ_2) с асимптотической ЛАЧХ, получим действительную ЛАЧХ $L = L\,(\omega)$.

Далее строим ЛФЧХ. Составляющая ψ_0, создаваемая интегрирующим звеном, есть прямая с ординатой —90°. Составляющую ψ_1, соответствующую сопрягающей частоте ω_1, строим по данным табл. 5.5 согласно рис. *б*. Составляющую ψ_2 около частоты ω_2 строим по той же таблице согласно рис. *а*. Обе составляющие откладываем от прямой с ординатой —90°, затем суммируем их относительно этой прямой. В результате получаем ЛФЧХ $\psi = \psi\,(\omega)$.

5.4. СВЯЗЬ МЕЖДУ ЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ ЧАСТОТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ СИСТЕМЫ МИНИМАЛЬНО-ФАЗОВОГО ТИПА

Передаточную функцию, у которой полиномы числителя и знаменателя не имеют корней с положительной вещественной частью, называют функцией минимальной фазы, а систему с такой передаточной функцией — системой минимально-фазового типа. У такой системы между амплитудной и фазовой, а также между вещественной и мнимой частотными характеристиками существует однозначная связь.

Это свойство используют для определения значений фазы при некоторых частотах или всей фазочастотной характеристики по логарифмической амплитудно-частотной характеристике. Взаимосвязь определяется формулой

$$\psi\,(\omega) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dL}{du} \ln \operatorname{ctgh} \left| \frac{u}{2} \right| du, \qquad (5.32)$$

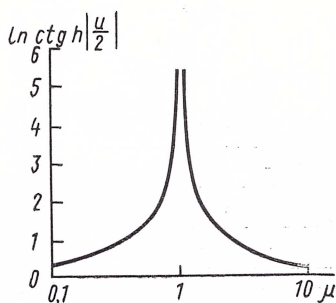


Рис. 5.16. График функции $\ln \operatorname{ctg} h \left| \frac{u}{2} \right|$

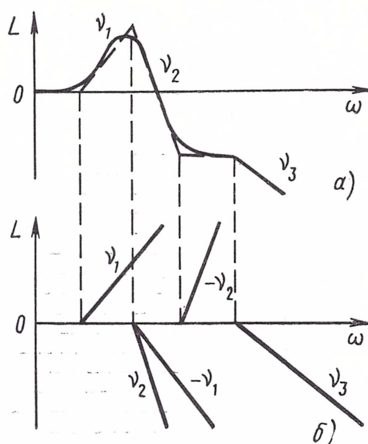


Рис. 5.17. Аппроксимация ЛАЧХ полубесконечными ЛАЧХ с постоянным наклоном

где

$$u = \ln \mu;$$

$$\mu = \frac{\omega}{\omega_0};$$

ω_0 — сопрягающая частота.

Следовательно, значение фазы при любой частоте ω пропорционально средневзвешенному значению производной от логарифмической амплитудно-частотной характеристики. Функция $\ln \times \times \operatorname{ctgh}\left|\frac{u}{2}\right|$, график которой представлен на рис. 5.16, выполняет роль функции веса. Площадь графика равна $\frac{\pi^2}{2}$. Вид этой функции указывает, что наиболее существенное влияние на значение фазы при данной частоте ω имеет наклон ЛАЧХ вблизи этой частоты.

С помощью графика функции $\ln \operatorname{ctgh}\left|\frac{u}{2}\right|$ по асимптотической ЛАЧХ можно определить приближенное значение фазы при выбранных частотах [62].

Формула (5.32) позволяет определить ЛФЧХ для различных типовых ЛАЧХ, в частности для полубесконечной ЛАЧХ с постоянным наклоном. Значения $\psi = \psi(\omega)$, соответствующие такой ЛАЧХ с единичным наклоном (+20 дБ/дек), приведены в [107]. При наклоне ν дБ/дек значения ψ из приложения III [107] нужно умножать на 0,05 ν. Таким образом, по ЛАЧХ можно построить соответствующую ей ЛФЧХ. Заданная ЛАЧХ должна быть аппроксимирована отрезками прямых (рис. 5.17, *а*). В результате ее заменяет ряд полубесконечных составляющих с постоянным наклоном (рис. 5.17, *б*). Теперь можно определить по таблице значения соответствующих им составляющих ЛФЧХ при выбранных частотах и результаты просуммировать.

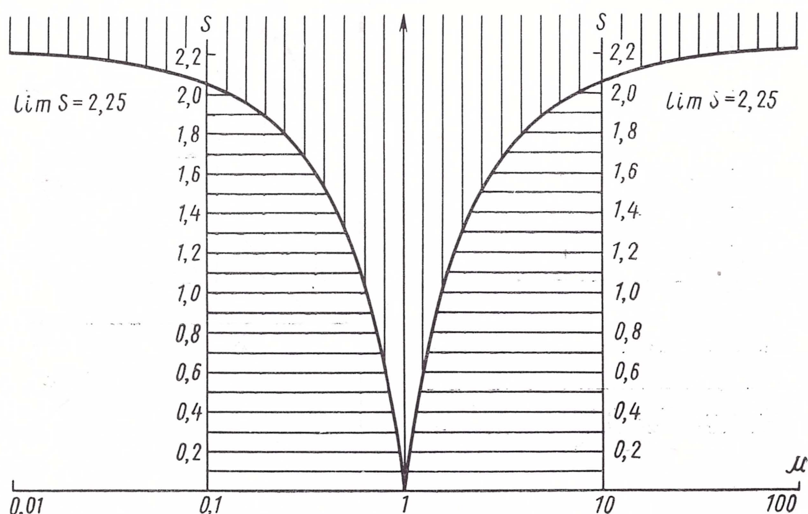


Рис. 5.18. Номограмма для определения фазы по асимптотической ЛАЧХ

На основании формулы (5.32) составлена номограмма [77], позволяющая по асимптотической ЛАЧХ определить фазу при выбранной частоте.

Номограмма (рис. 5.18) представляет собой график вспомогательной величины

$$S = \frac{c}{\pi} \int_0^{\mu} \ln \operatorname{ctgh} \left| \frac{u}{2} \right| du.$$

Числовые значения S приведены в табл. 5.7.

Для определения фазы при выбранной частоте ω_i необходимо приложить номограмму к асимптотической ЛАЧХ так, чтобы оси абсцисс были параллельны и стрелка номограммы совпадала с частотой ω_i. Значение фазы в градусах определяют по формуле

$$\psi(\omega_i) = \sum_{j=1}^{n} \nu_j \, \Delta S_j, \qquad (5.33)$$

где ν_j — наклон j-й асимптоты в дБ/дек (с учетом знака); ΔS — изменение абсолютного значения S на участке частот, охватываемом j-й асимптотой; n—число асимптот на участке частот, охватываемом номограммой.

Если выбранная частота ω_i делит какую-либо асимптоту на две части, то каждую из них следует считать отдельной асимптотой.

Перечисленные методы удобны для определения фазы при какой-либо одной частоте или при нескольких частотах из диапазона, охватываемого ЛАЧХ. Их применение целесообразно также для

Таблица 5.7

Значения S номограммы для определения фазы по асимптотической ЛАЧХ

μ	S	μ	S	μ	S	μ	S
1,00	0,000	3,5	1,724	1,00	0,000	0,30	1,697
1,05	0,210	4,0	1,791	0,96	0,182	0,25	1,791
1,10	0,351	5,0	1,884	0,92	0,318	0,20	1,884
1,15	0,467	6,0	1,945	0,88	0,437	0,17	1,939
1,20	0,565	7,0	1,989	0,84	0,547	0,14	1,994
1,30	0,726	8,0	2,022	0,80	0,650	0,12	2,030
1,40	0,855	10,0	2,068	0,70	0,877	0,10	2,068
1,60	1,052	20,0	2,154	0,64	1,020	0,05	2,154
1,80	1,197	30,0	2,188	0,56	1,188	0,03	2,195
2,00	1,310	50,0	2,214	0,50	1,310	0,02	2,214
2,50	1,507	80,0	2,227	0,40	1,507	0,015	2,223
3,00	1,634	100,0	2,232	0,35	1,603	0,010	2,232

определения ЛФЧХ по ЛАЧХ, построенной по экспериментальным данным.

Результаты вычислений тем точнее, чем меньше асимптотическая ЛАЧХ отличается от действительной.

Пример 5.5. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика разомкнутой САР (см. пример 5.4) изображена на рис. 5.19. Определить значение фазы при частоте среза ω_c.

Задачу будем решать с помощью номограммы (рис. 5.18).

Криволинейный отрезок ЛАЧХ хорошо аппроксимируется тремя асимптотами (рис. 5.19) с наклоном соответственно —14; —6 и —14 дБ/дек. Номограмму располагаем так, чтобы ее стрелка находилась на частоте ω_c. Затем составим по номограмме равенство (5.33) и подсчитаем сумму

$$\psi(\omega_c) = -20(2{,}25 - 2{,}20) - 14(2{,}20 - 2{,}14) -$$
$$-6(2{,}14 - 1{,}46) - 14(1{,}46 + 0{,}80) - 20(2{,}25 - 0{,}80) =$$
$$= -1{,}0 - 0{,}8 - 4{,}1 - 31{,}6 - 29{,}0 = -66{,}5°.$$

По рис. 5.15 легко установить, что значение $\psi(\omega_c)$ определено достаточно точно.

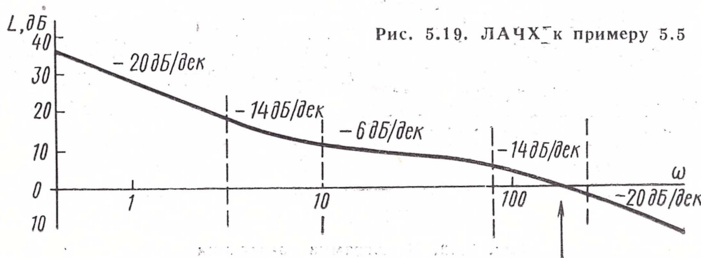


Рис. 5.19. ЛАЧХ к примеру 5.5

5.5. СВЯЗЬ МЕЖДУ ЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ ЧАСТОТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ЗАМКНУТОЙ И РАЗОМКНУТОЙ САР

На основании формулы (5.14) можно получить следующие соотношения:

$$L = 20 \lg \frac{\sin(\psi - \theta)}{\sin \theta} \text{ дБ}; \qquad (5.34)$$

$$L = 20 \lg \left(\frac{\cos \psi \pm \sqrt{\cos^2 \psi + \Lambda^{-2} - 1}}{\Lambda^{-2} - 1} \right) \text{дБ}. \qquad (5.35)$$

Здесь $L = L(\omega)$ и $\psi = \psi(\omega)$ — логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики разомкнутой системы;

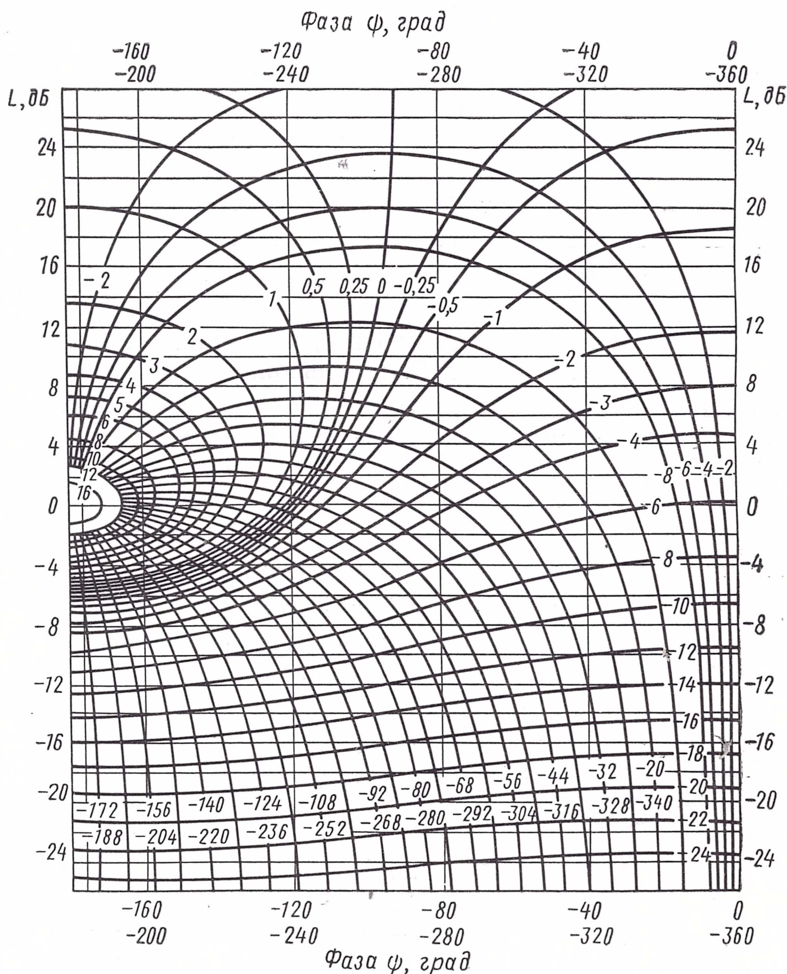


Рис. 5.20. Номограмма замыкания

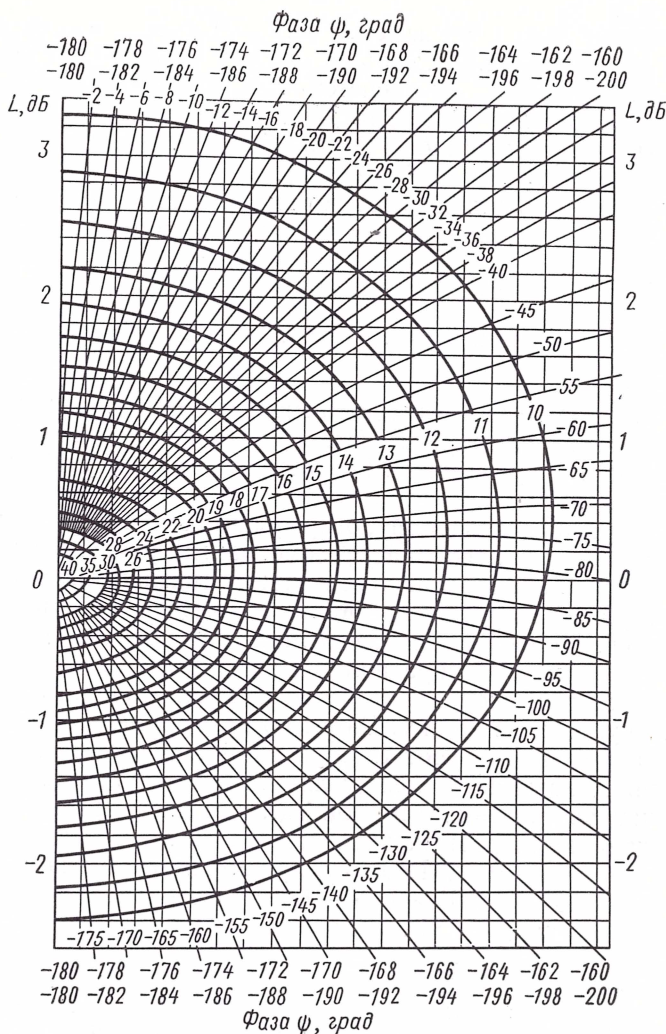


Рис. 5.21. Часть номограммы замыкания в укрупненном масштабе

$\Lambda = \Lambda(\omega)$ и $\theta = \theta(\omega)$ — логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики замкнутой системы с единичной обратной связью.

Формулы (5.34) и (5.35) позволяют построить в плоскости $[\psi;\ L]$ линии равных значений θ и линии равных значений Λ — получается номограмма замыкания (номограмма пересчета) (рис. 5.20). На рис. 5.21 изображена центральная часть номограммы в укрупненном масштабе.

Ось абсцисс номограммы (см. рис. 5.20) является осью фазы ψ разомкнутой системы. Ось ординат есть ось логарифмической амплитуды L разомкнутой системы.

Номограмма охватывает значения L от 0 до $+28$ дБ и от 0 до -26 дБ, так как при $L \gg 1$ $\Phi \approx 1$, т. е. $\Lambda \approx 0$ и $\theta = 0$; при $L \ll 1$ $\Phi \approx W$, т. е. $\Lambda \approx L$ и $\theta \approx \psi$.

Итак, для больших по абсолютной величине значений L надобность в номограмме отпадает. Нужно принимать:

$$\Lambda = 0 \text{ и } \theta = 0, \text{ если } L > 28 \text{ дБ};$$

$$\Lambda = L \text{ и } \theta = \psi, \text{ если } L < -26 \text{ дБ}. \quad (5.36)$$

На номограмме нанесены два семейства линий. Линии равных значений фазы θ замкнутой системы в нижней части номограммы проходят почти вертикально. На части этих линий указаны значения θ (град).

Линии равных значений логарифмической амплитуды Λ замкнутой системы в левой части номограммы расположены почти горизонтально. На каждой из этих линий указано значение Λ (дБ).

Номограмма дает возможность по известным значениям ψ и L разомкнутой системы определить значения θ и Λ замкнутой системы (с единичной обратной связью). Для этого по значениям ψ и L с помощью координатной сетки отыскивают на номограмме соответствующую им точку. Затем по криволинейной системе координат определяются соответствующие этой точке значения θ и Λ. Если точка оказывается между линиями криволинейной системы координат, то значения θ и Λ определяют интерполяцией.

Каждая линия равных значений θ имеет две отметки, сумма которых равна $-360°$. Поэтому нужно иметь в виду, что если $0 > \psi > -180°$, то и $0 > \theta > -180°$; если $-180° > \psi > -360°$, то и $-180° > \theta > -360°$.

Пусть для некоторой частоты $\psi = -32°$ и $L = -4$ дБ. Отыскав на номограмме соответствующую точку, определим, что при замыкании системы (единичной обратной связью) для этой частоты $\theta \approx -20°$ и $\Lambda \approx -8$ дБ. Если $\psi = -328°$ и $L = -4$ дБ, то на номограмме им соответствует та же точка, что и в предыдущем случае. Однако теперь $\theta \approx -340° = 20°$ и по-прежнему $\Lambda \approx -8$ дБ.

Предположим, что номограмму используют для определения логарифмических частотных характеристик замкнутой системы. Тогда удобнее на прозрачной бумаге вычертить такую же координатную сетку ψ, L, на какой построена номограмма. По заданным частотным характеристикам разомкнутой системы построить на этой сетке кривую $L(\psi)$ и указать частоты, соответствующие отдельным точкам. Затем наложить чертеж на номограмму и определить значения θ и Λ для всех выбранных частот.

Номограмму замыкания используют не только в рассмотренных, но и в более общем случае — для определения логарифми-

ческих частотных характеристик $\theta_0 = \theta_0(\omega)$ и $\Lambda_0 = \Lambda_0(\omega)$ системы с передаточной функцией

$$\Phi_0 = \frac{W_п}{1 + W}, \tag{5.37}$$

где $W_п = W_п(s)$; $W = W(s)$; $\Phi_0 = \Phi_0(s)$.

Равенство (5.37) можно привести к такому виду:

$$\Phi_0 = W_п \frac{\frac{1}{W}}{1 + \frac{1}{W}}. \tag{5.38}$$

Следовательно, для отыскания логарифмической амплитуды Λ_0 (или фазы θ_0) замкнутой системы с передаточной функцией Φ_0, определяемой равенством (5.37), при какой-то частоте ω_i необходимо:

1) определить значение $L_п$ (или $\psi_п$) по частотной передаточной функции $W_п(j\omega)$;

2) пользуясь номограммой замыкания (см. рис. 5.20 и 5.21), определить значение $\tilde{\Lambda}$ (или $\tilde{\theta}$), соответствующее значениям $-L$ и $-\theta$;

3) сложить значения $L_п$ и $\tilde{\Lambda}$ (или $\psi_п$ и $\tilde{\theta}$).

Этим путем можно определять логарифмические частотные характеристики замкнутой системы относительно возмущения, для ошибки слежения, а также относительно задающего воздействия при неединичной обратной связи.

Действительно, в общем случае САР имеет структурную схему, представленную на рис. 3.1, и ее передаточные функции относительно задающего воздействия

$$W_g = \frac{W_1 W_2}{1 + W} = W_1 W_2 \frac{\frac{1}{W}}{1 + \frac{1}{W}}, \tag{5.39}$$

где $W = W_0 W_1 W_2$;
относительно возмущения

$$W_f = \frac{W_1}{1 + W} = W_1 \frac{\frac{1}{W}}{1 + \frac{1}{W}} \tag{5.40}$$

и для ошибки слежения

$$W_x = \frac{1}{1 + W} = \frac{\frac{1}{W}}{1 + \frac{1}{W}} \tag{5.41}$$

приводятся к виду (5.38).

Номограмма замыкания может быть использована еще для определения логарифмических частотных характеристик некоторых соединений динамических звеньев [110]. Структурные схемы этих соединений и их передаточные функции приведены в табл. 5.8. Кроме того, в таблице указано, при каких значениях координат ψ и L нужно пользоваться номограммой замыкания в каждом случае и как на основании полученных по номограмме значений θ и Λ определить эквивалентные фазу $\psi_э$ и логарифмическую амплитуду $L_э$ соединения.

Пример 5.5. Два апериодических звена с передаточными коэффициентами $k = 0{,}5$ и постоянными времени $T_1 = 0{,}02$ с и $T_2 = 0{,}2$ с соединены параллельно. Определить фазу $\psi_э$ и логарифмическую амплитуду $L_э$ при частоте $\omega = 10$ с$^{-1}$.

Определим фазы и логарифмические амплитуды звеньев при заданной частоте:

$$\psi_1 = -\mathrm{arctg}\, 0{,}02 \cdot 10 = -11{,}3°;$$

$$L_1 = 20 \lg \frac{0{,}5}{\sqrt{1 + (0{,}02 \cdot 10)^2}} = -6{,}2 \text{ дБ};$$

$$\psi_2 = -\mathrm{arctg}\, 0{,}2 \cdot 10 = -63{,}4°;$$

$$L_2 = 20 \lg \frac{0{,}5}{\sqrt{1 + (0{,}2 \cdot 10)^2}} = -13{,}0 \text{ дБ}.$$

Для определения $\psi_э$ и $L_э$ можно воспользоваться п. 3 табл. 5.8. В соответствии с указанием таблицы подсчитаем значения координат:

$$\psi = \psi_1 - \psi_2 = -11{,}3 - (-63{,}4) = 52{,}1° = -307{,}9°;$$

$$L = L_1 - L_2 = -6{,}2 - (-13{,}0) = 6{,}8 \text{ дБ}.$$

По номограмме замыкания (см. рис. 5.20) определим, что этим значениям ψ и L соответствуют $\theta \approx -344°$ и $\Lambda \approx -2{,}4$ дБ.

В соответствии с п. 3 табл. 5.8 подсчитаем фазу и логарифмическую амплитуду соединения:

$$\psi_э = \psi_1 - \theta \approx -11{,}3 - (-344{,}0) = 332{,}7° = -27{,}3°;$$

$$L_э = L_1 - \Lambda \approx -6{,}2 - (-2{,}4) = -3{,}8 \text{ дБ}.$$

Пример 5.6. Звено с передаточной функцией $W_1 = \dfrac{1{,}25}{0{,}2s + 1}$ включено по схеме, показанной в п. 6 табл. 5.8. Определить фазу $\psi_э$ и логарифмическую амплитуду $L_э$ соединения при частоте $\omega = 1{,}1$ с$^{-1}$.

Определим фазу ψ_1 и логарифмическую амплитуду L_1 звена при $\omega = 1{,}1$ с$^{-1}$:

$$\psi_1 = -\mathrm{arctg}\, 0{,}2 \cdot 1{,}1 = -12{,}4°;$$

$$L_1 = 20 \lg \frac{1{,}25}{\sqrt{1 + (0{,}2 \cdot 1{,}1)^2}} = 1{,}73 \text{ дБ}.$$

В соответствии с п. 6 табл. 5.8 подсчитаем значения координат:

$$\psi = 180° - \psi_1 = 180 - (-12{,}4) = 192{,}4° = -167{,}6°,$$

$$L = -L_1 = -1{,}73 \text{ дБ}.$$

Таблица 5.8

Определение $\psi_э$ и $L_э$ некоторых соединений динамических звеньев по номограмме замыкания

Структурная схема соединения	Передаточная функция соединения $W_э$	На номограмме отложить		Фаза и логарифмическая амплитуда соединения	
		ψ	L	$\psi_э$	$L_э$
	$\frac{W_1}{1+W_1}$	ψ_1	L_1	θ	Λ
	$\frac{W_1}{1-W_1}$	$180°+\psi_1$	L_1	$\theta+180°$	Λ
	W_1+W_2	$\psi_1-\psi_2$	L_1-L_2	$\psi_1-\theta$	$L_1-\Lambda$
	W_1+1	$-\psi_1$	$-L_1$	$-\theta$	$-\Lambda$
	W_1-W_2	$\psi_1-\psi_2+180°$	L_1-L_2	$\psi_1-\theta$	$L_1-\Lambda$
	$1-W_1$	$180°-\psi_1$	$-L_1$	$-\theta$	$-\Lambda$
	$\frac{1}{1+W_1}$	$-\psi_1$ ψ_1	$-L_1$ L_1	θ $\theta-\psi_1$	Λ $\Lambda-L_1$
	$\frac{W_1}{1+W_1W_2}$	$\psi_1+\psi_2$ $-(\psi_1+\psi_2)$	L_1+L_2 $-(L_1+L_2)$	$\theta-\psi_2$ $\theta+\psi_1$	$\Lambda-L_2$ $\Lambda+L_2$
	$\frac{W_1}{1-W_1W_2}$	$\psi_1+\psi_2+180°$ $180°-(\psi_1+\psi_2)$	L_1+L_2 $-(L_1+L_2)$	$\theta-\psi_2+180°$ $\theta+\psi_1$	$\Lambda-L_2$ $\Lambda+L_1$

При этих значениях координат можно пользоваться частью номограммы замыкания, выполненной в укрупненном масштабе (рис. 5.21), тогда

$$\theta \approx -125° \text{ и } \Lambda \approx 9{,}8 \text{ дБ}.$$

Следовательно, в соответствии с табл. 5.8

$$\psi_э = -\theta \approx 125° = -235°;$$

$$L_э = -\Lambda \approx -9{,}8 \text{ дБ}.$$

5.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗАМКНУТОЙ САР

Характеристика $P = P(\omega)$ позволяет построить приближенную переходную характеристику (см. п. 4.2), и поэтому ее часто используют при инженерных расчетах. Характеристику определяют не только аналитически, по частотной передаточной функции замкнутой САР, но также и графоаналитически, по одной из частотных характеристик разомкнутой системы. При этом используют характеристику, построенную ранее для других целей, и, таким образом, уменьшаются общие затраты времени на расчет.

Аналитическое определение *P*. Все передаточные функции замкнутой САР могут быть представлены в виде

$$\Phi_0 = \frac{W_п}{1+W} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1}s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n} \quad (5.42)$$

и, следовательно,

$$\overline{\Phi_0} = \frac{U_1 + jV_1}{U_2 + jV_2}, \quad (5.43)$$

где $m \leqslant n$;

$$U_1 = b_m - b_{m-2}\omega^2 + b_{m-4}\omega^4 - \cdots;$$

$$V_1 = \omega(b_{m-1} - b_{m-3}\omega^2 + b_{m-5}\omega^4 - \cdots);$$

$$U_2 = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \cdots;$$

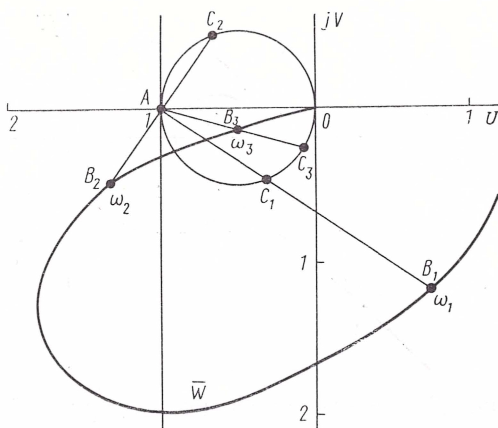
$$V_2 = \omega(a_{n-1} - a_{n-3}\omega^2 + a_{n-5}\omega^4 - \cdots).$$

В этом случае

$$P = \frac{U_1U_2 + V_1V_2}{U_2^2 + V_2^2} = \frac{\dfrac{U_1}{V_2} + \dfrac{V_1}{U_2}}{\dfrac{U_2}{V_2} + \dfrac{V_2}{U_2}}. \quad (5.44)$$

При определении характеристики расчет следует выполнить для ряда частот, равномерно отстоящих одна от другой, например, для $\omega = 0; 10; 20; \ldots$. Затем выбрать дополнительные частоты на участках, где могут быть экстремумы или имеет место быстрое изменение P. Весь расчет целесообразно заносить в таблицу. При ручном счете и наличии математических таблиц с обратными значениями чисел [101] удобно вычислять P по правой части выражения (5.44).

Рис. 5.22. Определение характеристики P (ω) замкнутой САР с единичной обратной связью по АФЧХ разомкнутой цепи



В частном случае, при единичной обратной связи, частотная передаточная функция $\overline{\Phi}$ замкнутой системы определяется равенством (5.14). Значения P следует вычислить по формуле

$$P = \frac{B_2}{B_1 + B_2}, \quad (5.45)$$

где вид полиномов B_1 и B_2 зависит от того, в каком виде составлена частотная передаточная функция $\overline{W}$ разомкнутой системы.

При

$$\overline{W} = \frac{k(u_1 + jv_1)}{u_2 + jv_2}$$

$$B_1 = k(u_1u_2 + v_1v_2) + u_2^2 + v_2^2;$$

$$B_2 = k(u_1u_2 + v_1v_2) + k^2(u_1^2 + v_2^2). \quad (5.46)$$

При

$$\overline{W} = U + jV$$

$$B_1 = 1 + U; \; B_2 = UB_1 + V^2. \quad (5.47)$$

При

$$W = Ae^{j\psi}$$

$$B_1 = 1 + A\cos\psi; \; B_2 = A(A + \cos\psi). \quad (5.48)$$

Определение P по АФЧХ разомкнутой САР. Значение P может быть найдено с помощью вещественной круговой диаграммы (см. рис. 5.5 и 5.6). Кроме того, используют графоаналитический метод, который дает более точные результаты, так как значения P определяют по точкам АФЧХ, точно соответствующим выбранным частотам.

Пусть обратная связь единичная и частотная передаточная функция определяется равенством (5.14). Тогда на комплексной плоскости $[U; jV]$ нужно провести окружность через начало осей координат и точку A с координатами $[-1; j0]$. Затем провести прямые через точку A и каждую из выбранных точек АФЧХ (рис. 5.22) так, чтобы эти прямые пересекали окружность. Значе-

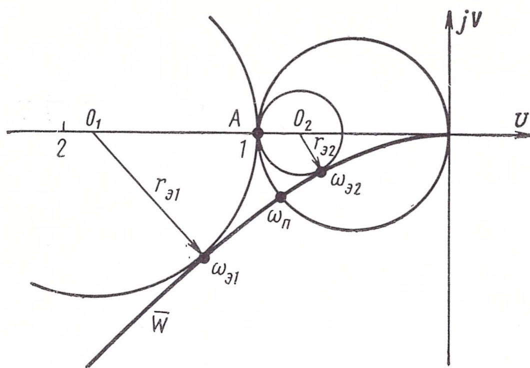


Рис. 5.23. Определение основных параметров характеристик $P(\omega)$ замкнутой САР с единичной обратной связью по АФЧХ разомкнутой цепи

ние $|P|$, соответствующее выбранной i-й точке АФЧХ, равно отношению двух отрезков:

$$|P_i| = \frac{B_iC_i}{AB_i}, \qquad (5.49)$$

где AB_i — отрезок прямой между точкой A и выбранной точкой B_i АФЧХ; B_iC_i — отрезок прямой между точкой B_i и точкой C_i пересечения этой прямой с окружностью.

Возможны три случая, показанные на рис. 5.22. При частоте ω_1 точка B_1 АФЧХ находится вне окружности и справа от прямой, проведенной через точку A параллельно оси ординат. Этой частоте соответствует положительное значение $P < 1$:

$$P(\omega_1) = \frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{1,28}{2,10} = 0,61.$$

При частоте ω_2 точка B_2 АФЧХ находится вне окружности, но слева от прямой, параллельной оси ординат. Этой частоте соответствует положительное значение P:

$$P(\omega_2) = \frac{B_2C_2}{AB_2} = \frac{1,16}{0,58} = 2.$$

При частоте ω_3 точка B_3 АФЧХ находится внутри окружности. Значение P отрицательное:

$$P(\omega_3) = -\frac{B_3C_3}{AB_3} = -\frac{0,46}{0,50} = -0,92.$$

На рис. 5.23 показано, как определить основные параметры характеристики [19]. Окружность с центром, расположенным на оси абсцисс, проходит через точку A и касается АФЧХ в точке, которой соответствует экстремальное значение. P. Экстремум P положительный, если центр O_1 окружности расположен левее точки A. Он имеет место при частоте $\omega_{э1}$ и определяется длиной радиуса $r_{э1}$ этой окружности:

$$P_{max} = 1 + \frac{1}{2r_{э1}}. \qquad (5.50)$$

Экстремум P отрицательный, если центр O_2 окружности расположен правее точки A, и его величина

$$P_{\min} = 1 - \frac{1}{2r_{э2}}. \qquad (5.51)$$

На основании рис. 5.23

$$P_{\max} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 0{,}86} = 1{,}58 \text{ и } P_{\min} = 1 - \frac{1}{2 \cdot 0{,}22} = -1{,}27.$$

Частоте $\omega_п$, при которой АФЧХ пересекает окружность, проходящую через начало осей координат и точку A, соответствует $P = 0$.

Характеристику P замкнутой системы, соответствующую передаточной функции вида (5.43), также можно определить графоаналитически [81]. Для этого нужно иметь две АФЧХ, построенные по частотным передаточным функциям $\overline{W}$ и $\overline{W}_п$. Характеристика P может быть построена и по обратной АФЧХ [24].

Определение P по логарифмическим частотным характеристикам разомкнутой САР. Значение P находят с помощью номограммы (рис. 5.24). Эта номограмма построена по соотношению (5.45) после замены A на L в равенствах (5.48):

$$P = \frac{L \cos \psi + L^2}{1 + 2L \cos \psi + L^2}. \qquad (5.52)$$

Следовательно, она позволяет определять значения P замкнутой системы с единичной обратной связью.

Номограмма представляет собой семейство линий равных значений P, построенное в плоскости фазы ψ — логарифмическая амплитуда L. Ось абсцисс охватывает значения ψ от 0 до $-360°$. Ось ординат охватывает значения L от -28 до $+28$ дБ. При $L > 28$ дБ $P \approx 1$ и при $L < -28$ дБ $P \approx 0$.

Номограммой пользуются так: на ней отыскивают точку, соответствующую значениям ψ и L при выбранной частоте ω_i. Положение этой точки относительно семейства кривых определяет значение $P(\omega_i)$.

Если определяют всю характеристику P, то удобно построить на прозрачной бумаге в координатах $[\psi; L]$ (при том же масштабе, что и на номограмме) кривую $L(\omega)$. Затем этот график накладывают на номограмму и определяют значения P при ряде частот.

Определение P по *Д*-разбиению [81]. При исследовании влияния параметров системы на ее устойчивость строят кривые *Д*-разбиения (см. п. 6.10), которые могут быть использованы для определения характеристики P замкнутой системы.

Наиболее просто определить значения P по кривой *Д*-разбиения по передаточному коэффициенту k разомкнутой системы. Если в системе единичная обратная связь, то для определения значения P при выбранной частоте ω_i нужно из начала осей координат

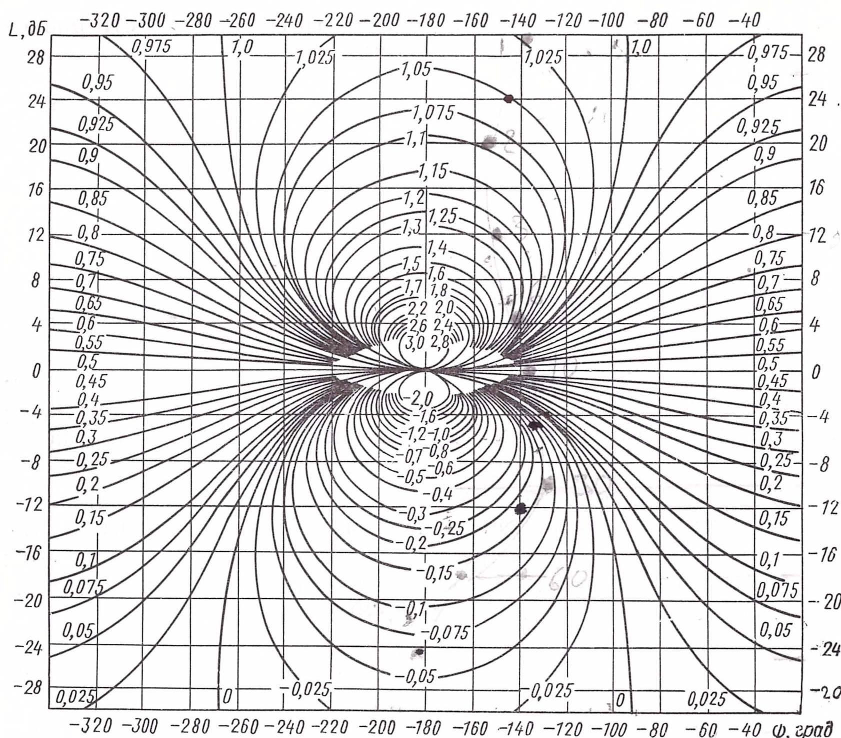


Рис. 5.24. Номограмма для определения характеристики $P(\omega)$ замкнутой САР с единичной обратной связью по логарифмическим частотным характеристикам $P(\omega)$ и $L(\omega)$ разомкнутой цепи

опустить перпендикуляр на прямую, соединяющую точки A и B_i (рис. 5.25). Точка A находится на оси абсцисс и соответствует значению k, а точка B_i находится на кривой $Д$-разбиения и соответствует выбранной частоте. Значение вещественной частотной характеристики

$$|P_i| = \frac{AC_i}{AB_i}. \tag{5.53}$$

Возможны два случая, которые и показаны на рис. 5.25. Точка B_1, соответствующая частоте ω_1, расположена левее прямой, параллельной оси ординат и проходящей через точку A. В этом случае

$$P = \frac{AC_1}{AB_1} = \frac{6,3}{13,0} = 0,48.$$

Точка B_2, соответствующая частоте ω_2, расположена правее указанной прямой AA_1. При этом

$$P = -\frac{AC_2}{AB_2} = -\frac{7,8}{11,3} = -0,69.$$

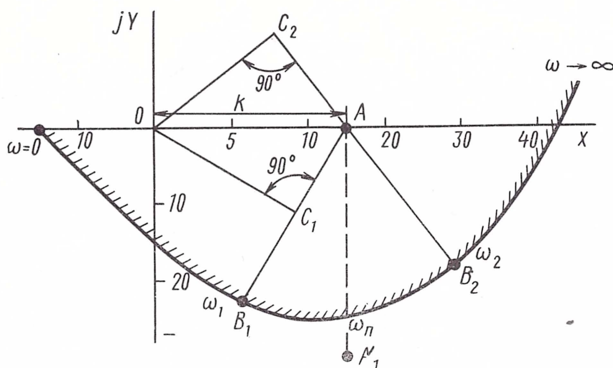


Рис. 5.25. Определение характеристики $P(\omega)$ замкнутой САР с единичной обратной связью по кривой Д-разбиения по k

Точка кривой Д-разбиения, лежащая на прямой AA_1, соответствует частоте $\omega_п$, при которой $P = 0$. Одна ветвь Д-разбиения позволяет построить всю характеристику P.

Если, кроме кривой Д-разбиения, построить дополнительную кривую, то можно графоаналитически определить характеристику P, соответствующую частотной передаточной функции (5.42) [81]. Характеристику P замкнутой системы с единичной обратной связью можно определить и по кривой Д-разбиения по любому параметру, линейно входящему в характеристическое уравнение [24, 81].

5.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ АМПЛИТУДНО-ФАЗОВОЙ ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ПЕРЕХОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ

Экспериментальное исследование динамических свойств сложных объектов регулирования выполняют чаще всего путем снятия переходной характеристики (кривой разгона). Экспериментальная характеристика, вообще говоря, может быть аппроксимирована некоторым аналитическим выражением, которое позволит определить передаточную функцию и вычислить частотные характеристики. При аппроксимации неизбежны погрешности, поэтому используют также методы непосредственного определения АФЧХ по экспериментальной переходной характеристике.

Простейший и проверенный практикой метод [119] заключается в том, что экспериментальную переходную характеристику $h(t)$ аппроксимируют отрезками прямых (рис. 5.26). Затем определяют коэффициенты c_i, характеризующие углы наклона прямолинейных отрезков:

$$c_1 = \frac{x_1}{t_1}; \quad c_2 = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}; \quad c_3 = \frac{x_3 - x_2}{t_3 - t_2}. \tag{5.54}$$

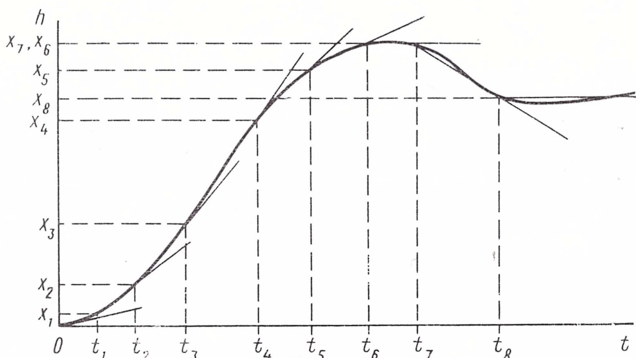


Рис. 5.26. Аппроксимация экспериментальной переходной характеристики отрезками прямых для определения АФЧХ

Значения вещественной U и мнимой V частей частотной передаточной функции $\overline{W}$ при каждой частоте ω подсчитывают по формулам

$$U = \frac{2}{\omega} \sum_{i=1}^{n} c_i \sin \omega\tau_{1i} \cos \omega\tau_{2i};$$

$$V = \frac{2}{\omega} \sum_{i=1}^{n} c_i \sin \omega\tau_{1i} \sin \omega\tau_{2i}, \qquad (5.55)$$

где n — число аппроксимирующих отрезков;

$$\tau_{1i} = \frac{t_i - t_{i-1}}{2}; \quad \tau_{2i} = \frac{t_i + t_{i-1}}{2}.$$

Существуют таблицы [89], с помощью которых облегчается расчет по формулам (5.55).

В основе другого метода аппроксимации [97] лежит предположение, что переходная характеристика представляет собой кривую полупериода колебаний, которые устанавливаются на выходе системы при подаче на ее вход периодических колебаний прямоугольной формы.

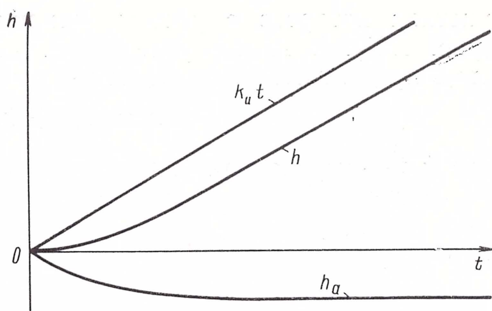
Определение амплитуды и фазы частотной передаточной функции при выбранной частоте $\omega_i = \frac{2\pi}{T_i}$ заключается в следующем:

1) выбирают участок переходной характеристики от 0 до такого значения $t_р$, при котором переходный процесс практически уже заканчивается; при этом должно выполняться равенство

$$t_р = \frac{nT_0}{2}, \qquad (5.56)$$

где n — целое число;

Рис. 5.27. Разложение на составляющие переходной характеристики объекта без самовыравнивания



2) выбранный участок переходной характеристики разделяют (в простейшем случае) на интервалы

$$\Delta t = \frac{T_0}{6} \qquad (5.57)$$

и записывают значения h в эти моменты веремени (всего записывают $r = 3n + 1$ значений $h_0, h_1, \ldots, h_r$);

3) вычисляют ординаты кривой предполагаемых периодических колебаний:

$$\left.\begin{aligned} z_0 &= 2(h_0 - h_3 + h_6 - h_9 + \cdots + h_{r-6} - h_{r-3}) + h_r; \\ z_1 &= 2(h_1 - h_4 + h_7 - h_{10} + \cdots + h_{r-5} - h_{r-2}) + h_r; \\ z_2 &= 2(h_2 - h_5 + h_8 - h_{11} + \cdots + h_{r-4} - h_{r-1}) + h_r; \end{aligned}\right\} \qquad (5.58)$$

4) определяют коэффициенты:

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{2} z_k \sin\frac{2\pi}{3}k; \\ b &= \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{2} z_k \cos\frac{2\pi}{3}k; \end{aligned}\right\} \qquad (5.59)$$

5) подсчитывают амплитуду

$$A(\omega_i) = \frac{\pi}{4}\sqrt{a^2 + b^2} \qquad (5.60)$$

и фазу

$$\psi(\omega_i) = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}. \qquad (5.61)$$

частотной передаточной функции для выбранной частоты ω_i.

После определения амплитуды и фазы для ряда частот можно построить АФЧХ, соответствующую рассматриваемой переходной характеристике. Значение n при каждой частоте ω_i нужно выбирать так, чтобы значения $t_р$ при всех частотах были возможно ближе одно к другому.

Изложенным методом могут быть определены частотные характеристики объекта без самовыравнивания, переходная характе-

ристика которого с ростом времени уходит в бесконечность (рис. 5.27). В этом случае переходная характеристика должна быть представлена как сумма двух характеристик:

$$h = k_{\text{и}}t + h_{\text{а}}, \tag{5.62}$$

где $k_{\text{и}}t$ — переходная характеристика интегрирующего звена.

Значение $k_{\text{и}}$ определяют по углу наклона асимптоты, к которой стремится h при $t \to \infty$. Частотную передаточную функцию $\overline{W}_{\text{а}}$ определяют изложенным выше способом. Тогда частотная передаточная функция рассматриваемой системы

$$\overline{W} = \frac{k_{\text{и}}}{} \mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{2}} + \overline{W}_{\text{а}}. \tag{5.63}$$

Глава 6

ПРОВЕРКА УСТОЙЧИВОСТИ

При оценке свойств спроектированной системы автоматического регулирования обычно прежде всего выясняют ее устойчивость. Это можно установить, исследуя свободное движение системы, т. е. ее поведение под влиянием начальных условий (см. п. 2.2).

Предположим, что на систему в течение некоторого промежутка времени, кроме задающего воздействия, влияет возмущение и в результате состояние системы в момент $t = t_0$ характеризуется значениями $y^0, \dot{y}^0, \ldots, y^{(n-1)\,0}$ регулируемой величины и ее производных. Предположим далее, что в момент времени t_0 влияние возмущения прекращается. Следовательно, дальнейшее поведение системы определяется задающим воздействием и начальными условиями $y^0, \dot{y}^0, \ldots, y^{(n-1)\,0}$, причем на основании принципа суперпозиции (см. п. 2.2) эти два влияния в линейной системе независимы одно от другого.

В наиболее благоприятном случае свободная составляющая регулируемой величины, которая создается начальными условиями, с течением времени стремится к нулю. Такую систему называют устойчивой (асимптотически устойчивой).

Возможно также, что свободная составляющая стремится к некоторому конечному значению или совершает гармонические колебания, амплитуда которых стремится к некоторому конечному значению. Такие системы называют нейтральными (нейтрально устойчивыми).

Возможно, наконец, что свободная составляющая регулируемой величины неограниченно возрастает или совершает гармонические колебания с неограниченно возрастающей амплитудой. Такие системы называют неустойчивыми.

Итак, система является устойчивой, если после прекращения внешнего воздействия она по истечении некоторого времени возвращается к тому состоянию равновесия или вынужденного движения, в котором находилась до начала воздействия.

Оценка устойчивости системы есть оценка ее принципиальной способности осуществлять регулирование, поэтому с оценки устойчивости начинают исследование всякой системы.

В данной главе будет рассмотрено условие устойчивости и различные инженерные методы проверки устойчивости, а также ряд смежных вопросов.

6.1. УСЛОВИЕ И КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

Дифференциальное уравнение линейной или линеаризованной системы имеет следующий вид (см. пп. 2.2 и 3.2):

$$(a_0p^n + a_1p^{n-1} + \cdots + a_{n-1}p + a_n)\,y = (b_0p^m + b_1p^{m-1} + \cdots + b_{m-1}p + b_m)\,g + (c_0p^l + c_1p^{l-1} + \cdots + c_{l-1}p + c_l)\,f, \quad (6.1)$$

где $y = y(t)$, $g = g(t)$ и $f = f(t)$ — соответственно регулируемая величина, задающее воздействие и возмущение или отклонения этих величин от их базисных значений; $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_m, c_0, c_1, \ldots, c_l$ — постоянные коэффициенты; $m \leqslant n$ и $l \leqslant n$; $p = \frac{d}{dt}$ — оператор дифференцирования.

Для оценки устойчивости системы должна быть исследована свободная составляющая решения уравнения (6.1), т. е. решение однородного уравнения

$$(a_0p^n + a_1p^{n-1} + \cdots + a_{n-1}p + a_n)\,y = 0 \quad (6.2)$$

при начальных условиях общего вида

$$y(0) = y^0; \quad \dot{y}(0) = \dot{y}^0, \ \ldots, \ y^{n-1}(0) = y^{(n-1)\,0}, \quad (6.3)$$

где $y^0, \dot{y}^0, \ldots, y^{(n-1)\,0}$ — постоянные, ограниченные по абсолютной величине.

Общее решение однородного уравнения (6.2) есть сумма слагаемых, вид которых определяется значениями корней характеристического уравнения

$$\mathscr{D} = a_0s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n = 0. \quad (6.4)$$

Следует заметить, что коэффициенты уравнения (6.4) и, следовательно, значения его корней зависят только от параметров системы — от свойств и параметров ее элементов, способа их соединения.

Отдельные слагаемые в решении уравнения (6.2) могут иметь вид (2.13)—(2.16). Если характеристическое уравнение САР не имеет кратных корней (что наиболее вероятно, когда корни вычисляют приближенно), то решение уравнения (6.2) будет иметь слагаемые вида

$$A_i e^{\alpha_i t} \quad (6.5)$$

и

$$C_l e^{-\alpha_l t} \sin(\beta_l t + \psi_l). \quad (6.6)$$

Слагаемое вида (6.5) соответствует вещественному корню α_i и слагаемое вида (6.6) соответствует паре сопряженных комплекс-

ных корней $\alpha_l \pm j\beta_l$, где α_i, α_l, β_l — постоянные, а A_i, C_l и ψ_l — постоянные интегрирования, которые зависят от начальных условий и всегда ограничены по абсолютной величине.

При исследовании решения уравнения (6.2), если какое-нибудь его слагаемое неограниченно возрастает по абсолютной величине, то обязательно неограниченно возрастает по абсолютной величине и вся сумма в целом (независимо от наличия членов с разными знаками).

Очевидно, что присутствие одного положительного вещественного корня $\alpha_i > 0$ достаточно для того, чтобы соответствующее ему слагаемое в решении уравнения (6.2) неограничено возрастало по абсолютной величине. При наличии одной пары сопряженных комплексных корней с положительной вещественной частью $\alpha_l > 0$ в решении уравнения (6.2) оказывается гармоническое слагаемое с неограниченно возрастающей амплитудой. В обоих случаях система оказывается неустойчивой.

Таким образом, для устойчивости (асимптотической устойчивости) линейной системы необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения имели отрицательную вещественную часть. При наличии хотя бы одного корня с положительной вещественной частью система неустойчива.

Среди корней характеристического уравнения может быть корень, равный нулю $\alpha_i = 0$ или пара чисто мнимых корней $\pm j\beta_l$. Если при этом вещественные части всех остальных корней отрицательные, то решение уравнения (6.2) будет иметь соответственно постоянное слагаемое A_i или гармоническое слагаемое с постоянной амплитудой $C_l \sin(\beta_l t + \psi_l)$. В этих случаях система нейтральная.

Сформулированное выше условие устойчивости справедливо как для линейных, так и для линеаризованных систем (теоремы Ляпунова): по корням характеристического уравнения системы, элементы которой описываются линеаризованными уравнениями (см. п. 2.1), действительно можно судить о ее устойчивости. Однако в случае нулевых или чисто мнимых корней характеристического уравнения линеаризованной системы вопрос об устойчивости может быть решен только на основании исследования ее нелинейных уравнений.

Корни алгебраического уравнения, как и всякие комплексные числа, удобно представлять в виде точек на комплексной плоскости. Для устойчивости линейной системы необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения лежали слева от мнимой оси комплексной плоскости (рис. 6.1, *а*), или все корни были «левыми».

Если хотя бы один вещественный корень или одна пара сопряженных комплексных корней находится справа от мнимой оси, то система неустойчива (рис. 6.1, *б*).

Мнимая ось является, следовательно, границей устойчивости. Говорят, что система находится на границе устойчивости, если

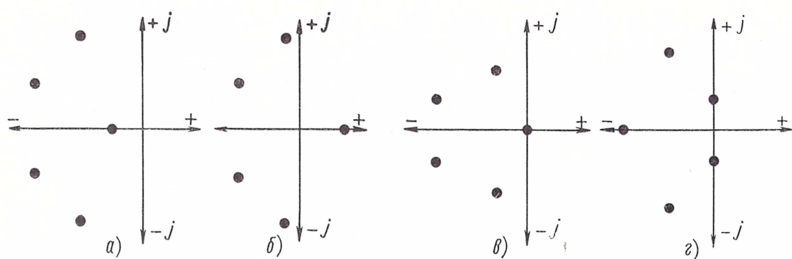


Рис. 6.1. Расположение корней характеристического уравнения системы пятого порядка:

а — устойчивой; *б* — неустойчивой; *в* и *г* — находящейся на границе устойчивости

имеется нулевой корень (рис. 6.1, *в*) или пара чисто мнимых корней (рис. 6.1, *г*), а остальные корни «левые». В первом случае, который имеет место при $a_n = 0$, уравнения (6.1) и (6.2) определяют только скорость py изменения искомой переменной y, а сама эта переменная y будет зависеть еще и от своего начального значения. Во втором случае в системе незатухающие гармонические колебания с постоянной амплитудой.

На практике для упрощения вычислений устойчивость систем определяют с помощью некоторых критериев без вычисления корней характеристического уравнения. Критерий устойчивости — это математическая формулировка условий, которым удовлетворяют коэффициенты характеристического уравнения устойчивой системы. Критерии устойчивости экивалентны по содержанию сформулированному выше условию устойчивости.

Системы первого и второго порядка устойчивы, если все коэффициенты характеристического уравнения больше нуля. Для систем более высокого порядка положительность коэффициентов характеристического уравнения является необходимым, но недостаточным условием устойчивости. Если все коэффициенты уравнения положительные, то все его вещественные корни отрицательные, но среди комплексных корней могут быть и корни с положительной вещественной частью. Если хотя бы один из коэффициентов отрицателен, то система заведомо неустойчива. При равенстве нулю коэффициента a_n система находится на границе устойчивости. При равенстве нулю какого-либо другого коэффициента система либо на границе устойчивости, либо неустойчивая.

Критерии устойчивости разделяют на алгебраические и частотные. К алгебраическим относят критерий Гурвица и критерий Рауса, к частотным — критерий Михайлова и критерий Найквиста.

Критерий Гурвица удобен для исследования устойчивости систем третьего и четвертого порядков, когда известны параметры системы. Кроме того, он позволяет получить аналитическое выражение (выражения) для границ области возможных значений ка-

кого-либо параметра (параметров) системы, при которых сохраняется устойчивость.

Критерий Рауса широко используют при определении устойчивости систем высокого порядка, если известны числовые значения коэффициентов его характеристического уравнения. Этот критерий удобен при использовании ЭЦВМ. При этом возникает возможность выяснить влияние коэффициентов уравнения или параметров системы на ее устойчивость.

При использовании критерий Михайлова, кроме определения устойчивости, легко установить, в каких пределах можно изменять тот или иной параметр системы.

По критериям Гурвица, Рауса и Михайлова можно судить об устойчивости системы как в замкнутом, так и в разомкнутом состоянии.

Критерий Найквиста наиболее широко используют по следующим причинам:

1. Устойчивость замкнутой системы исследуют по частотной передаточной функции ее разомкнутой цепи, а эта функция чаще всего состоит из простых сомножителей. Коэффициентами являются реальные параметры системы, что позволяет выбирать их из условия устойчивости.

2. Для исследования устойчивости можно использовать экспериментальные частотные характеристики наиболее сложных элементов системы (объект регулирования, исполнительный элемент), что повышает точность полученных результатов.

3. Исследовать устойчивость можно по логарифмическим частотным характеристикам, построение которых не требует трудоемких расчетов.

4. Удобно определять запас устойчивости.

При использовании критериев Гурвица, Рауса и Михайлова для исследования устойчивости системы рассматривают ее характеристическое уравнение. В ряде случаев трудоемкость расчетов можно уменьшить за счет изменения масштаба коэффициентов этого уравнения [122].

После деления на a_n и замены переменной путем подстановки $s = c\lambda$, где постоянная $c > 0$, характеристическое уравнение (6.4) принимает следующий вид:

$$\frac{a_0 c^n}{a_n}\lambda^n + \frac{a_1 c^{n-1}}{a_n}\lambda^{n-1} + \cdots + \frac{a_{n-1}c}{a_n}\lambda + 1 = 0. \qquad (6.7)$$

Постоянную c следует выбирать так, чтобы коэффициент $\frac{a_0 c^n}{a_n} = 1$ или был близок к единице. Иногда удобнее это требование предъявлять к коэффициенту $\frac{a_{n-1}c}{a_n}$. В ряде случаев целесообразно принимать $c = 10$.

В результате характеристическое уравнение принимает более простой вид, а его корни лишь уменьшаются в c раз.

Пример 6.1. Имеется характеристическое уравнение

$$0{,}25s^3 + 8{,}75s^2 + 87{,}5s + 250 = 0.$$

Его корни: —5; —10; —20.
Разделим уравнение на $a_3 = 250$:

$$0{,}001s^3 + 0{,}035s^2 + 0{,}35s + 1 = 0.$$

Сделаем подстановку $s = 10\lambda$:

$$\lambda^3 + 3{,}5\lambda^2 + 3{,}5\lambda + 1 = 0.$$

Уравнение приняло более простой вид. Его корни: —0,5; —1; —2.

6.2. КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ГУРВИЦА

При использовании критерия из коэффициентов характеристического уравнения (6.4) системы составляют таблицу

$$\begin{array}{cccccc|c} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & & a_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & & & a_{n-2} & a_n \end{array} \qquad (6.8)$$

По диагонали таблицы от левого верхнего угла выписывают по порядку все коэффициенты, начиная с a_1 и заканчивая a_n. Затем каждый столбец таблицы дополняют так, чтобы вверх от диагонали индексы коэффициентов увеличивались, а вниз — уменьшались. В случае отсутствия в уравнении какого-либо коэффициента и вместо коэффициентов с индексом меньше 0 и больше n пишут нуль.

Критерий можно сформулировать так: система устойчива, если при $a_0 > 0$ положительны и n определителей Гурвица, получаемых из (6.8), т. е.

$$a_0 > 0; \quad \Delta_1 = a_1 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \ \cdots .$$

$$\Delta_n = a_n \Delta_{n-1} > 0. \qquad (6.9)$$

Это необходимое и достаточное условие устойчивости.

Предпоследнее неравенство в (6.9) есть $\Delta_{n-1} > 0$, поэтому последнее неравенство сводится к $a_n > 0$.

Система находится на границе устойчивости, если $\Delta_n = 0$ и все предыдущие определители Гурвица положительны. Условие

$\Delta_n = 0$ распадается на два: $a_n = 0$ (апериодическая граница устойчивости, нейтральная устойчивость) или $\Delta_{n-1} = 0$ (колебательная граница устойчивости).

По критерию Гурвица для устойчивости должны удовлетворяться следующие неравенства:

система третьего порядка

$$a_0 > 0; \quad a_1 > 0; \quad a_2 > 0; \quad a_3 > 0; \quad a_1 a_2 > a_0 a_3; \tag{6.10}$$

система четвертого порядка

$$a_0 > 0; \quad a_1 > 0; \quad a_2 > 0; \quad a_3 > 0; \quad a_4 > 0;$$
$$a_1 a_2 a_3 > a_0 a_3^2 + a_1^2 a_4; \tag{6.11}$$

система пятого порядка

$$a_0 > 0; \quad a_1 > 0; \quad a_2 > 0; \quad a_3 > 0; \quad a_4 > 0; \quad a_5 > 0;$$
$$a_1 a_2 > a_0 a_3;$$
$$(a_1 a_2 - a_0 a_3)(a_3 a_4 - a_2 a_5) > (a_1 a_4 - a_0 a_5)^2. \tag{6.12}$$

Пример 6.2. Составить условие устойчивости одноконтурной системы, состоящей из трех апериодических звеньев.

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)},$$

где k — передаточный коэффициент разомкнутой системы; T_1, T_2 и T_3 — постоянные времени апериодических звеньев.

Характеристическое уравнение замкнутой системы

$$(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1) + k = 0$$

или $a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0$,
где $a_0 = T_1 T_2 T_3$; $a_1 = T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_3 T_1$; $a_2 = T_1 + T_2 + T_3$; $a_3 = 1 + k$.

Характеристическое уравнение третьей степени и все его коэффициенты положительные. Для устойчивости еще должно удовлетворяться последнее из неравенств (6.10). В данном случае оно может быть приведено к следующему виду:

$$k < (T_1 + T_2 + T_3)\left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3}\right) - 1.$$

Обозначим $T_2 = c_2 T_1$ и $T_3 = c_3 T_1$. Тогда условие устойчивости

$$k < (1 + c_2 + c_3)\left(1 + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3}\right) - 1.$$

Устойчивость системы зависит не от абсолютных значений постоянных времени, а лишь от соотношения между ними.

6.3. КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ РАУСА

Применение критерия требует составления таблицы Рауса (табл. 6.1). Элементами ее первой строки являются четные коэффициенты характеристического уравнения (6.4), начиная с a_0. Элементы второй строки — нечетные коэффициенты, начиная с a_1.

Таблица 6.1

Таблица Рауса

Вспомогательные коэффициенты	№ строки	№ столбца			
		1	2	3	. . .
—	1	$c_{11} = a_0$	$c_{12} = a_2$	$c_{13} = a_4$	
—	2	$c_{21} = a_1$	$c_{22} = a_3$	$c_{23} = a_5$	. . .
$r_3 = \frac{c_{11}}{c_{21}}$	3	$c_{31} = c_{12} - r_3 c_{22}$	$c_{32} = c_{13} - r_3 c_{23}$	$c_{33} = c_{14} - r_3 c_{24}$	. . .
$r_4 = \frac{c_{21}}{c_{31}}$	4	$c_{41} = c_{22} - r_4 c_{32}$	$c_{42} = c_{23} - r_4 c_{33}$	$c_{43} = c_{24} - r_4 c_{34}$	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$r_i = \frac{c_{i-2,1}}{c_{i-1,1}}$	i	$c_{i1} = c_{i-2,2} - r_i c_{i-1,2}$	$c_{i2} = c_{i-2,3} - r_i c_{i-1,3}$	$c_{i3} = c_{i-2,4} - r_i c_{i-1,4}$	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$r_{n+1} = \frac{c_{n-1,1}}{c_{n1}}$	$n+1$	$c_{n+1,1} = c_{n-1,2} - r_{n+1} c_{n2}$	—	—	—

Таблица 6.2

Пример определения устойчивости по критерию Рауса

Вспомогательные коэффициенты	№ строки	№ столбца: 1	2	3	4
	1 2	$c_{11} = 1{,}13 \cdot 10^{-6}$ $c_{21} = 5{,}14 \cdot 10^{-5}$	$c_{12} = 9{,}22 \cdot 10^{-4}$ $c_{22} = 7{,}95 \cdot 10^{-3}$	$c_{13} = 6{,}36 \cdot 10^{-2}$ $c_{23} = 0{,}275$	$c_{14} = 0{,}75$ $c_{24} = 1$
$r_3 = \frac{1{,}13 \cdot 10^{-6}}{5{,}14 \cdot 10^{-5}} = 0{,}022$	3	$c_{31} = 9{,}22 \cdot 10^{-4} - 0{,}022 \cdot 7{,}95 \cdot 10^{-3} = 7{,}47 \cdot 10^{-4}$	$c_{32} = 6{,}36 \cdot 10^{-2} - 0{,}022 \cdot 0{,}275 = 5{,}76 \cdot 10^{-2}$	$c_{33} = 0{,}75 - 0{,}22 \cdot 1 = 0{,}73$	0
$r_4 = \frac{5{,}14 \cdot 10^{-5}}{7{,}47 \cdot 10^{-4}} = 0{,}0688$	4	$c_{41} = 7{,}95 \cdot 10^{-3} - 0{,}0688 \cdot 0{,}0576 = 3{,}99 \cdot 10^{-3}$	$c_{42} = 0{,}275 - 0{,}0688 \cdot 0{,}73 = 0{,}225$	$c_{43} = 1 - 0{,}0688 \cdot 0 = 1$	0
$r_5 = \frac{7{,}47 \cdot 10^{-4}}{3{,}99 \cdot 10^{-3}} = 0{,}187$	5	$c_{51} = 5{,}76 \cdot 10^{-2} - 0{,}187 \cdot 0{,}225 = 0{,}0155$	$c_{52} = 0{,}73 - 0{,}187 \cdot 1 = 0{,}541$	0	0
$r_6 = \frac{3{,}99 \cdot 10^{-3}}{0{,}0155} = 0{,}257$	6	$c_{61} = 0{,}225 - 0{,}257 \cdot 0{,}541 = 0{,}085$	$c_{62} = 1 - 0{,}257 \cdot 0 = 1$	0	—
$r_7 = \frac{0{,}0155}{0{,}085} = 0{,}182$	7	$c_{71} = 0{,}541 - 0{,}182 \cdot 1 = 0{,}361$	0	0	—
$r_8 = \frac{0{,}085}{0{,}361} = 0{,}235$	8	$c_{81} = 1 - 0{,}235 \cdot 0 = 1$	0	—	—

Элементы последующих строк вычисляют по приведенным в табл. 6.1 формулам, причем перед вычислением элементов какой-либо i-й строки необходимо предварительно вычислить коэффициент r_i. Всего в таблице заполняют $(n+1)$ строк.

Критерий формулируют следующим образом: система устойчива, если все элементы первого столбца таблицы Рауса имеют одинаковый знак. Обычно характеристическое уравнение приводят к такому виду, когда $a_0 > 0$, тогда для устойчивости системы все остальные элементы первого столбца должны быть положительными: $c_{i1} > 0$, $i = 2, 3, \ldots, n+1$.

При наличии отрицательных элементов в первом столбце таблицы Рауса система неустойчива. Число таких элементов равно числу корней характеристического уравнения с положительной вещественной частью.

Если один из элементов первого столбца равен нулю, а остальные элементы положительные, система на границе устойчивости — характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней.

При равенстве нулю последнего $(n+1)$-го элемента или ν последних элементов первого столбца система также на границе устойчивости — характеристическое уравнение имеет соответственно один или ν нулевых корней.

Составляя таблицу Рауса, расчет можно закончить сразу же после появления нулевого или отрицательного элемента в первом столбце. В этом случае уже можно сделать вывод, что система на границе устойчивости или неустойчивая. Все элементы каждой из строк таблицы Рауса, начиная с третьей, можно умножить или разделить на одно и то же положительное число, если это целесообразно для расчета.

Пример 6.3. Проверить устойчивость САР, характеристическое уравнение которой

$$1{,}13\cdot 10^{-6}s^7 + 5{,}14\cdot 10^{-5}s^6 + 9{,}22\cdot 10^{-4}s^5 + 7{,}95\cdot 10^{-3}s^4 +$$
$$+ 6{,}36\cdot 10^{-2}s^3 + 0{,}275s^2 + 0{,}75s + 1 = 0.$$

Расчет занесен в табл. 6.2. Все $(n+1)$ элементов первого столбца положительные, и, следовательно, система устойчива.

6.4. КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ МИХАЙЛОВА

Частотный критерий устойчивости Михайлова позволяет судить об устойчивости замкнутой или разомкнутой системы по годографу характеристического вектора (по годографу Михайлова).

Характеристический вектор $\mathcal{D}(j\omega)$ получается из характеристического полинома

$$\mathcal{D}(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$$

путем подстановки $s = j\omega$:

$$\mathcal{D}(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(j\omega) + a_n = X + jY, \quad (6.13)$$

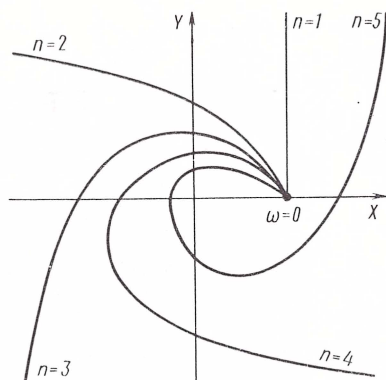


Рис. 6.2. Годографы Михайлова устойчивых систем

где

$$X = X(\omega) = a_n - \omega^2 a_{n-2} + \omega^4 a_{n-4} - \cdots;$$

$$Y = Y(\omega) = \omega(a_{n-1} - \omega^2 a_{n-3} + \omega^4 a_{n-5} - \cdots).$$

Годограф Михайлова есть кривая, которую описывает конец вектора $\mathscr{D}(j\omega)$ на комплексной плоскости при изменении ω от 0 до ∞. Годограф начинается при $\omega = 0$ на вещественной оси в точке a_n и при $\omega = \infty$ уходит в бесконечность в соответствующем квадранте. Угол поворота ψ характеристического вектора определяется следующим выражением:

$$\psi = n\frac{\pi}{2} - l\pi, \tag{6.14}$$

где n — степень характеристического полинома (порядок характеристического уравнения); l — число корней характеристического полинома с положительной вещественной частью.

Следовательно, для устойчивости замкнутой системы n-го порядка необходимо и достаточно, чтобы при изменении частоты от 0 до ∞ годограф Михайлова начинался на положительной вещественной полуоси и обошел в положительном направлении (против часовой стрелки) последовательно n квадрантов, нигде не обращаясь в нуль.

На рис. 6.2 показаны годографы Михайлова устойчивых систем первого—пятого порядков с равным значением коэффициента a_n. При четном n годограф уходит в бесконечность вдоль оси X и при нечетном n — вдоль оси Y.

Если система находится на границе устойчивости, то годограф Михайлова проходит через начало координат так, что после небольшой его деформации около начала координат критерий удовлетворяется.

Годографы Михайлова системы четвертого порядка, находящейся на границе устойчивости, показаны на рис. 6.3, *а* и *б*. В первом случае характеристический полином имеет пару чисто мнимых корней (колебательная граница устойчивости) и во втором — нулевой корень (апериодическая граница устойчивости).

У неустойчивых систем годографы Михайлова имеют разнообразную форму. На рис. 6.4 показаны годографы неустойчивых систем четвертого порядка. Их характеристический полином имеет положительный вещественный корень (кривая *1*), два положительных вещественных корня (кривая *2*), два комплексных со-

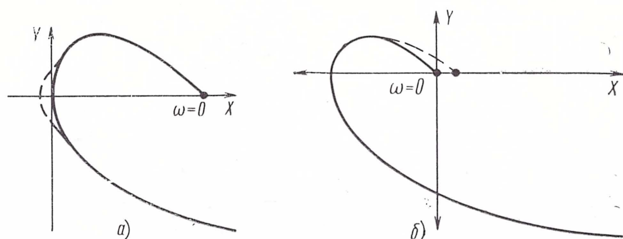


Рис. 6.3. Годографы Михайлова систем четвертого порядка, находящихся на границе устойчивости:
а — апериодической и *б* — колебательной

пряженных корня с положительной вещественной частью (кривая *3*), два чисто мнимых корня и положительный вещественный корень (кривая *4*). В последнем случае годограф проходит через начало осей координат, но небольшая деформация его не приведет к удовлетворению критерия.

Имея годограф неустойчивой системы, пользуясь равенством (6.14), можно определить число корней характеристического полинома с положительной вещественной частью. Например, годографу *2* на рис. 6.4 соответствует поворот характеристического вектора на угол $\psi = 0$. Следовательно, равенство (6.14) принимает такой вид:

$$0 = 4\frac{\pi}{2} - l\pi.$$

Отсюда $l = 2$.

Характеристический полином $\mathscr{D}(s)$ можно представить в виде

$$\mathscr{D}(s) = (s^2 + \omega_i^2)(c_0 s^{n-2} + c_1 s^{n-3} + \cdots + c_{n-3}s + c_{n-2}) + \\ + c_{n+1}s + c_n, \qquad (6.15)$$

где

$$c_0 = a_0;\ c_1 = a_1;\ c_2 = a_2 - \omega_i^2 c_0;$$

$$c_3 = a_3 - \omega_i^2 c_1;\ \ldots c_{n-1} = a_{n-1} - \omega_i^2 c_{n-3};$$

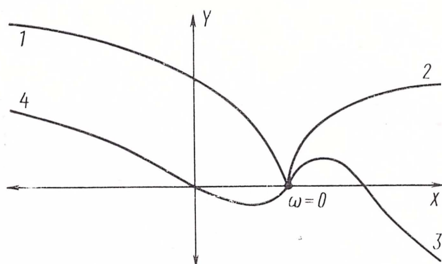
$$c_n = a_n - \omega_i^2 c_{n-2}.$$

После подстановки в характеристический полином (6.15) $s = j\omega$ получается следующее выражение для характеристического вектора:

$$\mathscr{D}(j\omega) = c_n + j\omega_i c_{n-1}. \qquad (6.16)$$

Таким образом, можно определять координаты годографа Михайлова, не вычисляя степеней ω_i выше второй. Расчет при каждом значении частоты удобно вести по схеме, приведенной в табл. 6.3. Коэффициенты c_j получаются алгебраическим сложением коэффициентов a_j и $\omega_i^2 c_{j-2}$.

Рис. 6.4. Годографы Михайлова неустойчивых систем четвертого порядка



Иногда удобнее пользоваться другой формулировкой критерия Михайлова: для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы корни мнимой (полином Y) и вещественной (полином X) частей ее характеристического вектора были положительными вещественными и чередовались, т. е. удовлетворялись неравенства

$$\omega_{y1} = 0 < \omega_{x1} < \omega_{y2} < \omega_{x2} < \ldots, \tag{6.17а}$$

где ω_{y1}, ω_{y2} — корни полинома Y; ω_{x1}, ω_{x2} — корни полинома X.

Удобнее вычислять квадраты корней полиномов X и Y и определять устойчивость по выполнению неравенств

$$\omega_{y1}^2 = 0 < \omega_{x1}^2 < \omega_{y2}^2 < \omega_{x2}^2 < \ldots. \tag{6.17б}$$

Таблица 6.3

Вычисление координат годографа Михайлова

ω_i	a_0	a_1	a_2	a_3	…	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
	—	—	$-\omega_i^2 c_0$	$-\omega_i^2 c_1$	…	$-\omega_i^2 c_{n-4}$	$-\omega_i^2 c_{n-3}$	$-\omega_i^2 c_{n-2}$
ω_i^2	c_0	c_1	c_2	c_3	…	c_{n-2}	$c_{n-1}\omega_i = Y(\omega_i)$	$c_n = X(\omega_i)$

6.5. КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ НАЙКВИСТА

Частотный критерий Найквиста дает возможность определить устойчивость замкнутой системы по амплитудно-фазовой частотной характеристике $\overline{W}(j\omega)$ ее разомкнутой цепи, если удовлетворяется условие $\lim\limits_{\omega \to \infty} |\overline{W}(j\omega)| = C$ (в частности, $C = 0$). Для удовлетворения этого условия степень m числителя передаточной функции W разомкнутой системы не должна быть выше степени n ее знаменателя, что выполняется для любых реальных систем.

Предварительно должна быть определена устойчивость исследуемой системы в разомкнутом состоянии. Для неустойчивой разомкнутой системы нужно выяснить, какое число корней ее характеристического полинома имеет положительные вещественные части.

В одноконтурной системе, составленной из последовательно соединенных звеньев, корни характеристических полиномов

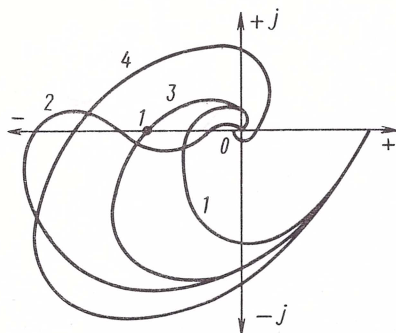


Рис. 6.5. Амплитудно-фазовые частотные характеристики устойчивых разомкнутых систем

$Q_i = Q_i(s)$ этих звеньев являются одновременно корнями характеристического полинома разомкнутой системы. Определение l в этом случае не вызывает затруднений. Если какое-либо звено одноконтурной системы охвачено обратной связью, то нужно определить корни характеристического полинома этого замкнутого контура. Они войдут в число корней характеристического полинома разомкнутой системы.

При наличии перекрестных обратных связей передаточную функцию разомкнутой системы можно определить по табл. 3.2 или методами, изложенными в гл. 3. Характеристический полином разомкнутой системы в этом случае не будет произведением характеристических полиномов отдельных звеньев. Для исследования ее устойчивости удобно воспользоваться критериями Рауса или Михайлова. Они позволяют определить число корней с положительными вещественными частями, если разомкнутая система окажется неустойчивой.

Различают три случая применения критерия Найквиста.

1. *Разомкнутая система устойчивая*. В этом случае для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой системы при изменении ω от 0 до ∞ не охватывала точку с координатами [—1, $j0$].

На рис. 6.5 изображены возможные ситуации. При АФЧХ, показанной кривой *1*, замкнутая система абсолютно устойчива, т. е. она остается устойчива и при уменьшении передаточного коэффициента разомкнутой цепи. Если АФЧХ является кривая *2*, то замкнутая система условно устойчива. Она остается устойчивой только при значении k, лежащем в некоторых пределах. Кривая *3* проходит через критическую точку с координатами [—1, $j0$). Это означает, что замкнутая система находится на колебательной границе устойчивости. Кривая *4* охватывает критическую точку, поэтому замкнутая система неустойчивая.

Пример 6.4. Исследовать на устойчивость одноконтурную систему с единичной обратной связью. Результаты экспериментального определения частотных характеристик регулируемого объекта приведены в табл. 6.4. Передаточная функция прямой цепи регулятора

$$W_{\text{р}} = \frac{k_{\text{р}}(\tau s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)},$$

где $k_{\text{р}} = 5$; $\tau = 0{,}08$ с; $T_1 = 0{,}1$ с; $T_2 = 0{,}05$ с.

Таблица 6.4

Частотные характеристики регулируемого объекта

ω	0	2	4	6	8	10	15	20
A_0	2,0	0,96	0,49	0,31	0,21	0,15	0,076	0,048
ω_0, град	0	—73,3	—98,8	—113,6	—124,0	—132,3	—144,7	—153,4

Составим формулы для определения амплитуды и фазы прямой цепи регулятора:

$$A_p = k_p \sqrt{\frac{1+\tau^2\omega^2}{(1-T_1T_2\omega^2)^2+(T_1+T_2)^2\omega^2}} =$$

$$= 5\sqrt{\frac{1+0{,}0064\omega^2}{1+0{,}0125\omega^2+0{,}000025\omega^4}};$$

$$\psi_p = \operatorname{arctg}\tau\omega - \operatorname{arctg}\frac{(T_1+T_2)\,\omega}{1-T_1T_2\omega^2} =$$

$$= \operatorname{arctg} 0{,}08\omega - \operatorname{arctg}\frac{0{,}15\omega}{1-0{,}005\omega^2}.$$

Вычислим значения A_p и ψ_p при частотах, для которых известны значения амплитуды A_o и фазы ψ_o регулируемого объекта. Результаты расчета занесены в табл. 6.5.

Затем вычислим значения A и ψ разомкнутой системы:

$$A = A_oA_p \text{ и } \psi = \psi_o + \omega_p.$$

Для построения АФЧХ целесообразно вычислить значения ее вещественной и мнимой частей:

$$U = A\cos\psi \text{ и } V = A\sin\psi.$$

Результаты расчета занесены в табл. 6.5. Участок АФЧХ разомкнутой системы около критической точки изображен на рис. 6.6.

Таблица 6.5

Результаты расчета к примеру 6.4

ω	0	2	4	6	8	10	15	20
A	5,0	4,94	4,78	4,56	4,30	4,05	3,47	2,99
ψ_p, град	0	—8,2	—15,2	—22,0	—27,6	—32,9	—42,7	—50,5
A	10	4,74	2,34	1,41	0,90	0,61	0,26	0,14
ψ, град	0	—81,5	—114,0	—135,6	—151,7	—165,2	—187,4	—203,9
U	10	0,70	—0,95	—1,01	—0,79	—0,59	—0,26	—0,13
V	0	—4,69	—2,14	—0,99	—0,43	—0,16	0,03	0,06

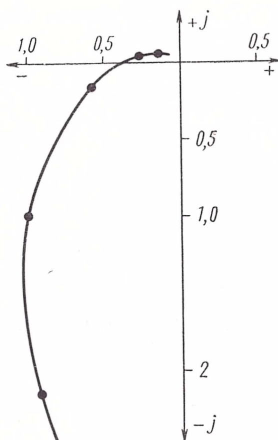


Рис. 6.6. Исследование устойчивости системы, рассматриваемой в примере 6.6

Частотные характеристики объекта сняты экспериментально, и, следовательно, он устойчив. Корни характеристического полинома прямой цепи регулятора отрицательные:

$$s_1 = -\frac{1}{T_1} = -10; \quad s_2 = -\frac{1}{T_2} = -20.$$

Разомкнутая система устойчива и ее АФЧХ не охватывает точки с координатами [—1, $j0$], поэтому в замкнутом состоянии рассматриваемая система устойчива.

2. *Разомкнутая система на границе устойчивости.* Характеристический полином такой разомкнутой системы имеет нулевые или чисто мнимые корни, а у остальных корней отрицательные вещественные части.

Если нулевых корней ν, то АФЧХ при $\omega = 0$ дугой бесконечно большого радиуса перемещается от положительной вещественной полуоси на угол $-\nu\frac{180°}{2}$ по часовой стрелке. Такие АФЧХ показаны на рис. 6.7.

Если есть пара чисто мнимых корней (в знаменателе частотной передаточной функции имеется множитель $1 - \omega^2 T_i^2$), то АФЧХ при частоте $\omega_i = \frac{1}{T_i}$ дугой бесконечно большого радиуса перемещается на угол —180° (по часовой стрелке). Такая АФЧХ показана на рис. 6.8.

В обоих случаях для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой системы при изменении ω от 0 до ∞, дополненная на участке разрыва дугой бесконечно большого радиуса, не охватывала точку с координатами [—1, $j0$].

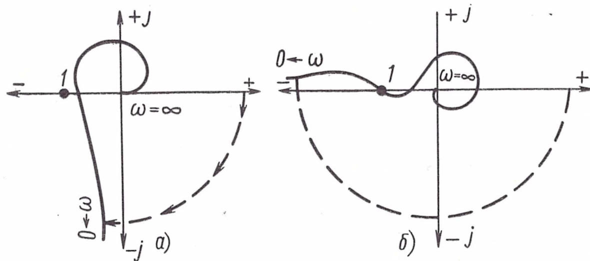
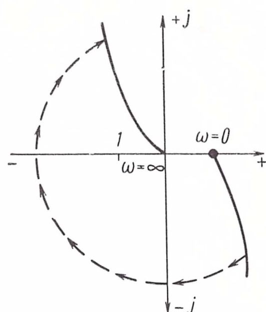


Рис. 6.7. Амплитудно-фазовые частотные характеристики разомкнутой цепи систем, находящихся на границе устойчивости: *а* — $\nu = 1$, замкнутая система устойчивая; *б* — $\nu = 2$, замкнутая система на границе устойчивости

Рис. 6.8. Амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой цепи системы, находящейся на колебательной границе устойчивости



АФЧХ разомкнутой системы, характеристический полином которой имеет чисто мнимые корни, показана на рис. 6.8. При замыкании эта система будет неустойчивой.

Пример 6.5 Исследовать на устойчивость систему, разомкнутую цепь которой описывают передаточной функцией

$$W = \frac{k(\tau s + 1)}{(T_1^2 s^2 + 1)(T_2 s + 1)},$$

где $k = 20$; $\tau = 0{,}02$ с; $T_1 = 0{,}05$ с; $T_2 = 0{,}01$ с.

Прежде всего можно заключить, что характеристический полином имеет чисто мнимые корни $\pm \frac{1}{T_1} j$.

Затем определим частотную передаточную функцию разомкнутой системы

$$W(j\omega) = \frac{20(1 + j\omega 0{,}02)}{(1 - \omega^2 0{,}0025)(1 + j\omega 0{,}01)} = U + jV,$$

где

$$U = \frac{20(1 + 0{,}0002\omega^2)}{(1 - 0{,}0025\omega^2)(1 + 0{,}0001\omega^2)};$$

$$V = \frac{0{,}2\omega}{(1 - 0{,}0025\omega^2)(1 + 0{,}0001\omega^2)}.$$

Вычислим значения U и V (табл. 6.6) и построим АФЧХ разомкнутой системы (рис. 6.9). При $\omega = \frac{1}{T_1} = 20$ с$^{-1}$ АФЧХ имеет разрыв. Если эту кривую дополнить дугой бесконечно большого радиуса, то точка с координатами [—1, $j0$] будет находиться вне получившегося контура. Следовательно, замкнутая система будет устойчивой.

3. *Разомкнутая система неустойчивая.* Характеристический полином такой системы имеет l корней с положительной вещественной частью.

Таблица 6.6

Результаты расчета к примеру 6.5

ω	0	5	10	12	15	25	27	30	35	40
U	20	21,4	26,9	31,7	46,8	—37,6	—26,0	—17,3	—10,8	—7,9
V	0	1,06	2,64	3,70	6,71	—8,36	—6,12	—4,40	—3,02	—2,38

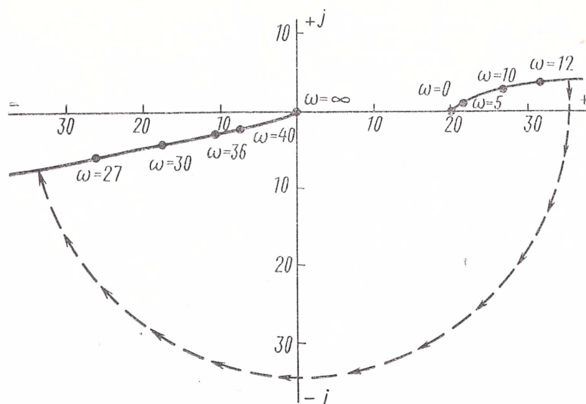


Рис. 6.9. Исследование устойчивости системы, рассматриваемой в примере 6.5

В этом, наиболее общем, случае критерий Найквиста формулируют так: для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы при изменении ω от 0 до ∞ вектор, начало которого находится в точке с координатами $[-1, j0]$, а конец на амплитудно-фазовой частотной характеристике разомкнутой системы, повернулся в положительном направлении (против часовой стрелки) на угол $l \cdot 180°$.

Характеристический полином разомкнутой системы, кроме корней с вещественой частью (положительной или отрицательной), может иметь нулевые и чисто мнимые корни. Тогда на участках разрыва АФЧХ должна быть дополнена дугой бесконечно большого радиуса.

Пример 6.6. Выяснить устойчивость системы, если передаточная функция ее разомкнутого контура

$$W = \frac{k(\tau s + 1)}{(T_1 s - 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)},$$

где $k = 50$; $\tau = 0{,}05$ с; $T_1 = 0{,}1$; $T_2 = 0{,}02$; $T_3 = 0{,}25$ с.

По передаточной функции W определим, что характеристический полином разомкнутой системы имеет один положительный корень

$$s_1 = \frac{1}{T_1} = 10.$$

Для исследования устойчивости составим частотную передаточную функцию разомкнутой системы

$$W(j\omega) = \frac{k(1 + j\tau\omega)}{(-1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)(1 + j\omega T_3)} = U + jV,$$

где

$$U = -\frac{50(1 + 0{,}0305\omega^2 + 0{,}000025\omega^4)}{1 + 0{,}0729\omega^2 + 0{,}000654\omega^4 + 0{,}00000025\omega^6};$$

$$V = \frac{50\omega(0{,}12 - 0{,}0006\omega^2)}{1 + 0{,}0729\omega^2 + 0{,}000654\omega^4 + 0{,}00000025\omega^6}.$$

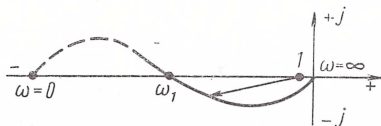


Рис. 6.10. Исследование устойчивости системы, рассматриваемой в примере 6.6

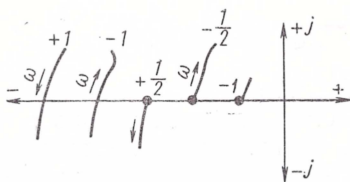


Рис. 6.11. Обозначение знака перехода АФЧХ через отрезок вещественной оси от —1 до — ∞

По выражениям, определяющим U и V, заключаем:

а) при $\omega = 0$ $U = -50$ и $V = 0$;

б) при $0 \leqslant \omega < \infty$ $U < 0$;

в) при $\omega = \infty$ $U = V = 0$;

г) при $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{0,12}{0,0006}} = \sqrt{200}$; $V = 0$; $U = -9,25$;

д) при $0 < \omega < \omega_1$ $V > 0$ и при $\omega_1 < \omega < \infty$ $V < 0$.

Полученные данные подсказывают форму (рис. 6.10) АФЧХ разомкнутой системы. Вектор, помещенный в точку с координатами $[-1, j0]$ и перемещающийся своим концом по построенной кривой, поворачивается против часовой стрелки на угол, равный π. Следовательно, замкнутая система устойчива.

При сложной форме АФЧХ разомкнутой системы удобнее применять другую формулировку критерия Найквиста, которая использует правило переходов. Переход АФЧХ при увеличении ω через отрезок вещественной оси от —1 до ∞ сверху вниз считают положительным и снизу вверх отрицательным (рис. 6.11). АФЧХ может начинаться на указанном отрезке при $\omega = 0$ или заканчиваться при $\omega = \infty$. Тогда считается, что она совершает полперехода.

Критерий формулируют так: замкнутая система устойчива, если разность между числом положительных и отрицательных переходов амплитудно-фазовой частотной характеристики разомкнутой системы через отрезок вещественной оси от —1 до $-\infty$ равен $\frac{l}{2}$. Здесь l — число корней характеристического полинома разомкнутой системы с положительной частью.

При наличии у этого полинома нулевых и чисто мнимых корней АФЧХ на участках разрыва должна быть дополнена дугой бесконечно большого радиуса.

Для применения критерия Найквиста исследуемая система может быть разомкнута в любой точке, т. е. может быть разомкнута не главная обратная связь, а одна из местных обратных связей.

В передаточной функции разомкнутой системы можно также [18] перенести члены знаменателя, кроме старшего, в числитель или члены числителя, кроме младшего, в знаменатель.

Указанные приемы могут быть использованы для упрощения расчетов.

6.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ЧАСТОТНЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ

Критерий Найквиста позволяет выяснить устойчивость замкнутой системы не только по АФЧХ, но также и по логарифмическим частотным характеристикам разомкнутой системы. Эту возможность используют весьма широко вследствие простоты построения таких характеристик и определения по ним запаса устойчивости.

При этом критерий формулируют так: для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы при положительных значениях логарифмической амплитудно-частотной характеристики разность между числом положительных и отрицательных переходов фазочастотной характеристики через линии —180°, —3·180°, ... равнялись $\frac{l}{2}$. Здесь l — число корней с положительной вещественной частью характеристического полинома разомкнутой системы, пересечение фазочастотной характеристикой линий —180°, —3·180°, ... снизу вверх считается положительным переходом, а сверху вниз — отрицательным.

Пусть разомкнутая система устойчива или ее характеристический полином имеет один нулевой корень (начальное значение фазочастотной характеристики $\psi(0) = -90°$). Тогда для устойчивости замкнутой системы общее число переходов фазочастотной характеристики через линию —180° при положительных значениях амплитудно-частотной характеристики должно быть четным (в частности, равным нулю). На рис. 6.12 показаны наиболее характерные ЛФЧХ.

Пример 6.7. Выяснить устойчивость системы, у которой разомкнутая цепь описывается передаточной функцией

$$W = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)(T_4 s + 1)},$$

где $k = 20$; $T_1 = 1{,}25$; $T_2 = 0{,}6$; $T_3 = 0{,}02$; $T_4 = 0{,}01$ с.

По характеристическому полиному разомкнутой системы заключаем, что все его корни действительные отрицательные.

Затем строим логарифмические частотные характеристики (см. п. 5.3) по следующим данным: $20 \lg k = 26$ дБ; сопрягающие частоты $\omega_1 = \frac{1}{T_1} = 0{,}8$; $\omega_2 = \frac{1}{T_2} = 1{,}67$; $\omega_3 = \frac{1}{T_3} = 50$; $\omega_4 = \frac{1}{T_4} = 100$ $с^{-1}$. Характеристики показаны на рис. 6.13.

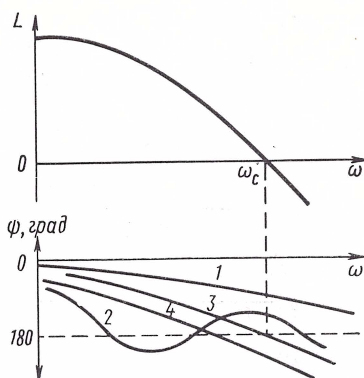
На участке частот (до частоты среза ω_c), при которых асимптотическая амплитудно-частотная характеристика положительная, фазочастотная характеристика $\psi(\omega) > 180°$ (не пересекает линии —180°). Поэтому делаем вывод, что замкнутая система устойчивая.

Вывод сделан по асимптотической ЛФЧХ, так как частота среза ω_c находится на достаточном удалении от ближайших к ней сопрягающих частот ω_2 и ω_3. Поправки ЛАЧХ повлияют на значение ω_c незначительно.

Для суждения об устойчивости обычно строят асимптотическую ЛАЧХ. К ней нужно сделать поправки (см. п. 5.3) около тех ча-

Рис. 6.12. Логарифмические частотные характеристики разомкнутой системы:

1 — замкнутая система абсолютно устойчивая; *2* — условно устойчивая; *3* — на границе устойчивости; *4* — неустойчивая



стот, которые ограничивают положительные участки и расположены достаточно близко от сопрягающих частот (особенно от сопрягающих частот, соответствующих колебательным звеньям).

Если характеристический полином разомкнутой системы имеет ν нулевых корней, то начальное значение ее фазочастотной характеристики $\psi(0) = -\nu 90°$. Для устойчивости замкнутой системы (возможна лишь условная устойчивость) фазочастотная характеристика должна иметь форму, показанную на рис. 6.14.

Пример 6.8. Выяснить устойчивость системы с передаточной функцией разомкнутой цепи

$$W = \frac{k(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{s^2 (Ts - 1)},$$

где $k = 300$; $T = 0{,}25$ с; $\tau_1 = 0{,}2$ и $\tau_2 = 0{,}1$ с.

Характеристический полином разомкнутой системы имеет два нулевых корня ($\nu = 2$) и один действительный положительный корень $\frac{1}{T} = 4$.

Данные для построения логарифмических частотных характеристик: $20 \lg k = 49{,}5$ дБ; сопрягающие частоты $\omega = \frac{1}{T} = 4\ \text{с}^{-1}$; $\omega_2 = \frac{1}{\tau_1} = 5\ \text{с}^{-1}$; $\omega_3 =$

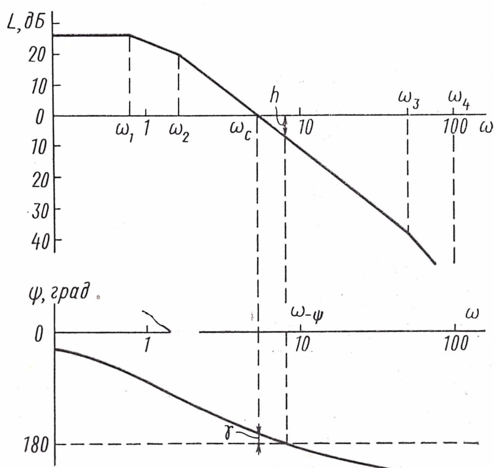


Рис. 6.13. Логарифмические частотные характеристики к примеру 6.7

Рис. 6.14. Логарифмические частотные характеристики разомкнутой системы при нулевых корнях ее характеристического уравнения

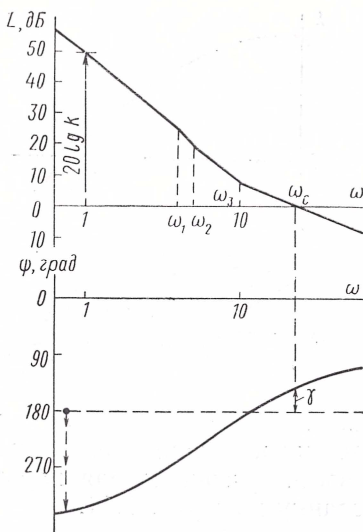
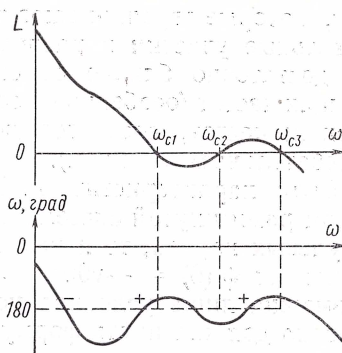


Рис. 6.15. Логарифмические частотные характеристики к примеру 6.8

Рис. 6.16. Логарифмические частотные характеристики неустойчивой ($l = 2$) разомкнутой системы



$= 10$ с$^{-1}$; $\psi(\omega) = -180° + \operatorname{arctg} \omega\tau_1 + \operatorname{arctg} \omega\tau_2 - \operatorname{arctg} \frac{\omega T}{-1}$. Характеристики показаны на рис. 6.15. Вследствие положительного корня начальный (при $\omega = 0$) скачок фазочастотной характеристики на $-$ν90° нужно отсчитывать не от 0, а от $-180°$ С. Это показано штриховой линией со стрелками.

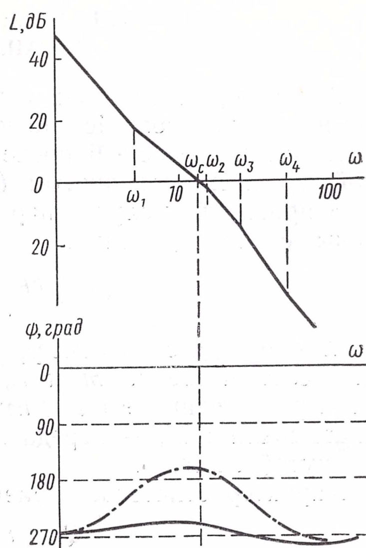
На участке частот, при которых ЛАЧХ положительна, ЛФЧХ делает полперехода через линию—180° сверху вниз и один переход снизу вверх. Следовательно, разность между числом положительных и отрицательных переходов $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ составляет $\frac{l}{2} = \frac{1}{2}$ и можем сделать вывод об устойчивости системы в замкнутом состоянии.

Поправки к асимптотической ЛАЧХ незначительно изменят значение ω_c и не повлияют на сделанный вывод.

На рис. 6.16 показан один из возможных случаев определения устойчивости, когда характеристический полином разомкнутой системы имеет два корня с положительной вещественной частью ($l = 2$). На участке, когда $L(\omega) > 0$, фазочастотная характеристика делает два положительных перехода через линию $-180°$ и один отрицательный. Их разность равна $\frac{l}{2}$, и следовательно, замкнутая система будет устойчивой.

Знаменатель передаточной функции разомкнутой цепи многоконтурной системы n-го порядка представляет собой полином n-й степени. Для построения логарифмических частотных характеристик необходимо определить его корни и затем разложить на элементарные множители. Затраты времени на эти вычисления можно существенно уменьшить, если воспользоваться тем, что критерий Найквиста позволяет переносить часть членов знаменателя, кроме старшего, в числитель и часть членов числителя, кроме младшего, в знаменатель.

Рис. 6.17. Логарифмические частотные характеристики к примеру 6.9



Как известно (см. п. 3.1), характеристический полином $\mathcal{D}$ замкнутой системы представляет собой сумму числителя kR и знаменателя Q передаточной функции разомкнутой системы:

$$\mathcal{D} = kR + Q = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \\ + \cdots + a_{n-1} s + a_n.$$

Но старшие члены этого полинома можно считать знаменателем Q^*, а младшие члены числителем R^* передаточной функции W^* некоторой условной разомкнутой системы, замыкание которой дает тот же полином $\mathcal{D}$. Таким образом, разлагать на множители нужно полином Q^* значительно меньшей степени, чем полином Q.

Пример 6.9. Исследовать устойчивость системы, если передаточная функция разомкнутой цепи

$$W = \frac{k(\tau s + 1)}{a_0 s^5 + a_1 s^4 + a_2 s^3 + a_3 s^2 + a_4 s + 1},$$

где $k = 80$; $\tau = 0{,}2$ с; $a_0 = 0{,}0002$ с^5; $a_1 = 0{,}008$ с^4; $a_2 = 0{,}075$ с^3; $a_3 = 0{,}3$ с^2; $a_4 = 0{,}8$ с.

Составим характеристический полином замкнутой системы:

$$\mathcal{D} = a_0 s^5 + a_1 s^4 + a_2 s^3 + a_3 s^2 + (a_4 + k\tau)\, s + (1 + k) = \\ = 0{,}0002 s^5 + 0{,}008 s^4 + 0{,}075 s^3 + 0{,}3 s^2 + 16{,}8 s + 81.$$

Составим условную передаточную функцию разомкнутой системы и разложим ее полиномы на элементарные множители:

$$W^* = \frac{0{,}3s^2 + 16{,}8s + 81}{0{,}0002s^5 + 0{,}008s^4 + 0{,}075s^3} =$$

$$= \frac{1080\,(0{,}0037s^2 + 0{,}205s + 1)}{s^3\,(0{,}00267s^2 + 0{,}107s + 1)} = \frac{1080\,(0{,}185s + 1)\,(0{,}02s + 1)}{s^3\,(0{,}0668s + 1)\,(0{,}04s + 1)}.$$

Строим логарифмические частотные характеристики условной разомкнутой системы по следующим данным: $20 \lg k = 60{,}6$ дБ; сопрягающие частоты $\omega_1 = \frac{1}{0{,}185} = 5{,}3$; $\omega_2 = \frac{1}{0{,}0668} = 15$; $\omega_3 = \frac{1}{0{,}04} = 25$; $\omega_4 = \frac{1}{0{,}02} = 50$ с$^{-1}$.

По характеристикам (рис. 6.17) заключаем, что при замыкании исследуемая система становится неустойчивой.

Условная разомкнутая система имеет три нулевых корня и ее логарифмическая фазочастотная характеристика при частоте среза ω_c должна быть больше $-180°$; на рис. 6.17 это показано штрихпунктирной линией.

6.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В некоторых системах автоматического регулирования реакция на внешнее воздействие возникает только через определенный промежуток времени θ после начала этого воздействия. Такое свойство называют чистым (транспортным) запаздыванием.

В простейшем случае передаточная функция разомкнутой системы с запаздыванием

$$W = \frac{kRe^{-\theta s}}{Q} = W_0 e^{-\theta s}, \qquad (6.18)$$

где k — передаточный коэффициент; R и Q — полиномы от s степени, соответственно m и n, у которых коэффициент младшего члена равен единице ($m \leqslant n$); θ — время чистого (транспортного) запаздывания; W_0 — передаточная функция линейной части разомкнутой системы.

Характеристическое уравнение замкнутой системы

$$Q + kRe^{-\theta s} = 0. \qquad (6.19)$$

Это трансцендентное уравнение, и оно имеет бесконечно большое число корней. Поэтому для устойчивости систем первого и второго порядка недостаточно только положительности коэффициентов, а для систем более высокого порядка неприменимы критерии устойчивости Гурвица и Рауса.

Наиболее удобен критерий Найквиста и для его применения передаточную функцию разомкнутой системы следует иметь в виде (6.18). С этой целью соответственно выбирают точку размыкания исследуемой системы.

В одноконтурной системе можно размыкать основную обратную связь (рис. 6.18, *а*). В этом случае

$$W = W_1 W_2 e^{-\theta s}. \qquad (6.20)$$

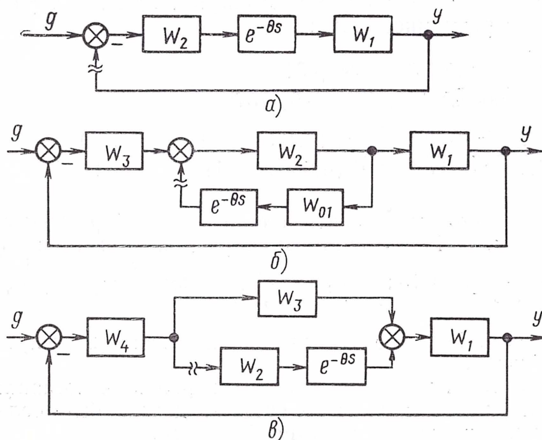


Рис. 6.18. Выбор точки размыкания системы с запаздыванием

Если звено с запаздыванием находится в цепи местной обратной связи, то систему следует размыкать на выходе этой связи (рис. 6.18, *б*). Тогда

$$W = \frac{W_{01}W_2}{1 + W_1W_2W_3} e^{-\theta s}. \qquad (6.21)$$

Звено с запаздыванием может быть в параллельной ветви прямой цепи системы. На входе этой ветви и нужно размыкать систему (рис. 6.18, *в*). При этом

$$W = \frac{W_1W_2W_4}{1 + W_1W_3W_4} e^{-\theta s}. \qquad (6.22)$$

Передаточные функции W, определяемые равенствами (6.20)—(6.22), после подстановки значения передаточных функций отдельных участков системы принимают вид (6.18).

Формулировка критерия Найквиста для систем с запаздыванием не меняется. Однако построение АФЧХ такой системы имеет некоторую особенность.

Подставив в выражение (6.18) $s = j\omega$, получим частотную передаточную функцию

$$W(j\omega) = W_0(j\omega) e^{-j\omega\theta} = A(\omega) e^{j\psi(\omega)}, \qquad (6.23)$$

где

$$A(\omega) = A_0(\omega) \text{ и } \psi(\omega) = \psi_0(\omega) - \omega\theta, \qquad (6.24)$$

т. е. звено чистого запаздывания не изменяет амплитудно-частотную характеристику, но создает дополнительный отрицательный сдвиг по фазе, пропорциональный частоте.

Следовательно, можно построить амплитудно-фазовую часстотную характеристику $W_0(j\omega)$ линейной части и для каждой частоты ω_i повернуть векторы $W_0(j\omega_i)$ на угол $-\omega_i\theta$. Получается амплитудно-фазовая частотная характеристика $W(j\omega)$ разомкнутой системы с запаздыванием.

Дополнительный фазовый сдвиг $-\omega\theta$ «закручивает» годограф $W_0(j\omega)$ по часовой стрелке и тем сильнее, чем больше частота ω. Вследствие этого условия устойчивости ухудшаются. Однако в некоторых случаях, при сложной форме характеристики $W_0(j\omega)$, запаздывание улучшает условие устойчивости.

Для оценки влияния чистого запаздывания на устойчивость введено понятие критического значения времени запаздывания $\theta_{кр}$. Его определение показано на рис. 6.19. На амплитудно-фазовой частотной характеристике $W_0(j\omega)$ линейной части системы отыскивают точку, для которой модуль равен единице. Пусть этой точке соответствуют частота ω_1 и избыток фазы γ_1. Тогда критическое значение времени запаздывания

$$\theta_{кр} = \frac{\gamma_1}{\omega_1}, \qquad (6.25)$$

где γ_1 в рад.

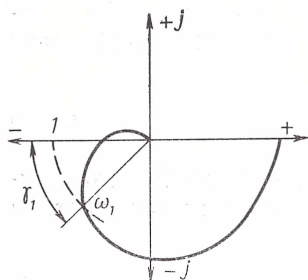


Рис. 6.19. Определение критического значения времени запаздывания

Исследование устойчивости системы с запаздыванием удобно проводить по логарифмическим частотным характеристикам ее разомкнутой цепи. Сначала строят логарифмические частотные характеристики линейной части разомкнутой системы. Затем к фазочастотной характеристике добавляют фазовый сдвиг $-\theta\omega$, создаваемый звеном чистого запаздывания.

Критическое значение $\theta_{кр}$ времени запаздывания определяют по избытку фазы γ_1 при частоте среза.

6.8. ЗАПАС УСТОЙЧИВОСТИ

Для нормального функционирования всякая система автоматического регулирования должна быть достаточно удалена от границы устойчивости, должна иметь достаточный запас устойчивости.

Необходимость этого обусловлена несколькими причинами:

а) уравнения элементов системы, как правило, идеализированы, при их составлении не учитывают второстепенные факторы;

б) при линеаризации уравнения погрешности приближения дополнительно увеличиваются;

в) параметры элементов определяют с некоторой погрешностью;

г) параметры однотипных элементов имеют технологический разброс;

д) при эксплуатации параметры элементов изменяются вследствие старения.

Следовательно, устойчивая по расчету система в действительности может оказаться неустойчивой.

Запас устойчивости необходим еще и для хорошего качества регулирования (см. гл. 7).

О запасе устойчивости можно судить прежде всего по расположению корней характеристического уравнения системы: чем дальше отстоят они от мнимой оси (в левой полуплоскости), тем больше запас устойчивости.

При синтезе системы выбирают такой запас устойчивости, при котором система функционирует устойчиво и с желаемым качеством переходных процессов.

Количественное определение запаса устойчивости зависит от того, какой критерий устойчивости используют. Однако в практике инженерных расчетов наиболее широко применяют определение запаса устойчивости на основании критерия Найквиста, по удалению амплитудно-фазовой частотной характеристики разомкнутой системы от точки с ординатами $[-1; j0]$. Этот факт оцени-

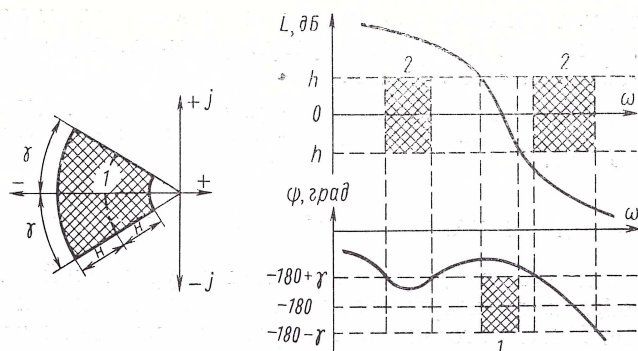


Рис. 6.20. Зоны, определяющие требования к запасу устойчивости

вают двумя показателями: запасом устойчивости по фазе γ и запасом устойчивости по модулю (амплитуде) h.

Для того чтобы система имела запасы устойчивости γ и h, АФЧХ ее разомкнутого контура при удовлетворении критерия устойчивости не должна заходить в часть кольца, заштрихованного на рис. 6.20, *а*. Эта запретная зона, включающая в себя точку с координатами [—1, j0], ограничена лучами, проведенными из начала осей координат под углами $-180° + \gamma$ и $-180° - \gamma$, и дугами с радиусами $1 + H$ и $1 - H$, где H — определяется соотношением $\lg H = \frac{h}{20}$.

Если устойчивость определена по логарифмическим частотным характеристикам, то для обеспечения запасов устойчивости γ и h необходимо, чтобы:

а) при $h \geqslant L(\omega) \geqslant -h$ фазочастотная характеристика удовлетворяла неравенству $-180° + \gamma \leqslant \psi(\omega) \leqslant -180° - \gamma$, т. е. не заходила в заштрихованную область 1 на рис. 6.20, *б*;

б) при $-180° + \gamma \geqslant \psi(\omega) \geqslant -180° - \gamma$ амплитудно-частотная характеристика удовлетворяла неравенству $h \leqslant L(\omega) \leqslant -h$, т. е. не заходила в заштрихованные области *2* на рис. 6.20, *б*.

Для абсолютно устойчивой системы запасы устойчивости γ и h определяют так, как показано на рис. 6.21. Запас по фазе

$$\gamma = 180° + \psi(\omega_c), \qquad (6.26)$$

где ω_c — частота среза, при которой $L(\omega_c) = 0$; запас по модулю

$$h = -L(\omega_\psi), \qquad (6.27)$$

где ω_ψ — частота, при которой $\omega(\omega_\psi) = -180°$.

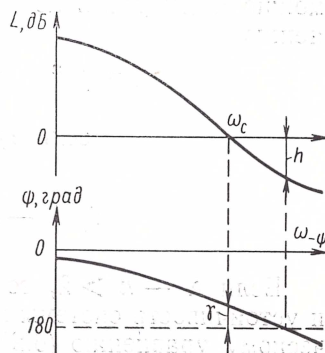


Рис. 6.21. Определение запаса устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам разомкнутой системы

Необходимые значения запасов устойчивости зависят от класса САР и требований к качеству регулирования. Ориентировочно $\gamma = 30 \div 60°$ и $h = 6 \div 20$ дБ.

По логарифмическим частотным характеристикам (см. рис. 6.13), построенным в примере 6.7, определим запас устойчивости исследованной системы: $\gamma \approx 20°$ и $h \approx 7$ дБ.

6.9. ВЛИЯНИЕ МАЛЫХ ПАРАМЕТРОВ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

При составлении дифференциальных уравнений элементов системы обычно пренебрегают влиянием второстепенных факторов на процесс. Иногда это влияние на устойчивость системы условно можно учесть с помощью некоторого малого параметра.

Иногда один или несколько параметров системы могут оказаться малыми по сравнению с другими. Возникает желание пренебречь этими малыми параметрами и понизить порядок уравнения для упрощения расчетов. Если это не влияет на устойчивость, то система является грубой в смысле А. А. Андронова. Однако может оказаться, что малые параметры влияют на устойчивость системы и расчет по упрощенному уравнению приведет к неверным выводам. Такая система является негрубой.

Таким образом, в каждом таком случае необходимо выяснить, следует ли учитывать малые параметры или ими можно пренебречь [75, 24].

Пусть характеристическое уравнение системы может быть приведено к виду

$$\mu \mathscr{D}_1 + \mathscr{D}_0 = 0, \tag{6.28}$$

где μ — малый параметр;

$$\mathscr{D}_0 = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n; \tag{6.29}$$

$$\mathscr{D}_1 = c_0 s^N + c_1 s^{N-1} + \cdots + c_{N-1} s + c_N.$$

Малый параметр μ не влияет на устойчивость системы и ее можно исследовать по вырожденному характеристическому уравнению

$$\mathscr{D}_0 = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0, \tag{6.30}$$

$$\text{если 1) } N - n = 1 \text{ и } \frac{a_0}{c_0} > 0;$$

$$\text{2) } N - n = 2 \text{ и } \frac{c_1}{c_0} - \frac{a_1}{a_0} > 0.$$

Если $N - n > 2$, то отбрасывать малый параметр μ нельзя и устойчивость системы необходимо исследовать по характеристическому уравнению (6.28).

Пример 6.10. Выяснить возможность пренебрежения малым параметром μ при исследовании на устойчивость системы, характеристическое уравнение которой

$$(T_1^2s^2 + 2\xi T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(\mu s + 1) + k = 0,$$

где $T_1 = 0{,}9$ с; $\xi = 0{,}8$; $T_2 = 0{,}09$ с; $k = 15$; $\omega = 0{,}001$ с.

Приведем характеристическое уравнение к виду (6.28)

$$\mu [T_1^2 T_2 s^4 + T_1(2\xi T_2 + T_1)s^3 + (2\xi T_1 + T_2)s^2 + s] +$$
$$+ [T_1^2 T_2 s^3 + T_1(2\xi T_2 + T_1)s^2 + (2\xi T_1 + T_2)s + (1 + k)] = 0.$$

В данном случае

$$N - n = 4 - 3 = 1 \text{ и } \frac{a_0}{c_0} = \frac{T_1^2 T_2}{T_1^2 T_2} = 1.$$

Следовательно, параметром μ можно пренебречь и исследовать устойчивость системы по вырожденному характеристическому уравнению

$$T_1^2 T_2 s^3 + T_1(2\xi T_2 + T_1)s^2 + (2\xi T_1 + T_2)s + (1 + k) = 0;$$
$$0{,}0729s^3 + 0{,}940s^2 + 1{,}53s + 16 = 0.$$

По критерию Гурвица система устойчива, так как

$$0{,}94 \cdot 1{,}53 = 1{,}44 > 0{,}0729 \cdot 16 = 1{,}17.$$

С целью контроля проверим устойчивость по характеристическому уравнению, включающему малый параметр μ:

$$7{,}29 \cdot 10^{-5}s^4 + 7{,}38 \cdot 10^{-2}s^3 + 0{,}941s^2 + 1{,}53s + 16 = 0.$$

На основании критерия Гурвица система устойчива, так как

$$7{,}38 \cdot 10^{-2} \cdot 0{,}941 \cdot 1{,}53 = 0{,}106 > 7{,}29 \cdot 10^{-5} \cdot 1{,}53^2 -$$
$$- (7{,}38 \cdot 10^{-2})^2 16 = 0{,}087.$$

Предположим, что характеристическое уравнение системы содержит m малых параметров $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$, каждый из которых повышает порядок уравнения на единицу. Выразим их через один малый параметр μ:

$$\mu_1 = \eta_1\mu, \ \mu_2 = \eta_2\mu, \ \ldots, \ \mu_m = \eta_m\mu, \tag{6.31}$$

где $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ — величины, сопоставимые по своей величине с другими параметрами системы.

Тогда характеристическое уравнение приводится к виду

$$\mu^m (c_{00}s^N + c_{01}s^{N-1} + \cdots) + \mu^{m-1}(c_{10}s^{N-1} + c_{11}s^{N-2} + \cdots) +$$
$$+ \cdots + (a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n) = 0. \tag{6.32}$$

Чтобы при малом μ система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы «вырожденное» характеристическое уравнение

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n = 0 \tag{6.33}$$

и вспомогательное уравнение

$$c_{00}s^m + c_{10}s^{m-1} + \cdots + c_{(m-1)0}s + a_0 = 0, \tag{6.34}$$

каждое порознь, удовлетворяли условиям устойчивости [24].

Вместо одного полного уравнения исследуют два более простых.

Пусть малыми параметрами являются постоянные времени нескольких апериодических и колебательных звеньев, а передаточная функция разомкнутой системы имеет такой вид:

$$W = \frac{kR}{\prod\limits_{i=1}^{m_1} (\mu_i s + 1) \prod\limits_{j=1}^{m_2} (\mu_j^2 s^2 + 2\xi_j \mu_j s + 1)\, Q}, \tag{6.35}$$

где R и Q — полиномы от s степени соответственно m и n, которые не содержат малых параметров и $n > m$.

Тогда об устойчивости замкнутой системы можно судить по вырожденному уравнению

$$Q + kR = 0. \tag{6.36}$$

Удобно определять устойчивость по логарифмическим частотным характеристикам вырожденной передаточной функции разомкнутой системы

$$W^* = \frac{kR}{Q}. \tag{6.37}$$

При этом можно оценить, как малые параметры влияют на запас устойчивости по фазе.

Параметры μ_i и μ_j достаточно малы и сопрягающие частоты $\omega_i = \frac{1}{\mu_i}$ и $\omega_j = \frac{1}{\mu_j}$ значительно больше частоты среза ω_c частотной передаточной функции $W^*(j\omega)$. Поэтому малые параметры при частоте среза создают малые дополнительные сдвиги по фазе. Их сумма (в рад.)

$$\psi_\mu = \sum_{i=1}^{m_1} - \operatorname{arctg} \mu_i \omega_c + \sum_{j=1}^{m_2} - \operatorname{arctg} \frac{2\xi_j \mu_j \omega_c}{1 - \mu_j^2 \omega_c^2} \approx$$

$$\approx -\omega_c \left[\sum_{i=1}^{m_1} \mu_i + \sum_{j=1}^{m_2} 2\xi_j \mu_j \right]. \tag{6.38}$$

Вследствие влияния малых параметров запас по фазе уменьшается:

$$\gamma \approx \gamma_0 + 57{,}3\psi_\mu, \tag{6.39}$$

где γ_0 — запас по фазе (в град) частотной передаточной функции $W^*(j\omega)$.

Пример 6.11. Выяснить устойчивость системы, у которой передаточная функция разомкнутой цепи

$$W = \frac{k(\tau s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)(T_4^2 s^2 + 2\xi T_4 s + 1)},$$

где $k = 100$; $\tau = 0{,}125$ с; $T_1 = 0{,}5$ с; $T_2 = 0{,}0022$ с; $T_3 = 0{,}002$ с; $T_4 = 0{,}001$ с и $\xi = 0{,}8$.

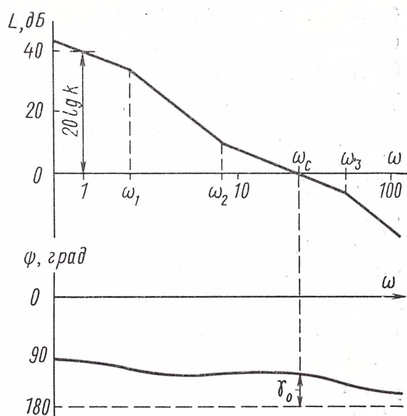


Рис. 6.22. Логарифмические частотные характеристики к примеру 6.11

Постоянные времени T_3 и T_4 примем за малые параметры и определим устойчивость по вырожденной передаточной функции

$$W^* = \frac{k(\tau s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}.$$

Данные для построения логарифмических частотных характеристик: $20 \lg k = 40$ дБ; сопрягающие частоты $\omega_1 = \frac{1}{T_1} = 2$ с$^{-1}$; $\omega_2 = \frac{1}{\tau} = 8$ с$^{-1}$ и $\omega_3 = \frac{1}{T_2} = 50$ с$^{-1}$.

По характеристикам (рис. 6.22) заключаем: вырожденная система устойчива и запас по фазе $\gamma_0 = 50°$.

Оценим влияние малых параметров на запас устойчивости. По формуле (6.38) определим сдвиг по фазе при частоте среза ω_c, вызываемый малыми параметрами:

$$\psi_\mu = -\omega_c\,[T_3 + 2\xi T_4] = -0{,}0904.$$

Действительный запас устойчивости по формуле (6.39)

$$\gamma = 50° - 57{,}3° \cdot 0{,}0904 = 44{,}7°.$$

В данном случае параметры, принятые за малые, существенно влияют на запас устойчивости по фазе. Это объясняется тем, что параметры (постоянные времени T_3 и T_4) лишь на один-два порядка отличаются от основных (от постоянных времени T_1 и T_2).

6.10. ВЫДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ

При инженерных расчетах весьма часто необходимо исследовать влияние на устойчивость САР тех или иных ее параметров, легко поддающихся изменению (передаточные коэффициенты и постоянные времени усилительно-преобразовательных элементов). Допустимые пределы изменения одного или двух параметров определяют при неизменных значениях остальных. В последнем случае на плоскости двух параметров выделяют (строят) область устойчивости, т. е. такую область изменения этих параметров, при которых система остается устойчивой.

Иногда на плоскости двух параметров строят семейство областей устойчивости при различных значениях третьего параметра. Тогда выясняют влияние на устойчивость всех трех параметров сразу.

Построение таких областей возможно с помощью любого из критериев устойчивости. Однако при инженерных расчетах такой путь применяют лишь для определения граничного значения передаточного коэффициента разомкнутой системы, а для выделения областей устойчивости используют более общий метод *Д*-разбиения. Принципиально это метод разделения *n*-мерного простран-

ства параметров на области, каждой из которых соответствует одно и то же число правых корней характеристического уравнения. Область, которой соответствует нуль правых корней, есть область устойчивости. Практически с помощью *Д*-разбиения выделяют области устойчивости в плоскости одного и двух параметров. О. К. Соболевым предложен также метод построения областей устойчивости в плоскости обобщенных параметров («Техническая кибернетика», 1970, № 5).

Определение граничного значения передаточного коэффициента. Наиболее часто выясняют влияние на устойчивость передаточного коэффициента k разомкнутой системы. Определяют его граничное значение $k_{\text{гр}}$, т. е. то значение, при котором система оказывается на границе устойчивости. Такая необходимость возникает потому, что с увеличением k повышается статическая точность системы (см. гл. 7) и нужно знать, не нарушится ли при этом устойчивость.

В системах до четвертого порядка включительно $k_{\text{гр}}$ наиболее просто определить по критерию устойчивости Гурвица. Неравенства, составляющие условие устойчивости (см. п. 6.2), записывают как равенства, и те из них, которые содержат k, рассматривают как уравнения относительно k. Наименьшее из значений k, являющихся решениями этих уравнений, есть граничное $k_{\text{гр}}$.

В примере 6.2 для определения $k_{\text{гр}}$ достаточно превратить в равенство последнее неравенство.

Из примера 6.2 следует, что в наиболее неблагоприятном случае, при $T_1 = T_2 = T_3$, $k_{\text{гр}} = 8$. Чем больше последовательно соединенных апериодических звеньев, тем меньше $k_{\text{гр}}$: при четырех звеньях $k_{\text{гр}} = 4$, при пяти $k_{\text{гр}} = 2{,}9$, при шести $k_{\text{гр}} = 2{,}4$.

Для одноконтурной системы, состоящей из трех апериодических звеньев, $k_{\text{гр}}$ тем больше, чем больше разница между наибольшей T_1 и наименьшей T_2 постоянными времени. Третье звено в этом случае должно иметь постоянную времени

$$T_3 = \frac{T_1 + T_2}{2},$$

а постоянные времени остальных звеньев должны быть близкими.

Пусть постоянные времени звеньев рассматриваемой цепи образуют геометрическую прогрессию

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{T_2}{T_3} = \frac{T_3}{T_4} = \cdots = q. \qquad (6.40)$$

Тогда граничное значение передаточного коэффициента [24] зависит от q и числа звеньев n следующим образом: если $q = 5$, то $k_{\text{гр}}$ равно соответственно 37; 30; 29 и 28 при $n = 3$; 4; 5 и 6; если $q = 10$, то $k_{\text{гр}} = 122$ при $n = 3$ и $k_{\text{гр}} = 110$ при $n = 4$; 5 и 6.

Передаточный коэффициент k всегда положительная величина. Поэтому если условия устойчивости удовлетворяются при $k < 0$, то они удовлетворяются и при всех возможных значениях k.

В подобных случаях принимают (условно), что $k_{гр} = \infty$. Если k не входит в условия устойчивости, то и в этом случае принимают $k_{гр} = \infty$. Возможность создания систем с весьма большим значением $k_{гр}$ будет рассмотрена в п. 8.1.

Пример 6.12. Определить граничное значение $k_{гр}$ передаточного коэффициента разомкнутой системы с передаточной функцией

$$W = \frac{k(\tau s + 1)}{s^2 (Ts + 1)}.$$

Составим характеристическое уравнение замкнутой системы

$$Ts^3 + s^2 + \tau ks + k = 0$$

и условие ее устойчивости

$$\tau k > Tk \text{ или } \tau > T.$$

Коэффициент k не входит в условие устойчивости. Замкнутая система устойчива при всех возможных значениях k и $k_{гр} = \infty$.

Встречаются еще и условно устойчивые системы, у которых не одно, а два граничных значения $k_{гр\,1}$ и $k_{гр\,2}$ передаточного коэффициента разомкнутой цепи. Ими являются наибольшее и наименьшее значения k, при которых система оказывается на границе устойчивости.

Пример 6.13. Выяснить, при каких значениях k будет устойчива система, если передаточная функция ее разомкнутой цепи

$$W = \frac{k(\tau s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s - 1)},$$

где $T_1 = 0{,}2$; $T_2 = 0{,}25$; $T_3 = 0{,}5$ с; $\tau = 0{,}1$ с.

Составим характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$T_1 T_2 T_3 s^3 + (T_1 T_3 + T_2 T_3 - T_1 T_2) s^2 + (T_3 - T_1 - T_2 + k\tau) s + (k - 1) = 0;$$

$$0{,}025 s^3 + 0{,}175 s^2 + (0{,}1k + 0{,}05) s + (k - 1) = 0.$$

Условия устойчивости системы:

$$k > 1;\ 0{,}175\,(0{,}1k + 0{,}05) > 0{,}025\,(k - 1).$$

Из этих двух неравенств определим требования к значению k: $k > 1$; $k < 4{,}5$.

Заключаем, что замкнутая система устойчива, если значения передаточного коэффициента разомкнутой цепи лежат в пределах от 1 до 4,5, т. е. $k_{гр\,1} = 1$, $k_{гр\,2} = 4{,}5$.

Граничное значение передаточного коэффициента удобно определять по логарифмическим частотным характеристикам разомкнутой системы. Если $k = k_{гр}$, то запас устойчивости по модулю равен нулю ($h = 0$) и частота среза ω_c совпадает с частотой ω_ψ, при которой ордината фазочастотной характеристики равна $-180°$. Поэтому для определения $k_{гр}$ нужно построить логарифмические частотные характеристики при заданном или произвольно выбранном значении k (например, при $k = 1$). Затем по ЛАЧХ определить ординату $L(1)$ низкочастотной асимптоты (или ее про-

должения) при частоте $\omega = 1$ и ординату $L(\omega_\psi)$ при частоте $\omega = \omega_\psi$. Ордината $L(\omega_\psi)$ может быть как положительной, так и отрицательной. Равенство

$$20\lg k_{гр} = L(1) + L(\omega_\psi) \tag{6.41}$$

позволяет вычислить $k_{гр}$.

В примере 6.7 (см. рис. 6.13) $L(1) = 26$ дБ и $L(\omega_\psi) = h = 7$ дБ. Следовательно, $20 \lg k_{гр} = 26 + 7 = 33$ дБ и $k_{гр} = 44{,}7$.

Д-разбиение плоскости одного параметра. Пусть требуется выяснить, в каких пределах можно изменять параметр μ, не нарушая при этом устойчивости. Предположим, что μ входит в характеристическое уравнение замкнутой системы линейно и это уравнение может быть приведено к виду

$$\mu N_1 + N_2 = 0, \tag{6.42}$$

где $N_1 = N_1(s)$ и $N_2 = N_2(s)$.

Разрешим уравнение (6.42) относительно μ:

$$\mu = -\frac{N_2}{N_1}. \tag{6.43}$$

Это уравнение определяет зависимость параметра μ от фиксированного значения корня характеристического уравнения. Прежде всего интересно выяснить, при каких значениях μ система находится на границе устойчивости, т. е. какие значения μ соответствуют чисто мнимому корню. Сделаем подстановку $s = j\omega$ и построим на комплексной плоскости график функции

$$\mu(j\omega) = -\frac{N_2(j\omega)}{N_1(j\omega)} = X(\omega) + jY(\omega) \tag{6.44}$$

при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$.

Функция $X(\omega)$ есть четная функция ω, а $Y(\omega)$ — нечетная. Поэтому искомая кривая симметрична относительно вещественной оси и достаточно построить одну ветвь кривой, изменяя ω от 0 до ∞, а затем построить ее зеркальное отображение относительно вещественной оси.

Полученную таким образом кривую называют кривой *Д*-разбиения, она представляет собой отображение мнимой оси плоскости корней характеристического уравнения на плоскость параметра μ. Если, двигаясь по кривой от $\omega = -\infty$ к $\omega = +\infty$, наносить штриховку слева, то эта штриховка будет направлена в ту часть плоскости параметра μ, которая соответствует левой полуплоскости корней.

Кривая *Д*-разбиения разделяет плоскость параметра μ на несколько областей. Та из них, внутрь которой направлена штриховка кривой, может быть областью устойчивости. Теперь нужно взять какую-либо точку μ_i на оси абсцисс из этой области и, пользуясь любым критерием устойчивости, проверить устойчивость системы при $\mu = \mu_i$. Если критерий удовлетворяется, то рассмат-

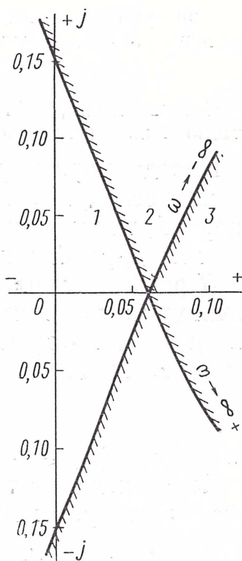


Рис. 6.23. *Д*-разбиение плоскости параметра τ (пример 6.14)

риваемая область есть область устойчивости. Следовательно, система остается устойчивой лишь при значениях параметра μ, определяемых отрезком положительной полуоси абсцисс, лежащим внутри области устойчивости.

Пример 6.14. Передаточная функция разомкнутой системы

$$W = \frac{k(\tau s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)},$$

где $k = 50$; $T_1 = 0{,}4$ с; $T_2 = 0{,}1$ с.

Выяснить влияние постоянной времени τ дифференцирующего звена на устойчивость замкнутой системы.

Составим характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2) s^2 + (1 + k\tau) s + k = 0;$$

$$0{,}04 s^3 + 0{,}5 s^2 + (1 + 50\tau) s + 50 = 0.$$

Разрешаем это уравнение относительно τ:

$$\tau = -\frac{1}{50s}[0{,}04 s^3 + 0{,}5 s^2 + s + 50].$$

Выполним подстановку $s = j\omega$:

$$\tau(j\omega) = -\frac{1}{j50\omega}[-j0{,}04\omega^3 - 0{,}5\omega^2 + j\omega + 50] = X + jY,$$

где $X = 0{,}02(-1 + 0{,}04\omega^2)$; $Y = \frac{1}{\omega}(1 - 0{,}01\omega^2)$.

Для построения кривой *Д*-разбиения определим значения X и Y при значениях $\omega = 0$ и $\omega = \infty$:

$$\omega = 0;\ X = -0{,}02;\ Y = +\infty,\ \omega = +\infty,\ X = +\infty,\ Y = -\infty.$$

Определим, при каком значении ω и Y кривая пересекает ось ординат:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{0{,}04}} = 5;\ Y = 0{,}15.$$

Найдем значения ω и X при пересечении кривой оси абсцисс:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{0{,}01}} = 10;\quad X = 0{,}06.$$

Полученные данные характеризуют кривую *Д*-разбиения на участке от $\omega = 0$ до $\omega = \infty$ (рис. 6.23). Зеркальное отображение этого участка кривой относительно оси абсцисс дает ее второй участок (от $\omega = -\infty$ до $\omega = 0$). Двигаясь по кривой от $\omega = -\infty$ к $\omega = +\infty$, штрихуем ее слева. Заметим, что конкретный вид кривой не имеет значения, нужно знать лишь точки пересечения.

Плоскость разделена на три области, из которых на устойчивость претендует область *3*. Проверим устойчивость системы при $\tau = 0{,}1$, так как данная точка лежит в области *3*. Характеристическое уравнение при этом значении τ

$$0{,}04 s^3 + 0{,}5 s^2 + 6s + 50 = 0.$$

Критерий устойчивости Гурвица удовлетворяется, так как все коэффициенты уравнения положительные и

$$0{,}5\cdot 6 = 3 > 0{,}04\cdot 50 = 2.$$

Следовательно, область *3* есть область устойчивости. Рассматриваемая система в замкнутом состоянии устойчива при $\tau > 0{,}6$.

Иногда параметр μ, влияние которого на устойчивость системы исследуют, входит в характеристическое уравнение как в первой, так и во второй степени. Тогда можно обозначить $\mu^2 = \eta$ и делать *Д*-разбиение плоскости параметров μ и η.

***Д*-разбиение плоскости двух параметров.** Предположим, что необходимо выяснить влияние на устойчивость системы параметров μ и η, которые входят в ее характеристическое уравнение линейно. Тогда это уравнение может быть приведено к виду

$$\mu N + \eta S + F = 0, \tag{6.45}$$

где $N = N(s)$, $S = S(s)$ и $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(s)$.

После подстановки $s = j\omega$ полиномы N, S и F разделяют на действительную и мнимую части:

$$N = N_1 + jN_2,\ S = S_1 + jS_2 \text{ и } F = F_1 + jF_2,$$

где

$$N_1 = N_1(\omega),\ N_2 = N_2(\omega),\ S_1 = S_1(\omega),\ S_2 = S_2(\omega),$$
$$F_1 = F_1(\omega),\ F_2 = F_2(\omega),$$

и уравнение (5.45) распадается на два:

$$\begin{gathered}\mu N_1 + \eta S_1 + F_1 = 0;\\ \mu N_2 + \eta S_2 + F_2 = 0.\end{gathered} \tag{6.46}$$

Решим уравнения (6.46) относительно μ и η:

$$\mu = \frac{\begin{vmatrix} -F_1, & S_1 \\ -F_2, & S_2 \end{vmatrix}}{\Delta};\quad \eta = \frac{\begin{vmatrix} N_1 & -F_1 \\ N_2 & -F_2 \end{vmatrix}}{\Delta}, \tag{6.47}$$

где Δ — определитель системы;

$$\Delta = \begin{vmatrix} N_1 S_1 \\ N_2 S_2 \end{vmatrix}.$$

Уравнения (6.47) определяют μ и η как функции ω. Следовательно, при каждом значении $\omega = \omega_i$ можно вычислить значения μ_i и η_i и нанести соответствующую точку на плоскости параметров μ, η. Геометрическое место этих точек при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ является кривой *Д*-разбиения плоскости μ, η.

В рассматриваемых формулах предполагается, что параметр μ откладывают по оси абсцисс, а параметр η по оси ординат.

Уравнения (6.46) совместны и равенства (6.47) определяют точки кривой *Д*-разбиения только при тех значениях ω, при кото-

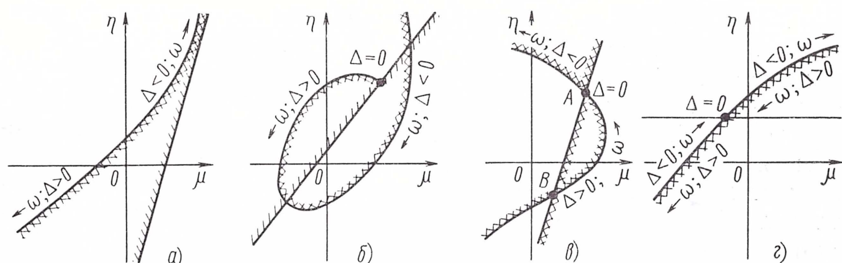


Рис. 6.24. Правила штриховки особых прямых

рых определитель системы Δ не равен нулю. При движении по кривой *Д*-разбиения в сторону возрастания ω штриховку наносят слева, если определитель системы Δ положителен, и справа, если Δ отрицателен.

Точка по кривой *Д*-разбиения пробегает дважды: первый раз при изменении ω от $-\infty$ до 0 и второй раз при изменении ω от 0 до ∞. Однако при $\omega = 0$ меняется знак определителя системы Δ, и поэтому кривую оба раза штрихуют с одной и той же стороны.

При некотором значении ω определитель Δ может обратиться в нуль. Если при этом определители в числителях равенств (6.47) не равны одновременно нулю, то уравнения (6.46) несовместны, точка (μ, η) уходит в бесконечность.

При некотором значении ω в нуль могут обратиться кроме определителя системы Δ и определители в числителях равенств (6.47). Тогда уравнения (6.46) оказываются линейно зависимыми и отличаются одно от другого на постоянный множитель m:

$$N_2 = mN_1; \; S_2 = mS_1 \text{ и } \boldsymbol{F}_2 = m\boldsymbol{F}_1.$$

Получается уравнение прямой линии

$$\mu N_1 + \eta S_1 + F_1 = 0, \tag{6.48}$$

которую принято называть особой прямой. Всем ее точкам соответствует одно и то же значение ω. Появление особых прямых отличает метод *Д*-разбиений плоскости двух параметров от *Д*-разбиения плоскости одного (комплексного) параметра.

Особые прямые получаются также из уравнения $a_n = 0$ при $\omega = 0$ и из уравнения $a_0 = 0$ при $\omega = \infty$, если в эти коэффициенты линейно входит хотя бы один из параметров μ и η.

Правила штриховки особых прямых следующие:

а) если особая прямая и кривая *Д*-разбиения сближаются асимптотически — штриховка особой прямой однократная, направлена к заштрихованной стороне кривой *Д*-разбиения (рис. 6.24, *а*);

б) если особая прямая имеет общую точку с кривой *Д*-разбиения, но не пересекает ее — штриховка особой прямой однократная и около общей точки направлена к заштрихованной стороне кривой *Д*-разбиения; в точках пересечения с кривой *Д*-разбиения

штриховку особой прямой не изменяют, так как знак определителя системы в этих точках не меняется (рис. 6.24, *б*);

в) если особая прямая пересекает кривую *Д*-разбиения в двух точках — штриховка особой прямой двойная и направлена к заштрихованной стороне кривой *Д*-разбиения около той точки пересечения (точка *A* на рис. 6.24, *в*), в которой определитель Δ меняет знак; во второй точке пересечения (точка *B* на рис. 6.24, *в*) определитель Δ не меняет знака и штриховку особой прямой не изменяют.

г) если особая прямая пересекает кривую *Д*-разбиения (рис. 6.24, *г*), но знак определителя Δ в точке пересечения не меняется — особую прямую не штрихуют.

После того, как кривая *Д*-разбиения и особые прямые построены и на них нанесена штриховка, отыскивают область, внутрь которой направлена штриховка ее границ. Это область потенциальной устойчивости. После подстановки в характеристическое уравнение значений μ и η, соответствующих какой-либо точке этой области, используют один из критериев устойчивости. Если он удовлетворяется, то рассматриваемая область есть область устойчивости, т. е. при всех сочетаниях параметров, соответствующих точкам этой области, исследуемая система устойчива.

Возможны случаи, когда область устойчивости отсутствует.

Пример 6.15. Выяснить зависимость устойчивости системы от постоянных времени T_2 и τ. Передаточная функция разомкнутой системы

$$W = \frac{k(\tau s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)},$$

где $k = 50$; $T_1 = 0{,}4$.

Составим характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2) s^2 + (1 + k\tau) s + k = 0;$$
$$0{,}4 T_2 s^3 + (0{,}4 + T_2) s^2 + (1 + 50\tau) s + 50 = 0.$$

Приведем характеристическое уравнение к виду (6.45):

$$T_2 (0{,}4 s^3 + s^2) + \tau 50 s + (0{,}4 s^2 + s + 50) = 0.$$

Выполним подстановку $\lambda = j\omega$ и разделим уравнение на два:

$$T_2 N_1 + \tau S_1 + F_1 = 0;$$
$$T_2 N_2 + \tau S_2 + F_2 = 0,$$

где

$$N_1 = -\omega^2;\ N_2 = -0{,}4\omega^3;\ S_1 = 0;\ S_2 = 50\omega;$$
$$F_1 = 50 - 0{,}4\omega^2;\ F_2 = \omega.$$

Вычислим значение определителя Δ системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\omega^2 & 0 \\ -0{,}4\omega^3 & 50\omega \end{vmatrix} = -50\omega^3.$$

Таблица 6.7

Результаты расчета к примеру 6.15

ω	0	5	6	7	8	9	10	$\sqrt{\frac{19}{0,16}}$	$\sqrt{\frac{50}{0,4}}$	15	$\pm\infty$
T_2	∞	1,60	0,99	0,62	0,38	0,22	0,1	0,02	0	—0,18	—0,4
τ	0,38	0,30	0,27	0,22	0,18	0,12	0,06	0	—0,02	—0,34	$-\infty$

Составим выражения для определения T_2 и τ по формулам (6.47):

$$T_2 = \frac{\begin{vmatrix} -(50+0,4\omega^2) & 0 \\ -\omega & 50\omega \end{vmatrix}}{-50\omega^3} = \frac{-(50-0,4\omega^2)\,50\omega}{-50\omega^3} = \frac{50}{\omega^2} - 0,4;$$

$$\tau = \frac{\begin{vmatrix} -\omega^2 & -(50-0,4\omega^2) \\ -0,4\omega^2 & -\omega \end{vmatrix}}{-50\omega^3} = \frac{\omega^3 - 0,4\omega^3\,(50-0,4\omega^2)}{-50\omega^3} = 0,02\,(19-0,16\omega^2).$$

По результатам вычисления значений T_2 и τ (табл. 6.7) строим кривую *Д*-разбиения (рис. 6.25).

При движении по кривой от $\omega = 0$ до $\omega = +\infty$ штриховку наносим справа, так как при $\omega > 0$ $\Delta < 0$.

Определитель системы $\Delta = -50\omega^3$ ни при каких значениях ω не обращается в нуль, кроме $\omega = 0$. Коэффициент $a_n = 50$ характеристического уравнения не зависит от параметров T_2 и τ. Но коэффициент $a_0 = 0,4T_2$ зависит от параметра T_2. Приравнивая этот коэффициент нулю, получим уравнение единственной особой прямой $T_2 = 0$, т. е. особой прямой является ось ординат. Она асимптотически приближается к кривой *Д*-разбиения при $\omega = \infty$, ее штрихуют в соответствии с правилом а (см. рис. 6.24, *а*).

Итак, плоскость параметров T_2, τ делится на четыре области. Штриховка кривой *Д*-разбиения направлена внутрь области *1*, которая и является, следовательно, областью потенциальной устойчивости. Проверим ее устойчивость по точке *M*. Подставим $T_2 = \tau = 0,2$ в характеристическое уравнение:

$$0,08s^3 + 0,6s^2 + 11s + 50 = 0.$$

Проверим устойчивость по критерию Гурвица:

$$0,6 \cdot 11 = 6,6 > 0,08 \cdot 50 = 4.$$

Следовательно, область *1* является областью устойчивости.

Параметры T_2 и τ — это положительные величины, поэтому действительной областью устойчивости является только часть области *1*, лежащая в первом квадранте.

Методом *Д*-разбиения плоскости двух параметров иногда можно выяснить влияние на устойчивость одного параметра, который входит в характеристическое уравнение нелинейным образом. Это возможно, если характеристический полином удается представить в виде $\mu N + \eta S + F$, где μ и η — некоторые функции интересующего нас параметра ν, например $\mu = \nu^2$ и $\eta = \nu$.

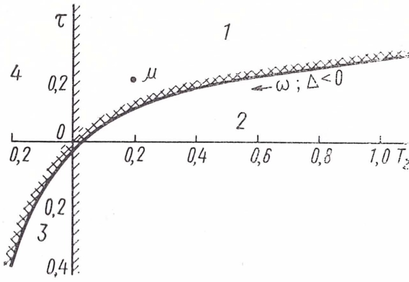


Рис. 6.25. *Д*-разбиение плоскости параметров T_2 и τ (пример 6.15)

В ряде случаев (наиболее интересных случаев) уравнения относительно параметров μ и η оказываются нелинейными и имеют следующий вид:

$$\varphi_1(\omega, \mu, \eta) = 0;$$
$$\varphi_2(\omega, \mu, \eta) = 0. \quad (6.49)$$

Тогда кривую *Д*-разбиения строят в результате решения этих уравнений (например, методом подстановки). Штриховка кривой определяется знаком якобиана, который составляют из частных производных от функции φ_1 и φ_2 по переменным μ и η:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial\mu} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial\mu} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial\eta} \end{vmatrix}. \quad (6.50)$$

При движении по кривой в сторону увеличения ω ее штрихуют слева при $\Delta > 0$ и справа при $\Delta < 0$.

Иногда в характеристическое уравнение линейно входят две нелинейные функции тех параметров, влияние которых на устойчивость нужно выяснить.

Тогда *Д*-разбиение относительно этих двух нелинейных функций является линейной задачей.

Пример 6.16. Выяснить влияние на устойчивость системы передаточного коэффициента k ее разомкнутой цепи и постоянной времени τ форсирующего звена. Передаточная функция разомкнутой системы

$$W = \frac{k(\tau s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)},$$

где $T_1 = 0{,}4$ и $T_2 = 0{,}1$ с.

Составим характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + (1 + k\tau)s + k = 0.$$
$$0{,}04s^3 + 0{,}5s^2 + (1 + k\tau)s + k = 0.$$

Таблица 6.8

Результаты расчета к примеру 6.16

ω	0	$\sqrt{\frac{1}{0{,}04}}$	6	7	8	9	10	11	12	14	$\pm\infty$
μ	0	12,5	18	24,5	32	40,5	50	60,5	72	98	$+\infty$
η	—1	0	0,4	0,96	1,6	2,24	3,0	3,84	4,76	6,84	$+\infty$

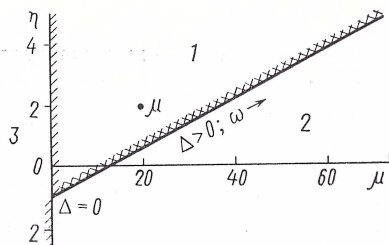


Рис. 6.26. *Д*-разбиение плоскости двух параметров к примеру 6.16.

Обозначим $k = \mu$ и $k\tau = \eta$, так как k и $k\tau$ входят в характеристическое уравнение линейно.

После подстановки $s = j\omega$ определим

$N_1 = 1$; $N_2 = 0$; $S_1 = 0$; $S_2 = \omega$;

$F_1 = -0{,}5\omega^2$; $F_2 = \omega(1 - 0{,}04\omega^2)$;

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{vmatrix} = \omega;$$

$$\mu = \frac{\begin{vmatrix} 0{,}5\omega^2 & 0 \\ -\omega(1-0{,}04\omega^2) & \omega \end{vmatrix}}{\omega} = 0{,}5\omega^2;$$

$$\eta = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0{,}5\omega^2 \\ 0 & -\omega(1-0{,}04\omega^2) \end{vmatrix}}{\omega} = -1 + 0{,}04\omega^2.$$

Результаты вычисления значений μ и η сведены в табл. 6.8, а кривая *Д*-разбиения построена на рис. 6.26.

Параметр $\mu = k$ является свободным членом характеристического уравнения, поэтому уравнение особой прямой при $\omega = 0$ имеет вид $\mu = 0$, т. е. особой прямой является ось ординат. Она имеет общую точку с кривой *Д*-разбиения, ее штрихуют по правилу б (см. рис. 6.24, *б*).

Плоскость параметров μ, η разделена на три области. На устойчивость претендует область *1* и устойчивость мы проверим по точке μ. Подставляя в характеристическое уравнение $\mu = k = 20$ и $\eta = k\tau = 2$, получим

$$0{,}04s^3 + 0{,}5s^2 + 3s + 20 = 0.$$

Условие устойчивости по критерию Гурвица

$$0{,}5 \cdot 3 = 1{,}5 > 0{,}04 \cdot 20 = 0{,}8$$

удовлетворяется.

Следовательно, область *1* есть область устойчивости. Параметр $\eta = k\tau$ не может быть отрицательным и действительной областью устойчивости является та часть области *1*, которая лежит в первом квандранте.

6.11. СТРУКТУРНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Систему называют структурно неустойчивой, если ее нельзя сделать устойчивой только изменением величины (но не знака) ее параметров. Устойчивость может быть достигнута лишь изменением структуры, т. е. введением в систему новых звеньев и связей или же изменением типа имеющихся звеньев и связей.

Условия структурной неустойчивости одноконтурной системы известны [3]. Предположим, что числитель $R(s)$ передаточной функции разомкнутой цепи состоит из множителей вида k, $\tau s + 1$ и $\tau_i^2 s^2 + 2\zeta_i \tau_i s + 1$, а знаменатель $Q(s)$ из множителей вида s, $Ts \pm 1$, $T_i^2 s^2 + 1$ и $T_j^2 s^2 + 2\zeta_j T_j s + 1$. Здесь k, τ, τ_i, ζ_i, T, T_i, T_j и ξ_j есть независимые одна от другой положительные величины (параметры системы).

Таблица 6.9

Неравенства для проверки структурной устойчивости

f	$m = 0$	$m > 0$ четно	m нечетно
четно	$n + m > 4r$	$n + m > 4r - 1$	$n + m > 4r - 2$
нечетно	$n + m > 4r$	$n + m > 4r$	$n + m > 4r + 1$

Система структурно неустойчива, если нарушается неравенство

$$m \geqslant \nu + l - 1 \quad (6.51)$$

и неравенство из табл. 6.9, соответствующее данным конкретным значениям m и f.

В этих неравенствах m и n — степени соответственно полиномов $R(s)$ и $Q(s)$; ν — число нулевых корней полинома $Q(s)$; l — число положительных вещественных корней полинома $Q(s)$; f — число комплексных корней с положительной вещественной частью полинома $Q(s)$; r — целая часть дроби $\frac{f}{2}$.

Рассмотрим частные случаи:

1. Если числитель передаточной функции разомкнутой системы $R = k$, то система структурно наустойчива при нарушении одного из неравенств:

$$\nu + l \leqslant 1 \text{ или } n > 4r. \quad (6.52)$$

2. Если $R = k(\tau s + 1)$, то система структурно неустойчива в случае нарушения одного из следующих неравенств:

$$\left.\begin{array}{l} \nu + l \leqslant 2 \text{ или } n > 4r - 3 \text{ при четном } f \\ \text{и} \\ \nu + l \leqslant 2 \text{ или } n > 4r \text{ при нечетном } f. \end{array}\right\} \quad (6.53)$$

3. Если $R = k(b_0 s^2 + b_1 s + 1)$, то система структурно неустойчива, когда нарушается одно из следующих неравенств:

$$\left.\begin{array}{l} \nu + l \leqslant 3 \text{ или } n > 4r - 2 \text{ при четном } f \\ \text{и} \\ \nu + l \leqslant 3 \text{ или } n > 4r - 1 \text{ при нечетном } f. \end{array}\right\} \quad (6.54)$$

Глава 7

ОЦЕНКА КАЧЕСТВА РЕГУЛИРОВАНИЯ

Всякая реальная система автоматического регулирования действует в разнообразных режимах, которые отличаются значениями задающего воздействия и возмущений или характером их изменения. Чем меньшие значения имеет при этом рассогласование, тем выше качество регулирования. Однако создать единую объективную числовую оценку качества регулирования оказалось невозможным, поэтому существуют лишь частичные оценки отдельных наиболее характерных режимов.

В практике инженерных расчетов используют оценки точности в установившихся режимах и оценки качества переходных процессов. Последние оценки разделяют на прямые и косвенные. Так, ранее рассмотренные показатели запаса устойчивости по фазе и по модулю (см. п. 6.8) лишь косвенно характеризуют характер переходных процессов и являются, таким образом, косвенными оценками качества.

Ниже рассмотрены основные из многих предложенных оценок.

Следует иметь в виду, что оценки качества используются как при анализе спроектированных САР, так и при их синтезе. В первом случае можно воспользоваться несколькими оценками с тем, чтобы полнее выяснить свойства системы. Во втором же случае решение задачи возможно лишь при использовании ограниченного числа оценок. Иногда рассматривают лишь одну оценку.

Применение тех или иных оценок при анализе и синтезе определяется не только объективными факторами (прежде всего назначением САР), но также и личным опытом проектировщика.

7.1. СТАТИЧЕСКАЯ ТОЧНОСТЬ

Один из основных режимов САР (прежде всего систем стабилизации) — это установившийся режим при постоянных значениях задающего воздействия и возмущения: $g = g_0$ и $f = f_0$, где g_0 и f_0 — постоянные.

В этом режиме установившееся значение $x_у$ ошибки (рассогласования) имеет две составляющие:

$$x_у = x_{у1} + x_{у2}. \quad (7.1)$$

Здесь $x_{у1}$ — ошибка воспроизведения задающего воздействия, а $x_{у2}$ — ошибка, создаваемая возмущением. При этом не принимают в расчет ошибки, обусловленные нечувствительностью регулятора (прежде всего зоной нечувствительности датчика и элемента сравнения) и другие ошибки, связанные с неидеальной линейностью системы. Устранение этой дополнительной погрешности связано с повышением класса точности элементов регулятора, что ведет к повышению его стоимости и ограничено техническими возможностями.

При нескольких возмущениях составляющая $x_{у2}$ имеет несколько слагаемых.

В системе, структурная схема которой показана на рис. 3.1, передаточные функции для ошибки слежения и для ошибки от возмущения соответственно равны

$$W_x = \frac{1}{1+W} \text{ и } W_{xf} = \frac{W_1 W_о}{1+W}, \quad (7.2)$$

где $W = W_о W_1 W_2$.

Возможны следующие характерные случаи:

1. Передаточные функции участков системы

$$W_1 = \frac{k_1 R_1}{Q_1}; \quad W_2 = \frac{k_2 R_2}{Q_2}; \quad W_о = k_о, \quad (7.3)$$

где $k_о$, k_1, k_2, k_3 — передаточные коэффициенты; R_1, R_2, Q_1, Q_2 — полиномы от s со свободным членом, равным единице.

Тогда на основании теоремы о конечном значении (см. табл. П.1.2):

$$x_{у1} = \frac{g_0}{1+k} = Sg_0 \text{ и } x_{у2} = \frac{k_1 k_о f_0}{1+k} = Sk_1 k_о f_0, \quad (7.4)$$

где $k = k_о k_1 k_2$ — передаточный коэффициент разомкнутой системы; $S = \frac{1}{1+k}$ — коэффициент статизма.

У такой системы всегда есть установившиеся ошибки от задающего воздействия и возмущения, и ее называют статической. Чем больше передаточный коэффициент k разомкнутой системы, тем меньше коэффициент статизма и установившаяся ошибка.

2. На участке *1* (см. рис. 3.1.) есть интегрирующее звено, т. е.

$$W_1 = \frac{k_1 R_1}{s Q_1},$$

а W_2 и $W_о$ определяются формулами (7.3). По той же теореме $x_{у1} = 0$ и система является астатической относительно задающего воздействия.

3. Интегрирующее звено на участке с передаточной функцией

$$W_2 = \frac{k_2 R_2}{sQ_2},$$

а W_1 и W_0 определяются формулами (7.3.)

Тогда $x_{y1} = x_{y2} = 0$ и система является астатической как относительно задающего воздействия, так и относительно возмущения.

Таким образом, астатизм может быть достигнут соответствующим включением интегрирующего звена в прямую цепь системы регулирования по отклонению. При включении двух интегрирующих звеньев достигается астатизм второго порядка и устраняется установившаяся ошибка от внешнего воздействия, изменяющегося с постоянной скоростью. Астатизм достигается также включением изодромных звеньев.

7.2. КОЭФФИЦИЕНТЫ ОШИБОК

Установившееся значение ошибки x_{y1} воспроизведения задающего воздействия $g = g(t)$, являющегося произвольной, но достаточно плавной функцией времени, можно определить с помощью коэффициентов ошибок C_0, C_1, C_2, . . по формуле

$$x_{y1} = C_0 g + C_1 \frac{dg}{dt} + \frac{C_2}{2!}\frac{d^2 g}{dt^2} + \frac{C_3}{3!}\frac{d^3 g}{dt^3} + \cdots \qquad (7.5)$$

Коэффициенты ошибок можно вычислить по передаточной функции $W_x = W_x(s)$ для ошибки слежения и ее производным по s при $s = 0$:

$$C_0 = [W_x]_{s=0}; \quad C_1 = \left[\frac{dW_x}{ds}\right]_{s=0}; \quad C_2 = \left[\frac{d^2 W_x}{ds^2}\right]_{s=0}; \cdots . \qquad (7.6)$$

В статической системе

$$C_0 = \frac{1}{1+k};$$

в астатической

$$C_0 = 0, \quad C_1 = \frac{1}{k}$$

и передаточный коэффициент k разомкнутой системы называют добротностью по скорости. Постоянное воздействие g в этом случае не создает установившейся ошибки.

При двух интегрирующих звеньях в прямой цепи системы

$$C_0 = C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{1}{k}.$$

Эта система является астатической второго порядка, коэффициент k называют добротностью по ускорению. В такой системе постоянное воздействие, а также воздействие, пропорциональное

Формулы для определения коэффициентов ошибки слеже

№ по пор.	Передаточная функция разомкнутой системы	Коэффициен	
		C_0	C_1
1	$W = \frac{k(\beta_0 s^3 + \beta_1 s^2 + \beta_2 s + 1)}{b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + 1}$	$\frac{1}{1+k}$	$\frac{b_2 - (b_2 + k\beta_2) C_0}{1+k}$
2	$W = \frac{k(\beta_0 s^3 + \beta_1 s^2 + \beta_2 s + 1)}{s(b_0 s^2 + b_1 s + 1)}$	0	$\frac{1}{k}$
3	$W = \frac{k(\beta_0 s^3 + \beta_1 s^2 + \beta_2 s + 1)}{s^2(b_0 s + 1)}$	0	0
4	$W = \frac{k(\beta_0 s^4 + \beta_1 s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_3 s + 1)}{b_0 s^4 + b_1 s^3 + b_2 s^2 + b_3 s + 1}$	$\frac{1}{1+k}$	$\frac{b_3 - (b_3 + k\beta_3) C_0}{1+k}$
5	$W = \frac{k(\beta_0 s^4 + \beta_1 s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_3 s + 1)}{s(b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + 1)}$	0	$\frac{1}{k}$
6	$W = \frac{k(\beta_0 s^4 + \beta_1 s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_3 s + 1)}{s^2(b_0 s^2 + b_1 s + 1)}$	0	0
7	$W = \frac{k(\beta_0 s^n + \beta_1 s^{n-1} + \cdots + \beta_{n-1} s + 1)}{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + 1}$	$\frac{1}{1+k}$	$\frac{b_{n-1} - (b_{n-1} + k\beta_{n-1}) C_0}{1+k}$
8	$W = \frac{k(\beta_0 s^n + \beta_1 s^{n-1} + \cdots + \beta_{n-1} s + 1)}{s(b_0 s^{n-1} + b_1 s^{n-2} + \cdots + b_{n-2} s + 1)}$	0	$\frac{1}{k}$
9	$W = \frac{k(\beta_0 s^n + \beta_1 s^{n-1} + \cdots + \beta_{n-1} s + 1)}{s^2(b_0 s^{n-2} + b_1 s^{n-3} + \cdots + b_{n-3} s + 1)}$	0	0

Таблица 7.1

ния по передаточной функции разомкнутой системы

ты ошибок	
C_2	C_3
$\frac{b_1-(b_1+k\beta_1)C_0-(b_2+k\beta_2)C_1}{1+k}$	$\frac{b_0-(b_0+k\beta_0)C_0-(b_1+k\beta_1)C_1-(b_2+k\beta_2)C_2}{1+k}$
$\frac{b_1-(1+k\beta_2)C_1}{k}$	$\frac{b_0-(b_1+k\beta_1)C_1-(1+k\beta_2)C_2}{k}$
$\frac{1}{k}$	$\frac{b_0-k\beta_2C_2}{k}$
$\frac{b_2-(b_2+k\beta_2)C_0-(b_3+k\beta_3)C_1}{1+k}$	$\frac{b_1-(b_1+k\beta_1)C_0-(b_2+k\beta_2)C_1-(b_3+k\beta_3)C_2}{1+k}$
$\frac{b_2-(1+k\beta_3)C_1}{k}$	$\frac{b_1-(b_2+k\beta_2)C_1-(1+k\beta_3)C_2}{k}$
$\frac{1}{k}$	$\frac{b_1-k\beta_3C_2}{k}$
$\frac{b_{n-2}-(b_{n-2}+k\beta_{n-2})C_0-(b_{n-1}+k\beta_{n-1})C_1}{1+k}$	$\frac{b_{n-3}-(b_{n-3}+k\beta_{n-3})C_0-(b_{n-2}+k\beta_{n-2})C_1-(b_{n-1}+k\beta_{n-1})C_2}{1+k}$
$\frac{b_{n-2}-(1+k\beta_{n-1})C_1}{k}$	$\frac{b_{n-3}-(b_{n-2}+k\beta_{n-2})C_1-(1+k\beta_{n-1})C_2}{k}$
$\frac{1}{k}$	$\frac{b_{n-3}-k\beta_{n-1}C_2}{k}$

времени, не создают установившейся ошибки. Вообще говоря, могут быть системы с астатизмом третьего и более высокого порядков.

Формулы для вычисления первых четырех коэффициентов ошибки воспроизведения задающего воздействия, т. е. коэффициентов ошибки слежения, приведены в табл. 7.1. Формулы содержат коэффициенты передаточной функции W разомкнутой системы и, следовательно, отпадает необходимость в составлении передаточной функции W_x.

Пример 7.1. Вычислить коэффициенты ошибок C_0, C_1, C_2 и C_3 слежения, если передаточная функция разомкнутой системы

$$W = \frac{20\,(0{,}05s + 1)}{s\,(0{,}00001s^4 + 0{,}001s^3 + 0{,}01s^2 + 0{,}5s + 1)}.$$

Система пятого порядка астатическая и для вычисления коэффициентов ошибок можно воспользоваться формулами № 8 табл. 7.1. В данном случае $b_0 = 0{,}00001$; $b_1 = 0{,}001$; $b_2 = 0{,}01$; $b_3 = 0{,}5$; $k = 20$; $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$; $\beta_4 = 0{,}05$.

Подставляя значения коэффициентов в формулы, получим:

$$C_0 = 0; \quad C_1 = \frac{1}{k} = \frac{1}{20} = 0{,}05;$$

$$C_2 = \frac{b_3 - (1 + k\beta_4)C_1}{k} = \frac{0{,}5 - (1 + 20\cdot 0{,}05)\,0{,}05}{20} = 0{,}02;$$

$$C_3 = \frac{b_2 - (b_3 + k\beta_3)\,C_1 - (1 + k\beta_4)\,C_2}{k} =$$

$$= \frac{0{,}01 - (0{,}5 + 20\cdot 0)\,0{,}05 - (1 + 20\cdot 0{,}05)\,0{,}02}{20} = -\,0{,}00275.$$

С помощью коэффициентов ошибки можно определить и установившееся значение $x_{у2}$ ошибки, создаваемой возмущением $f = f\,(t)$, если оно является достаточно плавной функцией времени:

$$x_{у2} = \tilde{C}_0 f + \tilde{C}_1 \frac{df}{dt} + \frac{\tilde{C}_2}{2!}\frac{d^2f}{dt^2} + \frac{\tilde{C}_3}{3!}\frac{d^3f}{dt^3} + \cdots. \tag{7.7}$$

Коэффициенты ошибки $\tilde{C}_0$, $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$, ... вычисляют по передаточной функции W_{xf} для ошибки от возмущения и ее производным при $s = 0$:

$$\tilde{C}_0 = [W_{xf}]_{s=0}; \quad \tilde{C}_1 = \left[\frac{dW_{xf}}{ds}\right]_{s=0}; \quad \tilde{C}_2 = \left[\frac{d^2W_{xf}}{ds^2}\right]_{s=0}; \ldots. \tag{7.8}$$

В табл. 7.2 приведены формулы, которые позволяют вычислять коэффициенты ошибки по коэффициентам передаточной функции замкнутой системы для ошибки. Эти формулы позволяют вычислять как коэффициенты ошибки C_0, C_1, C_2, ..., так и $\tilde{C}_0$, $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$, ...

Пример 7.2. В системе со структурной схемой, изображенной на рис. 3.1, передаточные функции ее участков имеют следующие значения:

$$W_1 = \frac{2}{s(0{,}25s+1)}; \quad W_2 = \frac{500\,(0{,}15s+1)}{0{,}1s+1}; \quad W_о = 0{,}05.$$

Вычислить установившееся значение ошибки, если задающее воздействие $g = g_0 t$ и возмущение $f = f_0 \sin 0{,}628t$.

По формуле (7.5) установившееся значение ошибки слежения

$$x_{у1} = C_0 g_0 t + C_1 g_0.$$

Составим передаточную функцию разомкнутой системы:

$$W = W_о W_1 W_2 = \frac{50\,(0{,}15s+1)}{s\,(0{,}025s^2+0{,}35s+1)}.$$

По формулам № 2 табл. 7.1 определим:

$$C_0 = 0; \quad C_1 = \frac{1}{k} = \frac{1}{50} = 0{,}02.$$

Следовательно, $x_{у1} = 0{,}02g_0$.

Установившееся значение ошибки от возмущения определяем по формуле (7.7):

$$x_{у2} \approx \tilde{C}_0 f_0 \sin 0{,}628t + \tilde{C}_1 f_0 0{,}628 \cos 0{,}628t +$$

$$+ \frac{\tilde{C}_2}{2} f_0 (-0{,}394 \sin 0{,}628t) + \frac{\tilde{C}_3}{6} f_0 (-0{,}247 \cos 0{,}628t) =$$

$$= f_0 [(\tilde{C}_0 - 0{,}197\tilde{C}_2) \sin 0{,}628t + (0{,}628\tilde{C}_1 - 0{,}041\tilde{C}_3) \cos 0{,}628t].$$

Составим передаточную функцию для ошибки от возмущения (учитывая знаки воздействия возмущения и обратной связи):

$$W_{xf} = -W_о W_f = -W_о \frac{-W_1}{1+W} = \frac{W_о W_1}{1+W} =$$

$$= \frac{0{,}05 \dfrac{2}{s\,(0{,}25s+1)}}{1 + \dfrac{50\,(0{,}15s+1)}{s\,(0{,}25s+1)\,(0{,}1s+1)}} = \frac{0{,}1\,(0{,}1s+1)}{s\,(0{,}25s+1)\,(0{,}1s+1) + 50\,(0{,}15s+1)} =$$

$$= \frac{0{,}002\,(0{,}1s+1)}{(0{,}0005s^3 + 0{,}007s^2 + 0{,}17s + 1)}.$$

Для вычисления коэффициентов ошибки $\tilde{C}_0$, $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$ и $\tilde{C}_3$ можно воспользоваться формулами № 1 табл. 7.2. В данном случае:

$$k_x = 0{,}002; \; b_0 = b_1 = 0; \; b_2 = 0{,}1; \; a_0 = 0{,}0005;$$

$$a_1 = 0{,}007 \text{ и } a_2 = 0{,}17.$$

Подставляя эти значения в формулы, получим

$$\tilde{C}_0 = 0{,}002; \quad \tilde{C}_1 = 0{,}002\,(0{,}1 - 0{,}17) = -0{,}00014;$$

$$\tilde{C}_2 = 0{,}002\,[0 - 0{,}1 \cdot 0{,}17 - (0{,}007 - 0{,}17^2)] = 0{,}0000098;$$

$$\tilde{C}_3 = 0{,}002\,[0 - 0 \cdot 0{,}17 - 0{,}1\,(0{,}007 - 0{,}17^2) -$$

$$- (0{,}0005 - 2 \cdot 0{,}007 \cdot 0{,}17 + 0{,}17^3)] = -0{,}00000169.$$

№ по пор.	Передаточная функция замкнутой системы для ошибки	Коэффи	
		C_0	C_1
1	$W_x = \dfrac{k_x(b_0s^3 + b_1s^2 + b_2s + 1)}{a_0s^3 + a_1s^2 + a_2s + 1}$	k_x	$k_x(b_2 - a_2)$
2	$W_x = \dfrac{k_xs(b_0s^2 + b_1s + 1)}{a_0s^3 + a_1s^2 + a_2s + 1}$	0	k_x
3	$W_x = \dfrac{k_xs^2(b_0s + 1)}{a_0s^3 + a_1s^2 + a_2s + 1}$	0	0
4	$W_x = \dfrac{k_x(b_0s^4 + b_1s^3 + b_2s^2 + b_3s + 1)}{a_0s^4 + a_1s^3 + a_2s^2 + a_3s + 1}$	k_x	$k_x(b_3 - a_3)$
5	$W_x = \dfrac{k_xs(b_0s^3 + b_1s^2 + b_2s + 1)}{a_0s^4 + a_1s^3 + a_2s^2 + a_3s + 1}$	0	k_x
6	$W_x = \dfrac{k_xs^2(b_0s^2 + b_1s + 1)}{a_0s^4 + a_1s^3 + a_2s^2 + a_3s + 1}$	0	0
7	$W_x = \dfrac{k_x(b_0s^n + b_1s^{n-1} + \dots + b_{n-1}s + 1)}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + 1}$	k_x	$k_x(b_{n-1} - a_{n-1})$
8	$W_x = \dfrac{k_xs(b_0s^{n-1} + b_1s^{n-2} + \dots + b_{n-2}s + 1)}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + 1}$	0	k_x
9	$W_x = \dfrac{k_xs^2(b_0s^{n-2} + b_1s^{n-3} + \dots + b_{n-3}s + 1)}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + 1}$	0	0

Таблица 7.2

редаточной функции замкнутой системы для ошибки

циенты ошибок	
C_2	C_3
$k_x\left[b_1-b_2a_2-\left(a_1-a_2^2\right)\right]$	$k_x\left[b_0-b_1a_2-b_2\left(a_1-a_2^2\right)-\right.$ $\left.-\left(a_0-2a_1a_2+a_2^3\right)\right]$
$k_x\left(b_1-a_2\right)$	$k_x\left[b_0-b_1a_2-\left(a_1-a_2^2\right)\right]$
k_x	$k_x(b_0-a_2)$
$k_x\left[b_2-b_3a_3-\left(a_2-a_3^2\right)\right]$	$k_x\left[b_1-b_2a_3-b_3\left(a_2-a_3^2\right)-\right.$ $\left.-\left(a_1-2a_2a_3+a_3^3\right)\right]$
$k_x\left(b_2-a_3\right)$	$k_x\left[b_1-b_2a_3-\left(a_2-a_3^2\right)\right]$
k_x	$k_x(b_1-a_3)$
$k_x\left[b_{n-2}-b_{n-1}a_{n-1}-\right.$ $\left.-\left(a_{n-2}-a_{n-1}^2\right)\right]$	$k_x\left[b_{n-3}-b_{n-2}a_{n-1}-b_{n-1}\left(a_{n-2}-a_{n-1}^2\right)-\right.$ $\left.-\left(a_{n-3}-2a_{n-2}a_{n-1}+a_{n-1}^3\right)\right]$
$k_x\left(b_{n-2}-a_{n-1}\right)$	$k_x\left[b_{n-3}-b_{n-2}a_{n-1}-\left(a_{n-2}-a_{n-1}^2\right)\right]$
k_x	$k_x(b_{n-3}-a_{n-1})$

Теперь можем определить значение

$$x_{у2} = f_0\ [(0{,}002 - 0{,}197 \cdot 0{,}0000098) \sin 0{,}628t +$$
$$+ (-0{,}628 \cdot 0{,}00014 + 0{,}041 \cdot 0{,}00000169) \cos 0{,}628t] =$$
$$= f_0\,(0{,}002 \sin 0{,}628t - 0{,}0000878 \cos 0{,}628t).$$

Суммарное установившееся значение ошибки

$$x_у = x_{у1} + x_{у2} = 0{,}02\,[g_0 + 0{,}1f_0\,(\sin 0{,}628t - 0{,}0439 \cos 0{,}628t)].$$

Передаточная функция для ошибки есть дробно-рациональная функция от s, поэтому значения коэффициентов ошибок можно вычислить делением ее числителя (начиная с младшего члена) на знаменатель. Такой прием следует использовать, когда необходимо вычислить более четырех коэффициентов ошибок. При этом удобно пользоваться техникой подвижной полосы [67]. Перед расчетом передаточную функцию для ошибки (слежения или от возмущения) приводят к виду

$$W_x = \frac{k_x^*\left(b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n\right)}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + 1}.$$

Затем на полосу бумаги (на неподвижную полосу) выписывают столбиком $-a_0, -a_1, \ldots, -a_{n-1}$, 1 и на листе бумаги (на неподвижную полосу) выписывают столбиком $b_n, b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots$ $\ldots b_0$, 0, 0 .... В астатической системе несколько старших коэффициентов b_i будут равны нулю.

Подвижную полосу кладут слева от неподвижной так, чтобы осталось место для записи результатов. Сначала нижняя цифра подвижной полосы должна находиться в одной строке с верхней цифрой неподвижной полосы. Затем подвижную полосу постепенно перемещают вниз.

В каждом положении подвижной полосы ее нижнюю цифру умножают на цифру неподвижной полосы в той же строке. Каждую из остальных цифр подвижной полосы умножают на находящуюся рядом цифру из столбца «результаты». Сумму всех произведений записывают в столбец «результаты», рядом с нижней цифрой подвижной полосы.

Цифры из столбца «результаты», начиная с верхней, после умножения на k_x^* являются коэффициентами ошибок C_0, C_1, C_2, ... Поэтому при расчете в столбце «результаты» нужно записать столько цифр, сколько коэффициентов ошибок требуется вычислить.

Пример 7.3. Вычислить коэффициенты ошибок слежения C_0, C_1, C_2, C_3 и C_4 для системы, у которой передаточная функция

$$W_x = \frac{0{,}1\,(0{,}1s^3 + 0{,}5s^2 + s)}{0{,}1s^3 + 0{,}2s^2 + s + 1}.$$

Таблица 7.3

Расчет к примеру 7.3

№ подсчета	Подвижная полоса	Результаты	Неподвижная полоса
1У	—0,1 —0,2 —1,0 1,0	0	0 1,0 0,5 0,1
2	—0,1 —0,2 —1,0 1,0	0 1,0	0 1,0 0,5 0,1
3	—0,1 —0,2 —1,0 1,0	0 1,0 —0,5	0 1,0 0,5 0,1
4	—0,1 —0,2 —1,0 1,0	0 1,0 —0,5 0,4	0 1,0 0,5 0,1
5	—0,1 —0,2 —1,0 1,0	1,0 —0,5 0,4 —0,4	1,0 0,5 0,1 0

Расположение полос при расчете показано в табл. 7.3. В результате расчета имеем:

№ подсчета	Результат
1	$1\cdot 0 = 0;$
2	$1\cdot 1 - 1\cdot 0 = 1;$
3	$1\cdot 0{,}5 - 0{,}2\cdot 0 - 1\cdot 1 = -0{,}5;$
4	$1\cdot 0{,}1 - 0{,}1\cdot 0 - 0{,}2\cdot 1 + 1\cdot 0{,}5 = 0{,}4;$
5	$1\cdot 0 - 0{,}1\cdot 1 + 0{,}2\cdot 0{,}5 - 1\cdot 0{,}4 = -0{,}4.$

Следовательно, коэффициенты ошибок имеют следующие значения:

$$C_0 = 0;\ C_1 = 1\cdot 0{,}1 = 0{,}1;\ C_2 = -0{,}5\cdot 0{,}1 = -0{,}05;$$

$$C_3 = 0{,}4\cdot 0{,}1 = 0{,}04;\ C_4 = -0{,}4\cdot 0{,}1 = -0{,}04.$$

Табл. 7.3 и запись подсчетов сделаны только для иллюстрации метода. При реальном расчете метод подвижной полосы значительно быстрее приводит к результатам.

7.3. ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА ПЕРЕХОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Среди возможных режимов САР важное значение имеет переходный процесс, возникающий при быстром (в пределе мгновенном) изменении задающего воздействия или возмущения от одного значения до другого. Чем с большей скоростью и плавностью протекает такой процесс, тем меньше продолжительность и величина рассогласования.

Поэтому одной из оценок качества регулирования (прямой оценкой) служит оценка качества переходной характеристики САР относительно задающего воздействия. При этом имеется в виду, что чем лучше переходная характеристика, тем лучше система будет отрабатывать произвольное задающее воздействие.

Переходные характеристики (рис. 7.1) бывают колебательными (кривая *1*) и монотонными (кривая *2*).

Особенность колебательной переходной характеристики в наличии переходов через установившееся значение (перерегулирований). Если только одно перерегулирование, то характеристика малоколебательная.

У монотонной характеристики не изменяется знак скорости: $\frac{dh}{dt} \geqslant 0$. Иногда к монотонным относят характеристики без перерегулирования (кривая *3* на рис. 7.1).

К основным показателям качества переходной характеристики относят перерегулирование σ и время регулирования $t_р$.

Перерегулированием оценивают разность между максимальным значением h_{max} переходной характеристики и ее установившимся значением $h_у$. Перерегулирование выражают в %:

$$\sigma = \frac{h_{max} - h_у}{h_у} 100. \qquad (7.9)$$

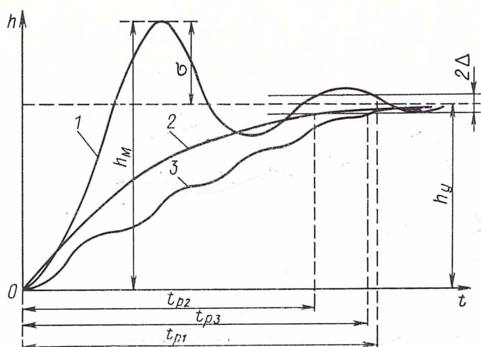


Рис. 7.1. Основные типы переходных характеристик

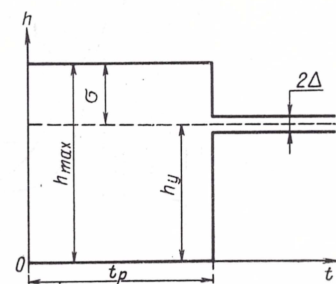


Рис. 7.2. Область допустимых отклонений переходной характеристики САР

В большинстве случаев требуется, чтобы перерегулирование не превышало 10—30%. Иногда требуется, чтобы перерегулирование отсутствовало и процесс был монотонным. В некоторых САР допускают перерегулирование до 50% и более.

Временем регулирования оценивают длительность переходного процесса. Однако в идеальной линейной системе переходный процесс бесконечен, поэтому временем регулирования $t_р$ считают тот промежуток времени, по истечении которого отклонения переходной характеристики h от установившегося значения $h_у$ не превышают допустимого значения Δ:

$$|h - h_у| \leqslant \Delta h_у. \tag{7.10}$$

На рис. 7.1 время регулирования указано для каждой из трех характеристик.

Значение Δ выбирают обычно равным 5%. Иногда устанавливают $\Delta = 2\%$ и даже $\Delta = 1\%$, но такой выбор следует оговаривать.

При заданных значениях σ и $t_р$ переходная характеристика не должна выходить из определенной области (рис. 7.2), называемой областью допустимых отклонений.

Существенным показателем качества служит также число колебаний, т. е. число максимумов характеристики за время регулирования. Обычно бывает одно- два колебания. Допускается до трех-четырех колебаний.

Всякая САР имеет своей целью кроме воспроизведения задающего воздействия подавление (уменьшение влияния) возмущений. Поэтому качество регулирования оценивают также по переходной характеристике $h_f = h_f(t)$ системы по возмущению. Основная особенность этой характеристики (рис. 7.3) в том, что ее установившееся значение должно быть весьма мало в статической системе (кривая *1*) и равно нулю в астатической системе (кривые *2* и *3*). Характеристику, пересекающую ось абсцисс, называют колебательной (кривые *1* и *2*) и, не имеющую этого пересечения, называют монотонной (кривая *3*).

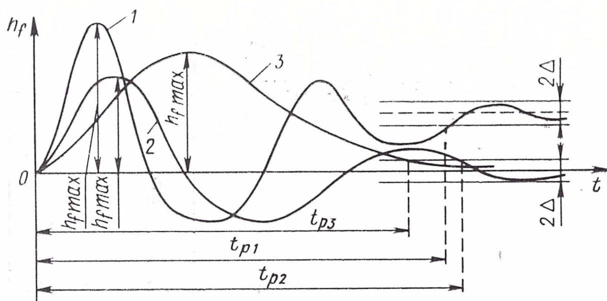


Рис. 7.3. Основные типы переходных характеристик по возмущению

Для определения времени регулирования характеристики h_f служит то же значение Δ, что и при определении времени регулирования характеристики h (в астатической системе значение Δ откладывают от оси абсцисс).

Понятие перерегулирования для характеристик h_f не имеет смысла, и их оценивают непосредственно максимальным значением $h_{f\,max}$.

На рис. 7.3 указаны значения времени регулирования $t_р$ и максимальные значения $h_{f\,max}$ для всех трех характеристик.

Качество регулирования САР оценивают и по переходным характеристикам h_x для ошибки слежения. Они отличаются от h_f тем, что их начальное значение не равно нулю, а установившееся мало́ или равно нулю.

7.4. ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ПЕРЕХОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПО ВЕЩЕСТВЕННОЙ ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ

Приближенно качество переходной характеристики можно оценить по вещественной частотной характеристике, это обусловлено тем, что между этими характеристиками есть взаимосвязь [см. (4.8)].

Наиболее употребительны те оценки, которые могут быть даны без дополнительных расчетов. Основными из них являются следующие.

1. Установившееся значение $h_у = h\,(\infty)$ переходной характеристики определяют по начальному значению вещественной частотной характеристики:

$$h_у = P\,(0). \qquad (7.11)$$

2. Начальное значение $h_0 = h\,(0)$ переходной характеристики определяют по конечному значению вещественной частотной характеристики:

$$h_0 = P\,(\infty). \qquad (7.12)$$

3. Если две вещественные частотные характеристики сходны по форме, но отличаются масштабом по оси абсцисс, то им соот-

ветствуют переходные характеристики, также сходные по форме и отличающиеся масштабом по оси абсцисс. При этом вещественной частотной характеристике $P(n\omega)$ соответствует переходная характеристика $h\left(\frac{t}{n}\right)$.

4. Разрыв непрерывности вещественной частотной характеристики свидетельствует о том, что система находится на границе устойчивости. Разрыву при $\omega = 0$ соответствует апериодическая граница устойчивости и разрыву при $\omega > 0$ — колебательная граница устойчивости.

5. Острый пик вещественной частотной характеристики при угловой частоте ω_i с$^{-1}$ свидетельствует о медленно затухающих колебаниях переходной характеристики с частотой, близкой к частоте $\frac{\omega_i}{2\pi}$ Гц.

6. Если вещественная частотная характеристика непрерывная положительная и имеет вид вогнутой кривой, т. е. $\frac{dP}{d\omega} < 0$ и монотонно уменьшается по абсолютной величине, то переходная характеристика монотонная.

7. Если при какой-либо частоте ордината вещественной частотной характеристики больше начальной, т. е. $P(\omega) > P(0)$, то переходная характеристика не монотонная. (Это один из признаков немонотонности).

8. При положительной невозрастающей вещественной частотной характеристике перерегулирование переходной характеристики не может превышать 18%.

9. При наличии у положительной вещественной частотной характеристики максимума P_{max} перерегулирование переходной характеристики составляет в %

$$\sigma < \frac{P_{max} - P(0)}{P(0)} 18. \tag{7.13}$$

10. Если вещественная частотная характеристика положительна при частотах $\omega < \omega_п$, то время регулирования переходной характеристики

$$t_р > \frac{\pi}{\omega_п}. \tag{7.14}$$

11. Если вещественная частотная характеристика приближается по форме к трапецеидальной, то переходная характеристика приближенно может быть оценена по табл. 4.2 h-функций, где $\chi = \frac{\omega_п}{\omega_0}$. В этом случае время регулирования находится в пределах

$$\frac{\pi}{\omega_п} < t_р < \frac{4\pi}{\omega_п}. \tag{7.15}$$

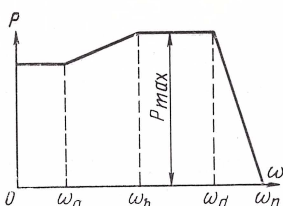


Рис. 7.4. Вещественная частотная характеристика, аппроксимируемая двумя трапециями

$$\left(\chi = \frac{\omega_d}{\omega_\text{п}} = 0{,}8;\ \lambda = \frac{\omega_b}{\omega_\text{п}} = 0{,}5;\ \chi_a = \frac{\omega_a}{\omega_b} = 0{,}4\right)$$

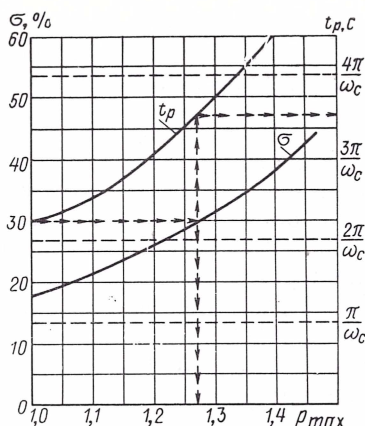


Рис. 7.5. График зависимости времени регулирования $t_\text{р}$ и перерегулирования σ от максимального значения $P_{\max}$ вещественной частотной характеристики при $\chi = 0,8$; $\lambda = 0,5$ и $\chi_a = 0,4$

12. Вещественную частотную характеристику, которая может быть аппроксимирована двумя трапециями (рис. 7.4), определяют тремя параметрами: основным коэффициентом наклона $\chi = \frac{\omega_d}{\omega_\text{п}}$, коэффициентом формы $\lambda = \frac{\omega_b}{\omega_\text{п}}$ и дополнительным коэффициентом наклона $\chi_a = \frac{\omega_a}{\omega_b}$. Характеристика (рис. 7.4) имеет $\chi = 0{,}8$; $\lambda = 0{,}5$ и $\chi_a = 0{,}4$.

При указанном значении параметров график зависимости перерегулирования σ и времени регулирования $t_\text{р}$ от максимального значения $P_{\max}$ характеристики [114] показаны на рис. 7.5. Здесь $\omega_\text{с}$ — частота среза ЛАЧХ. Графики зависимости перерегулирования σ и времени регулирования $t_\text{р}$ от максимального значения $P_{\max}$ при $\chi = 0{,}8$; $0{,}1 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}5$ и $\chi_\text{а} = 0{,}4$ представлены на рис. 7.6.

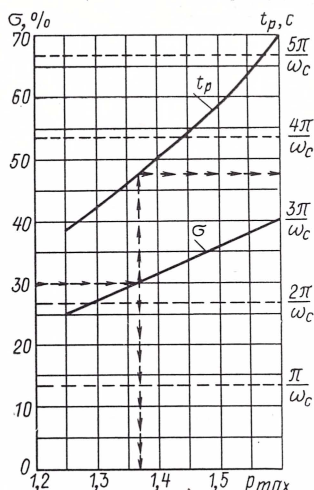
Эти зависимости используют не только для оценки показателей качества переходной характеристики при указанной форме вещественной частотной характеристики, но и для синтеза корректирующих устройств (см. гл. 9).

Некоторые из перечисленных оценок удобно применять, пренебрегая высокочастотной частью вещественной частотной характеристики или внося небольшие коррективы в ее среднечастотную часть.

Пусть отброшенная часть $P_\text{от}(\omega)$ вещественной частотной характеристики удовлетворяет следующим условиям:

$$P_\text{от}(\omega) = 0 \text{ при } 0 \leqslant \omega \leqslant \omega_l;$$
$$|P_\text{от}(\omega)| \leqslant \mu \text{ при } \omega_l \leqslant \omega \leqslant \omega_k, \tag{7.16}$$

причем функция $P_\text{от}(\omega)$ имеет N экстремумов в интервале $\omega_l \leqslant \omega \leqslant \omega_k$ и не возрастает по абсолютному значению при $\omega > \omega_k$.



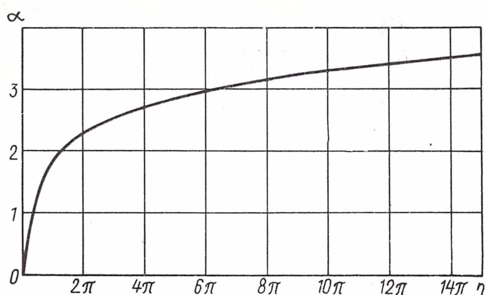


Рис. 7.7 График зависимости α от η

Рис. 7.6. График зависимости времени регулирования $t_р$ и перерегулирования σ от максимального значения P_{max} вещественной частотной характеристики при $\chi = 0,8$; $0,1 \leqslant \lambda \leqslant 0,5$ и $\chi_a = 0,4$

Тогда верхний предел погрешности Δh, который вносится в переходную характеристику при $t = t_i$, определяют [114] по формуле

$$\Delta h(t_i) \leqslant \frac{2\mu}{\pi}[\alpha(\eta_2) - \alpha(\eta_1)]. \qquad (7.17)$$

График функции $\alpha(\eta)$ изображен на рис. 7.7 и ее значения приведены в табл. 7.4; $\eta_1 = \omega_l t_i$ и $\eta_2 = (c + N)\pi$, где c — наименьшее из целых чисел, удовлетворяющих неравенству $c \geqslant \frac{\omega_l t_i}{\pi}$.

Из формулы (7. 17) следует: а) верхний предел погрешности Δh уменьшается с увеличением t; б) наибольшее значение Δh тем меньше, чем больше ω_l и чем меньше μ.

По оценке (7.14) время регулирования больше $\frac{\pi}{\omega_п}$, поэтому поправки Δh целесообразно вычислять только при $t > \frac{\pi}{\omega_п}$.

Таблица 7.4

Значения функции α

η	α	η	α	η	α	η	α
0	0	4π	2,724	8π	3,165	12π	3,421
π	1,852	5π	2,866	9π	3,240	13π	3,471
2π	2,282	6π	2,982	10π	3,306	14π	3,517
3π	2,541	7π	3,080	11π	3,366	15π	3,560

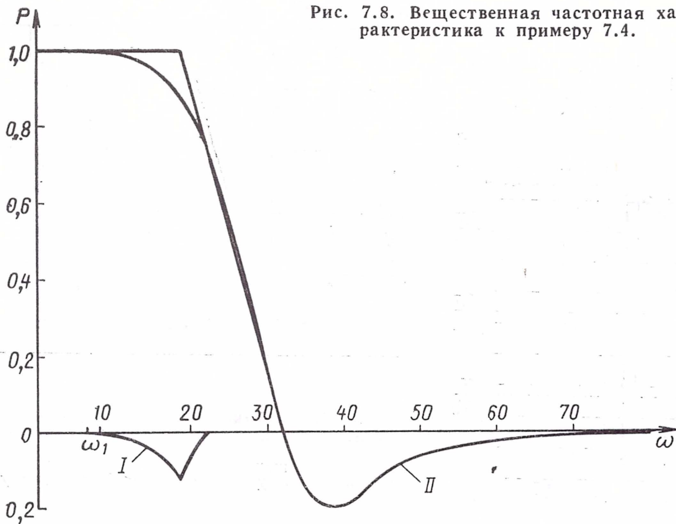


Рис. 7.8. Вещественная частотная характеристика к примеру 7.4.

Пример 7.4 Выяснить возможность оценки качества переходной характеристики, соответствующей вещественной частотной характеристике, изображенной на рис. 7.8, по одной трапеции.

Параметры трапеции: $\omega_п = 32$ с$^{-1}$; $\omega_0 = 19$ с$^{-1}$; коэффициент наклона $\chi \approx 0{,}6$. По значению χ из табл. 4.2 h-функций определим показатели качества переходной характеристики, соответствующей этой трапеции: $\sigma \approx 16\%$; $t_р \approx \approx \frac{8{,}5}{32} = 0{,}27$ с.

Теперь определим верхний предел Δh поправки. Отброшенная часть $P_{от}(\omega)$ вещественной частотной характеристики, состоящая из участка I (рис. 7.8) и ее высокочастотной части II, удовлетворяет условиям (7.16) при $\omega_l = 8$ с$^{-1}$, $\mu = 0{,}2$ и $N = 2$.

Вычислим поправку при $t_р = 0{,}27$ с:

$\omega_l t_р = 8 \cdot 0{,}27 = 2{,}16$; $\frac{\omega_l t_р}{\pi} = 0{,}69$; $c = 1$; $c + N = 3$; по графику рис. 7.7 $\alpha\,(0{,}69\pi) \approx 1{,}5$; по табл. 7.4 $\alpha\,(3\pi) = 2{,}54$; $\Delta h\,(0{,}27) = \frac{2 \cdot 0{,}2}{\pi} (2{,}54 - 1{,}5) \approx \approx 0{,}13$.

Значение Δh слишком велико. В рассмотренном случае оценивать качество переходной характеристики по одной трапеции нельзя. Вещественную частотную характеристику следует аппроксимировать, по меньшей мере, тремя трапециями и построить переходную характеристику, как изложено в п. 4.2.

7.5. ПОКАЗАТЕЛЬ КОЛЕБАТЕЛЬНОСТИ

Показатель колебательности M есть отношение максимальной ординаты амплитудно-частотной характеристики замкнутой системы к начальной:

$$M = \frac{A_{max}}{A\,(0)}. \tag{7.18}$$

Рассматривают обычно характеристику $A_\psi(\omega)$ относительно задающего воздействия. В астатических системах с единичной

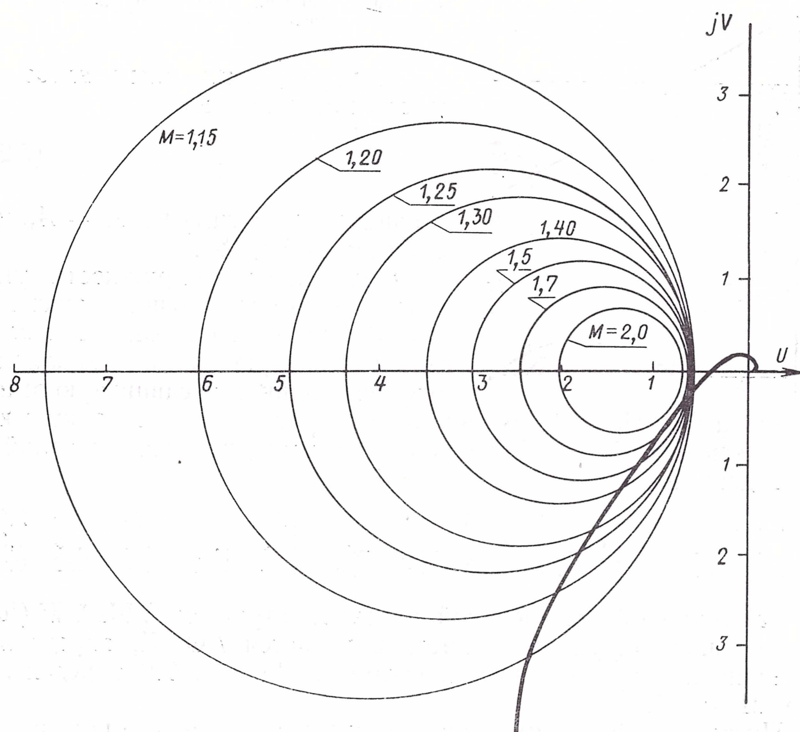


Рис. 7.9. Определение показателя колебательности M по АФЧХ разомкнутой системы

обратной связью $A(0) = 1$, в статических системах при $k \gg 1$ имеем $A(0) \approx 1$, поэтому можно принимать $M \approx A_{\max}$.

Физический смысл этой оценки заключается в том, что она показывает максимально возможное отношение амплитуды регулируемой величины к амплитуде гармонического задающего воздействия. Косвенным показателем колебательности является также запас устойчивости, при уменьшении которого колебательность системы увеличивается.

Считается, что система имеет допустимый запас устойчивости при $1{,}5 \leqslant M \leqslant 1{,}7$; хороший запас устойчивости при $1{,}1 \leqslant M \leqslant 1{,}3$. Системы используют как при $M = 1$, так и при $M \geqslant 2$. Обоснованные рекомендации устанавливают для каждого класса систем на основании опыта их эксплуатации.

Значение M может быть определено непосредственно по ЛФЧХ $W(j\omega)$ разомкнутой системы с единичной обратной связью. На комплексную плоскость наносят семейство окружностей (рис. 7.9) радиусом

$$R = \frac{A}{A^2 - 1} \qquad (7.19)$$

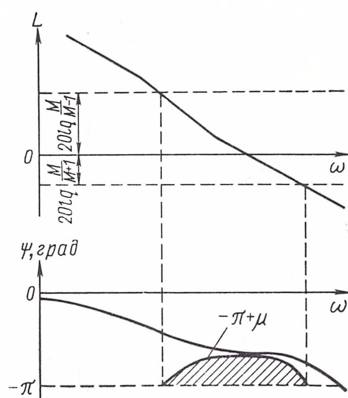


Рис. 7.10. Ограничение показателя колебательности расположением ЛФЧХ

и с центром, смещенным влево от начала координат на

$$C = \frac{A^2}{A^2 - 1}, \tag{7.20}$$

где значение амплитуды $A = A_\psi$ изменяется от 1 до ∞.

Около каждой окружности указывают соответствующее значение $A = M$. При $A = 1$ окружность вырождается в прямую линию, параллельную оси ординат и сдвинутую от нее влево на 0,5. При $A = \infty$ окружность вырождается в точку с координатами $[-1;\ j\,0]$. Значения C и R для некоторых значений A приведены ниже.

A . . .	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,40	1,50	1,60	1,70	1,80	2,00
C . . .	5,76	4,10	3,27	2,78	2,45	2,04	1,80	1,64	1,53	1,45	1,33
R . . .	5,24	3,57	2,73	2,22	1,88	1,46	1,20	1,03	0,90	0,80	0,67

Затем на этой комплексной плоскости строится АФЧХ $W(j\omega)$. Наименьшая окружность, которой коснется АФЧХ, определяет значение M рассматриваемой системы. На рис. 7.9 определено, что $M = 1{,}7$.

Пусть в требованиях к системе предусмотрено, что показатель колебательности не превышает некоторого значения M. Тогда строят окружность, соответствующую $A = M$, и АФЧХ разомкнутой системы не должна пересекать этой окружности — запретной зоны, но может касаться ее.

Запретная зона может быть построена и для логарифмической фазочастотной характеристики разомкнутой системы (рис. 7.10). Показатель колебательности не превысит заданного значения M, если избыток фазы не менее

$$\mu = \arccos\frac{A^2 + C}{2AC} \tag{7.21}$$

в том интервале частот, в котором

$$20\lg\frac{M}{M+1} \leqslant L(\omega) \leqslant 20\lg\frac{M}{M-1}, \tag{7.22}$$

т. е. в указанном диапазоне частот ЛФЧХ не должна заходить в зону, ограниченную прямой $-180°$ и кривой $-180° + \mu$.

В табл. 7.5 приведены данные для построения зависимостей μ от L.

В п. 9.6. будет рассмотрена методика построения ЛАЧХ по заданному значению M [17].

Таблица 7.5

Значения избытка фазы μ, град

L, дБ	Значения μ при различных M											
	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,40	1,50	1,60	1,70	1,80	2,00
—5	23,5	20,1	16,6	12,6	8,0	—	—	—	—	—	—	—
—4	35,0	32,1	29,8	27,5	25,2	22,9	18,9	14,3	10,3	2,9	—	—
—3	42,4	40,1	37,8	35,5	33,8	31,5	28,6	25,2	22,9	20,1	17,8	13,8
—2	48,1	45,8	43,5	41,3	39,5	37,8	34,4	31,5	29,2	27,5	25,2	21,8
—1	52,7	50,4	48,1	45,8	43,5	41,8	39,0	36,1	33,8	31,5	29,8	26,4
0	56,7	53,9	51,6	49,3	47,0	45,3	41,8	39,0	36,7	34,4	32,1	29,2
1	60,2	57,3	54,4	52,1	49,8	47,6	44,1	40,7	37,8	35,5	33,8	29,8
2	63,0	59,6	56,7	53,9	51,6	49,3	45,3	41,8	38,4	36,1	33,8	29,2
3	65,3	61,3	58,4	55,0	52,7	49,8	45,8	41,8	38,4	35,5	32,7	28,1
4	67,0	63,0	59,6	56,1	53,3	50,4	45,3	40,7	37,2	33,2	30,4	24,6
5	68,8	64,2	60,2	56,7	53,3	49,8	44,1	39,0	34,4	30,4	26,4	18,3
6	69,9	64,7	60,2	56,1	52,7	48,7	42,4	36,7	30,9	25,2	20,1	2,9
7	71,0	65,3	60,2	55,6	51,0	47,0	39,5	32,1	25,2	17,2	4,0	—
8	71,6	65,3	59,6	54,4	49,3	44,7	35,5	26,4	15,5	—	—	—
9	72,2	65,3	58,4	52,7	47,0	41,3	29,8	16,0	—	—	—	—
10	72,2	64,2	57,3	49,8	43,5	36,7	21,2	—	—	—	—	—
11	72,2	63,6	55,0	47,0	39,0	30,4	—	—	—	—	—	—
12	71,6	61,9	52,1	43,0	32,7	20,1	—	—	—	—	—	—
13	71,6	60,2	48,7	37,2	23,5	—	—	—	—	—	—	—
14	70,5	57,9	44,7	29,8	—	—	—	—	—	—	—	—
15	69,3	55,0	39,0	18,3	—	—	—	—	—	—	—	—
16	68,2	51,0	32,1	—	—	—	—	—	—	—	—	—
17	66,5	47,0	21,2	—	—	—	—	—	—	—	—	—
18	64,2	41,3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
19	61,9	33,8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
20	59,0	23,5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
21	55,6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
22	51,3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

7.6. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ

Интегральные оценки есть оценки качества переходной характеристики — быстроты затухания ее колебаний и величины отклонения $x(t) = h_у - h(t)$ от установившегося значения. Они удобны для сравнения близких по структуре систем (лучшая из них имеет меньшую интегральную оценку) и для выбора параметров системы. Обычно используются интегральные оценки системы относительно задающего воздействия. Иногда рассматриваются такие оценки относительно возмущения. Наиболее употребительны следующие оценки.

Линейная интегральная оценка равна площади, ограниченной кривой $x(t)$ (рис. 7.11), и выражается через изображение рассогласования:

$$J_0 = \int_0^\infty x(t)\,dt = \lim_{s\to 0} X(s). \qquad (7.23)$$

Линейную интегральную оценку можно применять только для монотонной переходной характеристики (рис. 7.11, *а*). При колебательной переходной характеристике (рис. 7.11, *б*) суммарная площадь, ограниченная кривой $x(t)$, совершенно не характеризует процесс.

Используются, кроме того, линейные интегральные оценки более общего вида:

$$J_{0m} = \int_0^\infty x(t)t^m dt = (-1)^m \lim_{s\to 0} \frac{d^m X(s)}{ds^m}. \qquad (7.24)$$

Они связаны с коэффициентами ошибки (п. 7.2):

$$C_m = (-1)^m J_{0m}, \qquad (7.25)$$

и позволяют определять приближенное решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами [84, 113].

Квадратичная интегральная оценка

$$J = \int_0^\infty x^2(t)\,dt = \int_0^\infty [h_у - h(t)]^2\,dt \qquad (7.26)$$

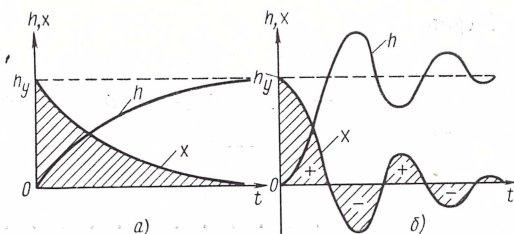
может применяться как для монотонных, так и для колебательных переходных процессов. Она зависит только от величины, но не от знаков отклонений.

Пусть изображение по Лапласу переходной характеристики $h(t)$ (относительно задающего воздействия или возмущения)

$$H(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_{n-1}s + b_n}{(a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n)\,s}, \qquad (7.27)$$

где у полинома $a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n$ все корни имеют отрицательные вещественные части; коэффициенты старших членов числителя, вплоть до b_{n-1}, могут быть нулями.

Рис. 7.11. Определение линейной интегральной оценки переходной характеристики:
а — монотонной; *б* — колебательной



Тогда квадратичная интегральная оценка определяется [113] выражением

$$J = \frac{1}{2a_n^2\,\Delta}\left(B_0\,\Delta_0 + B_1\,\Delta_1 + \cdots + B_{n-1}\,\Delta_{n-1} - 2b_n b_{n-1}\,\Delta\right). \quad (7.28)$$

В этом равенстве

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_n & -a_{n-2} & a_{n-4} & -a_{n-6} & \ldots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & -a_{n-3} & a_{n-5} & \ldots & 0 \\ 0 & -a_n & a_{n-2} & -a_{n-4} & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -a_{n-1} & a_{n-3} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_1 \end{vmatrix}; \quad (7.29)$$

Δ_i ($i = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$) — определитель, получающийся из Δ заменой $i + 1$-го столбца столбцом $a_{n-1}, a_n, 0, 0, \ldots$; в определителях Δ и Δ_i элементы с индексами меньше 0 и больше n равны нулю;

$$\left.\begin{aligned} B_0 &= b_n^2; \\ B_i &= b_{n-1}^2 - 2b_{n-2}b_n; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_j &= b_{n-j}^2 - 2b_{n-j-1}b_{n-j+1} + 2b_{n-j-2}b_{n-j+2} - \cdots; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_{n-1} &= b_1^2, \end{aligned}\right\} \quad (7.30)$$

где в коэффициентах B_j элементы с индексами меньше 1 и больше n равны нулю.

Изображение переходной характеристики может иметь следующий вид:

$$H(s) = \frac{h_y\left(b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_{n-1}s + 1\right)}{\left(a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + 1\right)s}, \quad (7.31)$$

где $h_y = h(\infty)$, а полиномы числителя и знаменателя (7.31) и (7.27) имеют одинаковые свойства.

В этом случае

$$J = h_y^2\left[\frac{\Delta_0 + B_1\,\Delta_1 + B_2\,\Delta_2 + \cdots + B_{n-1}\,\Delta_{n-1}}{2\Delta} + \frac{a_{n-1}}{2} - b_{n-1}\right]. \quad (7.32)$$

Здесь

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{n-1} & -a_{n-3} & a_{n-5} & -a_{n-7} & \dots & 0 \\ -1 & a_{n-2} & -a_{n-4} & a_{n-6} & \dots & 0 \\ 0 & -a_{n-1} & a_{n-3} & -a_{n-5} & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 \end{vmatrix}; \qquad (7.33)$$

определитель Δ_0 получается из Δ заменой 1-й строки на строку a_{n-2}, $-a_{n-4}$, a_{n-6}, . . .;

определитель Δ_i, $i = 1, 2, \dots, n-1$ получается из Δ заменой i-го столбца столбцом 1, 0, 0, . . .; в Δ, Δ_0 и Δ_i элемент $a_n = 1$, а элементы с индексом меньше 0 и больше n равны нулю;

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= b_{n-1}^2 - 2b_{n-2}; \\ B_2 &= b_{n-2}^2 - 2b_{n-3}b_{n-1} + 2b_{n-4}; \\ &\dots \\ B_j &= b_{n-j}^2 - 2b_{n-j-1}b_{n-j+1} + 2b_{n-j-2}b_{n-j+2} - \dots; \\ &\dots \\ B_{n-1} &= b_1^2, \end{aligned}\right\} \qquad (7.34)$$

где элемент $b_n = 1$, а элементы с индексами меньше 1 и больше n равны нулю.

Значения J при $n = 2; 3; 4; 5$ и 6, вычисленные по формуле (7.32), даны в табл. 7.6.

Квадратичную интегральную оценку используют для выбора параметров системы. Чем меньше значение J, тем ближе начальная часть переходной характеристики приближается к ступенчатой. Однако при этом не принимают в расчет возможное увеличение колебательности характеристики.

Улучшенная квадратичная интегральная оценка

$$J_T = \int_0^\infty [x^2(t) + T^2\dot{x}^2(t)]\, dt, \qquad (7.35)$$

где T — некоторая постоянная. Чем меньше значение J_T, тем меньше отклонение $x(t)$ переходной характеристики от экспоненты $y(t)$ с постоянной времени T, называемой экстремалью,

$$y = y_у \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right). \qquad (7.35а)$$

Для вычисления оценки J_T ее разделяют на два слагаемых:

$$J_T = \int_0^\infty x^2(t)\, dt + T^2 \int_0^\infty \dot{x}^2(t)\, dt = J + T^2 J'. \qquad (7.36)$$

Таблица 7.6

Квадратичные интегральные оценки

№ по пор.	Изображение по Лапласу $H(s)$ переходной характеристики $h(t)$, где $h_y = h(\infty)$	Квадратичная интегральная оценка $I = \int_0^\infty x^2(t)\,dt = \int_0^\infty [h_y - h(t)]^2\,dt$
1	$\dfrac{h_y(b_1 s + 1)}{(a_0 s^2 + a_1 s + 1)\,s}$	$\dfrac{h_y^2\left[a_0 + a_1(a_1 - 2b_1) + b_1^2\right]}{2a_1}$
2	$\dfrac{h_y(b_1 s^2 + b_2 s + 1)}{(a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + 1)\,s}$	$h_y^2\left[\dfrac{a_1(a_1 + b_2^2 - 2b_1) + b_1^2}{2(a_1 a_2 - a_0)} + \dfrac{a_2}{2} - b_2\right]$
3	$\dfrac{h_y(b_1 s^3 + b_2 s^2 + b_3 s + 1)}{(a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + 1)\,s}$	$h_y^2\left[\dfrac{(B_1 + a_2)\Delta_1 + (B_2 - a_0)a_1 + a_3 b_1^2}{2(a_3\Delta_1 - a_1^2)} + \dfrac{a_3}{2} - b_3\right]$, где $\Delta_1 = a_1 a_2 - a_0 a_3$; $B_1 = b_3^2 - 2b_2$; $B_2 = b_2^2 - 2b_1 b_3$
4	$\dfrac{h_y(b_1 s^4 + b_2 s^3 + b_3 s^2 + b_4 s + 1)}{(a_0 s^5 + a_1 s^4 + a_2 s^3 + a_3 s^2 + a_4 s + 1)\,s}$	$h_y^2\left[\dfrac{(B_1 + a_3)\Delta_1 + (B_2 - a_1)\Delta_2 + B_3\Delta_3 + b_1^2\Delta_4}{2(a_4\Delta_1 - a_2\Delta_2 + a_0\Delta_3)} + \dfrac{a_4}{2} - b_4\right]$, где $\Delta_1 = a_3\Delta_2 - a_1\Delta_3$; $\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3$; $\Delta_3 = a_1 a_4 - a_0$; $\Delta_4 = a_3 a_4 - a_2$; $B_1 = b_4^2 - 2b_3$; $B_2 = b_3^2 - 2b_2 b_4 + 2b_1$; $B_3 = b_2^2 - 2b_1 b_3$

Продолжение табл. 7.6

№ по пор.	Изображение по Лапласу $H(s)$ переходной характеристики $h(t)$, где $h_у = h(\infty)$	Квадратичная интегральная оценка $I=\int_0^\infty x^2(t)\,dt=\int_0^\infty [h_у-h(t)]^2\,dt$
5	$\dfrac{h_у(b_1s^5+b_2s^4+b_3s^3+b_4s^2+b_5s+1)}{(a_0s^6+a_1s^5+a_2s^4+a_3s^3+a_4s^2+a_5s+1)\,s}$	$h_у^2\left[\dfrac{(B_1+a_4)\Delta_1+(B_2-a_2)\Delta_2+(B_3+a_0)\Delta_3+B_4\Delta_4+b_1^2\Delta_5}{2(a_5\Delta_1-a_3\Delta_2+a_1\Delta_3)}+\dfrac{a_5}{2}-b_5\right]$, где $\Delta_1=a_4\Delta_2-a_2\Delta_3+a_0\Delta_4$; $\Delta_2=a_3(a_1a_2-a_0a_3)-a_1(a_1a_4-a_0a_5)$; $\Delta_3=a_5(a_1a_2-a_0a_3)-a_1^2$; $\Delta_4=a_5(a_1a_4-a_0a_5)-a_1a_3$; $\Delta_5=a_5(a_3a_4-a_2a_5)-(a_3^2-a_1a_5)$; $B_1=b_5^2-2b_4$; $B_2=b_4^2-2b_3b_5+2b_2$; $B_3=b_3^2-2b_2b_4+2b_1b_5$; $B_4=b_2^2-2b_1b_3$
6	$\dfrac{h_у(b_1s+1)}{a_0s^2+a_1s+1}$	$\dfrac{h_у^2(a_0+b_1^2)}{2a_0a_1}$
7	$\dfrac{h_у(b_1s^2+b_2s+1)}{a_0s^3+a_1s^2+a_2s+1}$	$\dfrac{h_у^2[a_0a_1+a_0(b_2^2-2b_1)+a_2b_1^2]}{2a_0(a_1a_2-a_0)}$
8	$\dfrac{h_у(b_1s^3+b_2s^2+b_3s+1)}{a_0s^4+a_1s^3+a_2s^2+a_3s+1}$	$h_у^2\dfrac{(a_2+b_3^2-2b_2)a_0a_1-(a_0-b_2^2+2b_1b_3)a_0a_3+b_1^2(a_2a_3-a_1)}{2a_0[a_1(a_2a_3-a_1)-a_0a_3^2]}$,

Продолжение табл. 7.6

№ по пор.	Изображение по Лапласу $H(s)$ переходной характеристики $h(t)$, где $h_у = h(\infty)$	Квадратичная интегральная оценка $I = \int_0^\infty x^2(t)\,dt = \int_0^\infty [h_у - h(t)]^2\,dt$
9	$\dfrac{h_у(b_1s^4 + b_2s^3 + b_3s^2 + b_4s + 1)}{a_0s^5 + a_1s^4 + a_2s^3 + a_3s^2 + a_4s + 1}$	$h_у^2 \dfrac{(B_2 + a_3)A_{52} + (B_3 - a_1)A_{53} + B_4A_{54} + b_1^2A_{55}}{2a_0(a_1A_{55} - a_3A_{54} + A_{53})}$, где $A_{52} = a_0(a_1a_2 - a_0a_3)$; $A_{53} = a_0(a_1a_4 - a_0)$; $A_{54} = a_0(a_3a_4 - a_2)$; $A_{55} = a_4(a_2a_3 - a_1a_4) - (a_2^2 - a_0a_4)$; $B_2 = b_4^2 - 2b_3$; $B_3 = b_3^2 - 2b_2b_4 + 2b_1$; $B_4 = b_2^2 - b_1b_3$
10	$\dfrac{h_у(b_1s^5 + b_2s^4 + b_3s^3 + b_4s^2 + b_5s + 1)}{a_0s^6 + a_1s^5 + a_2s^4 + a_3s^3 + a_4s^2 + a_5s + 1}$	$h_у^2 \dfrac{(B_2 + a_4)A_{62} + (B_3 - a_2)A_{63} + (B_4 + a_0)A_{64} + B_5A_{65} + b_1^2A_{66}}{2a_0(a_5A_{64} - a_3A_{65} + a_1A_{66})}$, где $A_{62} = a_0[a_1(a_0a_5 - a_1a_4) - a_3(a_0a_3 - a_1a_2)]$; $A_{63} = a_0[a_5(a_1a_2 - a_0a_3) - a_1^2]$; $A_{64} = a_0[a_5(a_1a_4 - a_0a_5) - a_1a_3]$; $A_{65} = a_0[a_5(a_3a_4 - a_2a_5) + a_1a_5 - a_3^2]$; $A_{66} = a_5[a_5(a_0a_4 - a_2^2) - a_4(a_1a_4 - a_2a_3)] - a_3(a_2a_3 - a_1a_4) +$ $+ a_1(a_2a_5 - a_1)$; $B_2 = b_5 - 2b_4$; $B_3 = b_4^2 - 2b_3b_5 + 2b_2$; $B_4 = b_3^2 - 2b_2b_4 + 2b_1b_5$; $B_5 = b_2^2 - 2b_1b_3$

По определению $x(t) = h_у - h(t)$ и, следовательно, $\dot{x}(t) = -\dot{h}(t)$, так как $\dot{h}_у = 0$. Если изображение $H(s)$ переходной характеристики определяется равенством (7.27), то преобразование Лапласа функции $\dot{h}(t)$

$$\dot{H}(s) = sH(s) - h(0) = sH(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}. \tag{7.37}$$

Тогда согласно [113]

$$J' = \frac{B_1 A_{n1} + B_2 A_{n2} + \cdots + B_n A_{nn}}{2a_0 \Delta}, \tag{7.38}$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_n & -a_{n-2} & a_{n-4} & -a_{n-6} & \ldots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & -a_{n-3} & a_{n-5} & \ldots & 0 \\ 0 & -a_n & a_{n-2} & -a_{n-4} & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -a_{n-1} & a_{n-3} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_1 \end{vmatrix}; \tag{7.39}$$

A_{ni} $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — алгебраические дополнения элементов n-й строки определителя Δ; в Δ элементы с индексами меньше 0 и больше n равны нулю;

$$\left.\begin{aligned} &B_1 = b_n^2; \\ &B_2 = b_{n-1}^2 - 2b_{n-2}b_n; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &B_j = b_{n-j+1}^2 - 2b_{n-j}b_{n-j+2} + 2b_{n-j-1}b_{n-j+3} - \cdots; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &B_n = b_1^2, \end{aligned}\right\} \tag{7.40}$$

элементы b_i с индексами меньше 0 и больше n равны нулю.

Значения J' при $n = 2; 3; 4; 5$ и 6 даны в табл. 7.7 (см. № 6, 7, 8, 9 и 10). Эти же формулы определяют значения J, если $H(s)$ равно правой части равенства (7.37).

При инженерных расчетах применяют и еще более сложные интегральные оценки [113]. Например, оценка

$$J_{TT} = \int_0^\infty [x^2(t) + T_1^2 \dot{x}^2(t) + T_2^4 \ddot{x}^2(t)]\, dt$$

показывает приближение переходной характеристики к экстремали, определяемой уравнением

$$\alpha_2 \ddot{y} + \alpha_1 \dot{y} + y = y_у,$$

где $\alpha_2 = T_2^2$ и $\alpha_1 = \sqrt{T_1^2 - 2T_2^2}$.

Использование интегральных оценок для синтеза САР будет рассмотрено в п. 9.2.

7.7. ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ПЕРЕХОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПО РАСПОЛОЖЕНИЮ НУЛЕЙ И ПОЛЮСОВ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ

Переходная характеристика зависит от распределения нулей и полюсов передаточной функции САР (см. п. 4.1). Известен ряд методов, использующих эту зависимость для оценки качества переходной характеристики. Качество регулирования зависит также от взаимного расположения нулей и полюсов изображения внешнего воздействия.

Ниже излагаются основные сведения о некоторых из этих методов, наиболее эффективен метод корневых годографов (см. п.7.8).

Оценки распределения полюсов передаточной функции и их связь с показателями качества

В простейшем случае передаточная функция САР относительно внешнего воздействия $g(t)$ не имеет нулей:

$$W_g(s) = \frac{1}{\mathscr{D}(s)}. \qquad (7.41)$$

Тогда переходная характеристика и ее показатели качества полностью определяются распределением полюсов $W_g(s)$, т. е. корнями характеристического уравнения

$$\mathscr{D}(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0. \qquad (7.42)$$

Будем рассматривать устойчивую систему: все коэффициенты уравнения (7.42) положительные и его корни $s_1, s_2, \ldots, s_n$ располагаются слева от мнимой оси комплексной плоскости.

Некоторой обобщенной оценкой числового значения коэффициентов уравнения (7.42) и его корней может служить параметр

$$\Omega = \sqrt[n]{|s_1 s_2 \cdots s_n|} = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_0}}, \qquad (7.43)$$

называемый среднегеометрическим корнем.

Параметр Ω служит мерой быстроты протекания переходных процессов. Увеличение Ω в C раз ведет к тому, что форма переходной характеристики не изменяется, а время регулирования умень-

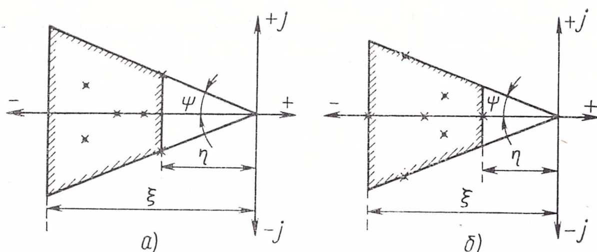


Рис. 7.12. Определение области расположения корней параметрами η, ξ и $\mu = \operatorname{tg}\psi$:

а — ближайшие корни комплексные сопряженные и *б* — ближайший корень вещественный

шается в C раз. Для увеличения Ω следует увеличивать передаточный коэффициент k разомкнутой САР.

Предварительные (и весьма приближенные) сведения о расположении корней можно получить [66] на основании следующих соотношений между коэффициентами уравнения (7.42):

1) при

$$a_0 > a_1 > a_2 > \cdots > a_n > 0 \tag{7.44}$$

модули всех корней меньше единицы;

2) при

$$0 < a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n \tag{7.45}$$

модули всех корней больше единицы;

3) если все отношения последующего коэффициента к предыдущему заключены между положительными числами m и M, т. е.

$$0 < m \leqslant \frac{a_{i+1}}{a_i} \leqslant M, \tag{7.46}$$

то модули всех корней заключены между теми же числами m и M:

$$m \leqslant |s_i| \leqslant M. \tag{7.47}$$

Точнее область расположения корней характеристического уравнения принято определять параметрами η, ξ и $\mu = \operatorname{tg}\psi$ (рис. 7.12).

Параметр η, называемый степенью устойчивости [1], есть расстояние от мнимой оси до ближайшего корня, т. е. величина его вещественной части.

Параметр ξ есть расстояние от мнимой оси до наиболее удаленного корня, т. е. величина его вещественной части.

---

[1] Не следует смешивать параметры «степень устойчивости» и «запас устойчивости», так как это совершенно различные не связанные один с другим параметры. Степень устойчивости оценивает быстродействие системы.

Параметр μ, называемый колебательностью, есть отношение мнимой части β ближайшего комплексного корня к вещественной α:

$$\mu = \frac{\beta}{\alpha} = \operatorname{tg} \psi. \tag{7.48}$$

Для вычисления η в ряде работ рекомендуют следующий метод. В характеристическое уравнение (7.42) подставляют $s = z - \eta$ и получают смещенное уравнение

$$a_0 (z - \eta)^n + a_1 (z - \eta)^{n-1} + \cdots + a_{n-1} (z - \eta) + a_n = \\ = a_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \cdots + A_{n-1} z + A_n = 0, \tag{7.49}$$

где коэффициенты A_i есть функции a_i и η.

Уравнение (7.49) получено в результате смещения мнимой оси плоскости корней уравнения (7.42) влево на величину η. При этом пара комплексных сопряженных корней (рис. 7.12, *а*) или вещественный корень (рис. 7.12, б) уравнения (7.49) по определению η попадают на мнимую ось. Поэтому смещенное уравнение (7.49) соответствует границе устойчивости и для вычисления η к этому уравнению следует применить любой критерий устойчивости.

Так, по критерию Гурвица апериодической границе устойчивости (вещественный корень обратился в нуль) соответствует уравнение

$$A_n = (-1)^n a_0 \eta^n + (-1)^{n-1} a_1 \eta^{n-1} + \cdots = 0. \tag{7.50}$$

Колебательной границе устойчивости (пара комплексных сопряженных корней обратилась в пару чисто мнимых) соответствует равенство нулю предпоследнего определителя Гурвица уравнения (7.49):

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_3 & \dots & 0 \\ a_0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & A_{n-1} \end{vmatrix} = 0. \tag{7.51}$$

Из уравнения (7.50) или (7.51) можно определить степень устойчивости η.

Однако при использовании критерия Гурвица этот метод не дает каких-либо преимуществ, так как степень уравнения (7.50) равна n, а степень уравнения (7.51) больше n. Поэтому если необходимо определить параметры η, ξ и μ, целесообразно вычислить корни характеристического уравнения (7.42), пользуясь методами, изложенными в приложении 2.

Параметры η, ξ и μ предпочтительнее использовать не для оценки качества регулирования, а для синтеза САР по заданным значениям этих параметров.

Приближенная связь между параметрами η, ξ и μ и показателями качества переходной характеристики заключается в следующем.

Корни характеристического уравнения, расположенные ближе к мнимой оси, т. е. имеющие наименьшую по абсолютной величине вещественную часть, дают составляющие переходной характеристики, которые затухают наиболее медленно. Поэтому по степени устойчивости можно приближенно определить время регулирования, т. е. время, по истечении которого $h(t)$ отклоняется от $h_у$ не более чем на 5%:

$$t_р \approx \frac{3}{\eta}, \tag{7.52}$$

если ближайший к мнимой оси корень вещественный, и

$$t_р \leqslant \frac{3}{\eta}, \tag{7.53}$$

если ближайшей к мнимой оси является пара комплексных сопряженных корней.

По значению η можно также построить мажоранты и миноранты [84, гл. XIX], т. е. кривые, определяющие область, в которой располагается переходная характеристика при типовом расположении корней и типовых начальных условиях.

Значение колебательности μ позволяет определить приближенное значение перерегулирования переходной характеристики в %:

$$\sigma \leqslant e^{-\frac{\pi}{\mu}} 100, \tag{7.54}$$

если ближе к мнимой оси расположена пара комплексных сопряженных корней.

Колебательность μ связана с еще одним показателем качества переходной характеристики — с затуханием ζ.

Затухание за период в %

$$\zeta = \frac{C_1 - C_2}{C_1} 100, \tag{7.55}$$

где C_1 и C_2 — первая и вторая амплитуды синусоидальной составляющей $Ce^{-\alpha t}(\sin \beta t + \psi_0)$ переходной характеристики, т. е. составляющей, соответствующей комплексным сопряженным корням.

Взаимозависимость μ и ζ определяется следующими формулами:

$$\zeta = 1 - e^{-\frac{2\pi}{\mu}} \tag{7.56}$$

и

$$\mu = \frac{2\pi}{\ln \frac{1}{1-\zeta}}. \tag{7.57}$$

В САР обычно допускают $\zeta \geqslant (90 \div 98)\%$. При $\zeta = 98\%$ допустимая колебательность $\mu \approx 1{,}57$, а при $\zeta = 90\%$ $\mu \approx 2{,}72$.

Диаграмма Вышнеградского

Если в характеристическом уравнении третьего порядка

$$a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0$$

все члены разделить на a_3 и выполнить подстановку $s = g\Omega_0 = g\sqrt[3]{\frac{a_3}{a_0}}$, то получим нормированное уравнение

$$q^3 + Aq^2 + Bq + 1 = 0, \tag{7.58}$$

где A и B— параметры Вишнеградского:

$$A = \frac{a_1}{\sqrt[3]{a_0^2 a_3}} \text{ и } B = \frac{a_2}{\sqrt[3]{a_0 a_3^2}} . \tag{7.59}$$

На плоскости параметров A и B граница устойчивости (колебательной) определяется уравнением $AB = 1$ при $A > 0$ и $B > 0$. Это равнобокая гипербола, для которой оси координат служат асимптотами (рис. 7.13). Область устойчивости лежит выше этой кривой, ее разделяют на три области в соответствии с расположением корней уравнения (7.58) на комплексной плоскости. Уравнение

$$A^2 B^2 - 4(A^3 + B^3) + 18AB = 27 \tag{7.60}$$

кривыми CE и CF выделяет область III, соответствующую трем вещественным корням уравнения (7.58).

Кроме того, уравнение

$$2A^3 - 9AB + 27 = 0 \text{ при } A > 3 \tag{7.61}$$

дает кривую CD. В результате этого выделяются области I и II. Им соответствует один вещественный и пара комплексных сопряженных корней уравнения (7.58), на рис. 7.13 указано расположение этих корней.

Полученный график называют диаграммой Вышнеградского. Область I есть область колебательных процессов, область II — монотонных процессов и область III — апериодических процессов с экспоненциальной переходной характеристикой. Вычислив значения параметров Вышнеградского, по диаграмме легко определить как устойчивость системы третьего порядка с передаточной функцией (7.41), так и характер переходной характеристики.

По уравнениям

$$B = \frac{1}{A - 2\eta_0} + 2\eta_0 (A - 2\eta_0)$$

для области I и

$$B = \frac{1}{\eta_0} - \eta_0^2 + A\eta_0$$

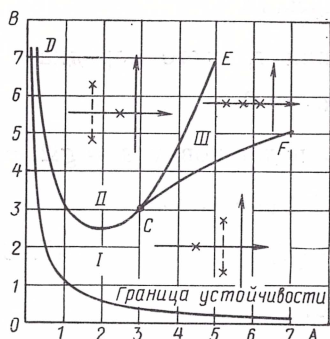


Рис. 7.13. Диаграмма Вышнеградского

для областей II и III на диаграмму Вышнеградского можно нанести дополнительные линии равной степени устойчивости η_0. Здесь η_0 — нормированная степень устойчивости:

$$\eta_0 = \frac{\eta}{\Omega_0} = \sqrt[3]{\frac{a_0}{a_3}}\,\eta \text{ и } \eta = \sqrt[3]{\frac{a_3}{a_0}}\,\eta_0. \tag{7.62}$$

Дополнительные линии, соответствующие равным значениям ξ_0, наносят на диаграмму по уравнениям

$$B = \frac{1}{\xi_0} - \xi_0^2 + A\xi_0$$

для областей I и III и

$$B = \frac{1}{A - 2\xi_0} + 2\xi_0 (A - 2\xi_0)$$

для области II. Здесь

$$\xi_0 = \frac{\xi}{\Omega_0} = \sqrt[3]{\frac{a_0}{a_3}}\,\xi \text{ и } \xi = \sqrt[3]{\frac{a_3}{a_0}}\,\xi_0, \tag{7.63}$$

ξ — расстояние от мнимой оси до наиболее удаленного корня.

Дополнительные линии равной колебательности наносят на диаграмму по уравнению

$$4\chi^2 (A^3 + B^3) - \chi^3 A^2 B^2 + (2\chi^3 - 4\chi^2 - 16\chi) AB - \chi^3 + \\ + 12\chi^2 - 48\chi + 64 = 0,$$

где $\chi = 1 + \mu^2$.

Эти же линии соответствуют равным значениям затухания ζ, так как μ и ζ связаны формулами (7.56) и (7.57).

Диаграммы с дополнительными линиями равных значений η_0 и μ позволяют по значениям параметров Вышнеградского A и B определить значения η_0 и μ. Затем по формуле (7.62) можно определить значение η. Формулы (7.52)—(7.54) по значениям η и μ позволяют определить приближенные значения показателей качества $t_\text{р}$ и σ переходной характеристики системы третьего порядка с передаточной функцией (7.41).

В ряде случаев диаграмму Вышнеградского удается использовать для приближенной оценки качества системы более высокого порядка и с передаточной функцией, имеющей нули. Это имеет место в следующих случаях:

1) три полюса передаточной функции (7.41) являются доминирующими, а остальные удалены от мнимой оси влево значительно дальше и ими можно пренебречь;

2) передаточная функция имеет нули, которые компенсируют некоторые из ее полюсов и остаются лишь три доминирующих полюса. Можно считать, что нуль γ_j компенсирует полюс λ_i, если

$$|\lambda_i - \gamma_j| \leqslant 0{,}1\,|\lambda_i| \approx 0{,}1\,|\gamma_j|. \qquad (7.64)$$

В обоих случаях действительную передаточную функцию $W_g(s)$ заменяют приближенной передаточной функцией $W_g^*(s)$ третьего порядка, не имеющей нулей.

Влияние расположения нулей и полюсов передаточной функции на переходную характеристику

В устойчивой замкнутой системе имеет место следующее:

1. Близко расположенные полюс и нуль взаимно компенсируются. Их расположение считается близким, если удовлетворяется неравенство (7.64).

2. Уменьшение амплитуды колебательной составляющей, создаваемой комплексными полюсами, и приближение к асимптоте экспоненциальной составляющей, создаваемой действительным полюсом, происходит тем быстрее, чем больше модуль полюса. В этом можно убедиться по переходным характеристикам колебательного и апериодического звеньев.

3. Время регулирования $t_р$ переходной характеристики зависит в основном от абсолютного значения вещественной части доминирующих полюсов или полюса. Доминируют ближайшие к мнимой оси комплексные корни или ближайший действительный корень. Приближенное значение $t_р$ определяют соответственно по формуле (7.53) или (7.52).

4. Перерегулирование σ переходной характеристики зависит от декремента затухания (отношения действительной части к мнимой) доминирующих комплексных полюсов. Приближенное значение определяют по формуле (7.54).

5. Близкие к началу координат нули, если они не компенсируют полюса, и удаленные от него, но не доминирующие, полюса увеличивают время регулирования и перерегулирование.

Пример 7.5. Полюсы передаточной функции замкнутой системы

$$\lambda_{1,2} = -8{,}74 \pm j18 \text{ и } \lambda_3 = -20.$$

Определить показатели качества $t_р$ и σ переходной характеристики и выяснить, как они изменятся, если передаточная функция имеет еще а) нуль $\gamma = -5$ и б) $\lambda_4 = -40$.

Для рассматриваемых случаев передаточная функция системы имеет соответственно следующие значения:

$$W_{g1} = \frac{1}{1{,}25\cdot10^{-4}s^3 + 4{,}69\cdot10^{-3}s^2 + 9{,}38\cdot10^{-2}s + 1};$$

$$W_{g2} = \frac{0{,}2s + 1}{1{,}25\cdot10^{-4}s^3 + 4{,}69\cdot10^{-3}s^2 + 9{,}38\cdot10^{-2}s + 1};$$

$$W_{g3} = \frac{1}{3{,}13\cdot10^{-6}s^4 + 2{,}42\cdot10^{-4}s^3 + 7{,}03\cdot10^{-3}s^2 + 0{,}119s + 1}.$$

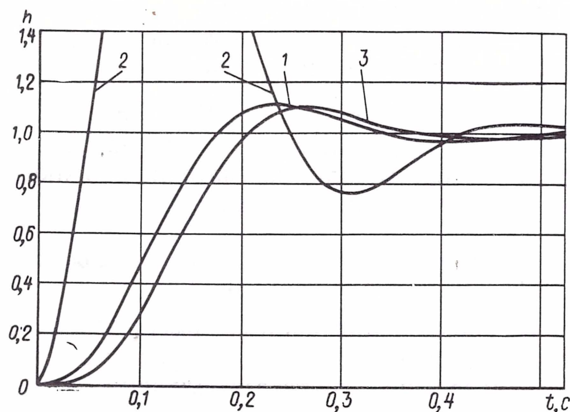


Рис. 7.14. Переходные характеристики к примеру 7.5

Переходные характеристики, соответствующие этим передаточным функциям, изображены на рис. 7.14 кривыми *1*, *2* и *3*; перерегулирование $\sigma = 11$; 130; 10%.

О взаимном расположении нулей и полюсов передаточной функции и изображения внешнего воздействия

Целью САР является воспроизведение с минимальными погрешностями задающего воздействия и максимально возможное подавление возмущений.

Достижению этой цели способствует выполнение следующих рекомендаций, сформулированных на основании анализа составляющих переходного процесса [112]:

1. Полюсы передаточной функции следует удалять от области расположения полюсов изображения внешнего воздействия и во всяком случае не допускать их совпадения, что приводит к резонансу.

2. Нули передаточной функции относительно возмущения $W_f(s)$ следует располагать возможно ближе к полюсам изображения возмущения. При этом уменьшается вынужденная составляющая регулируемой координаты, создаваемая возмущением.

3. Нули и полюсы передаточной функции относительно задающего воздействия $W_g(s)$ следует располагать так, чтобы при всех полюсах ρ_1, ρ_2, ... изображения задающего воздействия $g(t)$ она имела приблизительно одно и то же значение: $W_g(\rho_1) \approx \approx W_g(\rho_2) \approx \ldots = \mathrm{const}$. При этом ошибка воспроизведения $g(t)$ минимальная.

4. Нули передаточной функции следует располагать около ее полюсов, наиболее близких к мнимой оси. Это уменьшает собственную сопровождающую составляющую.

5. Полюсы передаточной функции следует по возможности удалять от мнимой оси. Чем дальше полюсы от мнимой оси, тем быстрее затухает свободная составляющая.

7.8. МЕТОД КОРНЕВЫХ ГОДОГРАФОВ [12]

Корневым годографом называют совокупность траекторий, которые описывают корни характеристического уравнения замкнутой САР на комплексной плоскости корней при изменении одного из параметров от 0 до ∞. Метод корневых годографов используют при исследовании устойчивости, оценке качества регулирования и синтезе САР. Этот метод графоаналитический, отличающийся большой наглядностью.

Изменяемым (свободным) параметром может быть любой из параметров, линейно входящих в характеристическое уравнение замкнутой системы. В одноконтурной системе к ним относятся передаточные коэффициенты звеньев и разомкнутой цепи, постоянные времени апериодических и форсирующих звеньев, а также коэффициенты демпфирования колебательных и форсирующих звеньев второго порядка.

Пусть характеристическое уравнение замкнутой САР

$$B_n(s) + AB_m(s) = 0, \qquad (7.65)$$

где A — изменяемый параметр, $A > 0$;

$$B_n(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n;$$

$$B_m(s) = b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1}s + b_m, \quad m \leqslant n;$$

полиномы $B_n(s)$ и $B_m(s)$ не имеют кратных корней.

Тогда корневой годограф имеет следующие свойства, которые определяют его построение:

1. Начальными точками ветвей годографа (траекторий), т. е. корнями уравнения (7.65) при $A = 0$, являются корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ полинома $B_n(s)$.

На комплексной плоскости эти корни будем обозначать точками с крестиком (рис. 7.15).

2. С увеличением свободного параметра A корни уравнения (7.65) плавно изменяются, образуя на плоскости корней n непрерывных линий — ветвей годографа.

3. Предельными точками ветвей годографа, т. е. корнями уравнения (7.65) при $A = \infty$, являются корни $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ полинома B_m.

На комплексной плоскости эти корни будем обозначать кружками с точкой (рис. 7.15).

4. В предельных точках заканчиваются только m ветвей годографа. Остальные $n - m$ ветвей уходят в бесконечность, асимптотически приближаясь к прямым, пересекающимся в точке O_a.

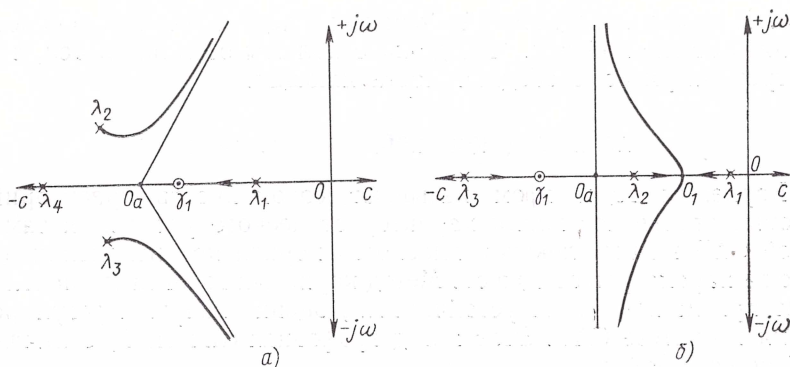


Рис. 7.15. Корневые годографы

Точка $O_а$ расположена на вещественной оси и ее абсцисса

$$c_а = -\frac{\frac{a_1}{a_0} - \frac{b_1}{b_0}}{n-m}. \qquad (7.66)$$

Угол наклона асимптот

$$\psi = \frac{\pi N}{n-m}, \quad N = \pm 1; \pm 3; \ldots \qquad (7.67)$$

Углы ψ отсчитывают от положительной действительной полуоси против направления часовой стрелки.

Асимптотические свойства ветвей годографа, уходящих в бесконечность, проявляются лишь вдали от области расположения предельных точек. Вблизи этой области могут быть пересечения асимптот.

5. Ветви годографа от действительных начальных точек λ_i располагаются на действительной оси до встречи одна с другой, с предельной точкой γ_j или уходят в бесконечность.

Ветвями годографа заняты отрезки действительной оси, для которых выполняется условие

$$a - b = N, \; N = \pm 1; \; \pm 3; \; \ldots, \qquad (7.68)$$

где a и b — число соответственно начальных и предельных точек, расположенных справа от рассматриваемого отрезка.

В каждой точке O_i встречи действительных ветвей годографа возникает пара комплексно-сопряженных ветвей, выходящих на комплексную плоскость перпендикулярно к действительной оси.

Абсциссами c_i точек O_i являются действительные корни уравнения

$$B_n(c)\,B_m'(c) - B_m(c)\,B_n'(c) = 0, \qquad (7.69)$$

где

$$B_n'(c) = \left[\frac{dB_n(s)}{ds}\right]_{s=c} \quad \text{и} \quad B_m'(c) = \left[\frac{dB_m(s)}{ds}\right]_{s=c}.$$

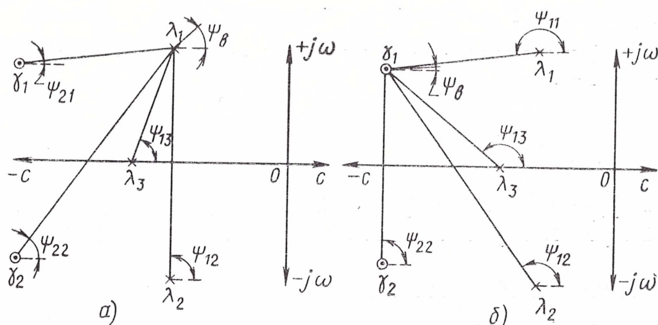


Рис. 7.16. Определение угла:
а — выхода траектории из начальной точки; *б* — входа траектории в предельную точку

Например, у корневого годографа, изображенного на рис. 7.15, *а*, справа от участка действительной оси, ограниченного начальной точкой λ_1 и предельной точкой γ_1, $a = 1$ и $b = 0$. Следовательно, $a - b = 1$ и на этом участке оси располагается действительная ветвь годографа от λ_1 к γ_1. Для участка действительной оси от начальной точки λ_4 до $-\infty$ $a = 4$ и $b = 1$. Следовательно, $a - b = 3$ и на этом участке также располагается действительная ветвь годографа: корень λ_4 уходит в бесконечность. У годографа, изображенного на рис. 7.15, *б*, для участка действительной оси между начальными точками λ_1 и λ_2 параметры $a = 1$, $b = 0$ и $a - b = 1$. На этом участке располагаются действительные ветви годографа, идущие от λ_1 и λ_2. Они встречаются в точке O_1 и из нее выходит пара комплексно-сопряженных ветвей. Справа от участка действительной оси между предельной точкой γ_1 и начальной точкой λ_3 параметры $a = 2$, $b = 1$ и $a - b = 1$. На этом участке оси располагается действительная ветвь годографа от λ_3 к γ_1.

6. Из каждой пары комплексных сопряженных начальных точек λ_i, λ_{i+1} выходит пара комплексно-сопряженных ветвей годографа.

Все комплексно-сопряженные ветви расположены симметрично относительно действительной оси. Они оканчиваются в комплексных сопряженных предельных точках γ_j, γ_{j+1} или уходят в бесконечность.

Угол выхода комплексной ветви из начальной точки и входа в предельную точку определяется равенством

$$\psi_в = \sum \psi - \pi, \tag{7.70}$$

где $\sum\psi$ — сумма фазовых углов векторов, проведенных в рассматриваемую точку из всех остальных основных (начальных и предельных) точек. Фазовым называют угол между положительной действительной полуосью и вектором.

Определение угла выхода траектории из начальной точки λ_1 показано на рис. 7.16, *а*. В данном случае

$$\psi_в = \psi_{12} + \psi_{13} + \psi_{21} + \psi_{22} - 180 = 90 + 70 + 7 + 53 - 180 = 40°.$$

На рис. 7.16, *б* показано определение угла входа траектории в предельную точку γ_1

$$\psi_в = \psi_{11} + \psi_{12} + \psi_{13} + \psi_{22} - 180 = 187 + 127 + 140 + 90 - 180 = 364°.$$

7. Корневому годографу принадлежат те, и только те точки комплексной плоскости, для которых удовлетворяется равенство (уравнение фаз)

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_{1i} - \sum_{j=1}^{m} \psi_{2j} = N\pi, \quad N = \pm 1; \ \pm 3; \ \ldots, \tag{7.71}$$

где ψ_{1i} и ψ_{2j} — фазовые углы векторов, проведенных в рассматриваемую точку соответственно из начальных и предельных точек.

8. Значение свободного параметра A, соответствующее какой-либо точке корневого годографа, определяется формулой параметра

$$A = \frac{a_0 l_{11} l_{12} \ . \ . \ . \ l_{1n}}{b_0 l_{21} l_{22} \ . \ . \ . \ l_{2m}}, \tag{7.72}$$

где l_{1i} и l_{2j} — модули векторов, проведенных в рассматриваемую точку соответственно из начальных и предельных точек.

Изложенные свойства корневого годографа позволяют построить его геометрическим методом. Вследствие симметрии годографа относительно действительной оси, его ветви, расположенные в нижней полуплоскости, иногда не строят.

Возможно и аналитическое построение годографа. Если корень характеристического уравнения (7.65) $s = c + j\omega$, то основное аналитическое уравнение траектории корней

$$\left[B_n(c) - \frac{\omega^2}{2!} B_n''(c) + \cdots\right]\left[B_m'(c) - \frac{\omega^2}{3!} B_m'''(c) + \cdots\right] -$$

$$- \left[B_n'(c) - \frac{\omega^2}{3!} B_n'''(c) + \cdots\right]\left[B_m(c) - \frac{\omega^2}{2!} B_m''(c) + \cdots\right] = 0, \tag{7.73}$$

где

$$B_n'(c) = \left[\frac{dB_n(s)}{ds}\right]_{s=c}; \quad B_m'(c) = \left[\frac{dB_m(s)}{ds}\right]_{s=c}; \ \ldots .$$

Уравнение (7.73) позволяет при выбранном значении c найти ординаты ω, при которых прямая с абсциссой c пересекает траектории корней характеристического уравнения (7.65). Такой смысл имеют, конечно, лишь действительные значения ω (положительные и отрицательные при построении всего годографа и только положительные, если годограф строится лишь в верхней полуплоскости).

Значение свободного параметра A при комплексных сопряженных корнях определяют по формуле

$$-A = \frac{B_n'(c) - \frac{\omega^2}{3!} B_n'''(c) + \cdots}{B_m'(c) - \frac{\omega^2}{3!} B_m'''(c) + \cdots} \tag{7.74}$$

и при действительном корне по формуле

$$-A = \frac{B_n(c)}{B_m(c)}. \quad (7.75)$$

Чаще всего метод корневого годографа используют для исследования влияния на свойства САР передаточного коэффициента разомкнутой цепи, передаточная функция которой

$$W_g(s) = \frac{kR(s)}{Q(s)} = \frac{\tilde{k}\,(s+\gamma_1)(s+\gamma_2)\cdots(s+\gamma_m)}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)\cdots(s+\lambda_n)}, \quad (7.76)$$

где

$$R(s) = b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1}s + 1;$$

$$Q(s) = \alpha_0 s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_n s + 1;$$

$$k = k\frac{b_0}{\alpha_0};$$

γ_i и λ_j — корни полиномов соответственно $R(s)$ и $Q(s)$.

Характеристическое уравнение замкнутой САР

$$(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\ldots(s-\lambda_n) - k(s-\gamma_1)(s-\gamma_2)\ldots(s-\gamma_m) = 0. \quad (7.77)$$

Сопоставляя равенства (7.65) и (7.76), легко заключить, что если в качестве свободного параметра рассматривать $\tilde{k}$, то начальными точками будут полюсы и предельными точками нули передаточной функции разомкнутой САР. В одноконтурной системе и даже в системе с местными обратными связями их значения легко определить по передаточным функциям звеньев.

При построении годографа целесообразно комбинировать геометрический и аналитический методы. Построение следует выполнять в следующем порядке:

1) на комплексную плоскость $s = c + j\omega$ нанести начальные λ_i и предельные γ_j точки;

2) нанести центр асимптот $O_а$, пользуясь формулой (7.66), и провести $n-m$ асимптот, углы наклона которых определяют по формуле (7.67);

3) пользуясь условием (7.68), выделить отрезки действительной оси, на которых располагаются траектории корней;

4) нанести точки O_i отрыва траекторий от действительной оси и их направления, определив абсциссы этих точек по уравнению (7.69);

5) по уравнению (7.70) определить направления выхода траекторий из комплексных начальных точек и входа их в предельные точки, нанести эти направления на чертеж;

6) пользуясь уравнением фаз (7.71) или основным аналитическим уравнением (7.73), нанести несколько точек для уточнения положения комплексных траекторий;

7) определить значение свободного параметра в нужных точках, пользуясь уравнениями (7.72) или (7.74) и (7.75).

Корневой годограф позволяет исследовать влияние свободного параметра на динамические свойства замкнутой системы: на устойчивость и качество регулирования.

Система устойчива при тех значениях свободного параметра, которым соответствует расположение корневого годографа в левой полуплоскости. Переход хотя бы одной ветви годографа в правую полуплоскость свидетельствует о неустойчивости. Границу устойчивости определяют из условия попадания действительного корня в начало осей координат (апериодическая граница устойчивости) или пары комплексных сопряженных корней на мнимую ось (колебательная граница устойчивости).

Основное аналитическое уравнение траектории корней (7.73) при $c = 0$ превращается в уравнение критических частот $\omega_к$. Его действительные корни — это значения ординат, при которых комплексно-сопряженные траектории пересекают мнимую ось. Уравнение (7.74) при $c = 0$ и $\omega = \omega_к$ определяет значение свободного параметра, соответствующего границе устойчивости.

Корневой годограф позволяет точно определить показатели качества переходной характеристики для каждого значения свободного параметра.

Если передаточная функция разомкнутой системы

$$W = \frac{kR(s)}{Q(s)},$$

то изображение переходной характеристики

$$H(s) = \frac{kR(s)}{\mathscr{D}(s)} \frac{1}{s},$$

где

$$\mathscr{D}(s) = Q(s) + kR(s).$$

По формуле (П.1.8) разложения Хевисайда

$$h(t) = \frac{kR(0)}{\mathscr{D}(0)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{kR(s_i)}{s_i \mathscr{D}'(s_i)} \mathrm{e}^{s_i t}, \tag{7.78}$$

где s_i — корни характеристического уравнения, которые при выбранном значении свободного параметра определяют непосредственно по корневому годографу.

Сумму в равенстве (7.78) удобнее вычислять, пользуясь значениями длин и углов векторов, взятыми из чертежа корневого годографа.

Если свободным параметром является $\tilde{k} = \frac{kb_0}{a_0}$, то коэффициент i-го члена суммы выражения (7.78)

$$\frac{\tilde{k}(s_i+\gamma_1)(s_i+\gamma_2)\ldots(s_i+\gamma_m)}{s_i(s_i+s_1)(s_i+s_2)\ldots(s_i+s_{i-1})(s_i+s_{i+1})\ldots(s_i+s_n)} =$$

$$= \tilde{k}A_i e^{j\varphi_i}. \qquad (7.79)$$

Следовательно,

$$A_i = \frac{l_{21}l_{22}\ldots l_{2m}}{\tilde{l}_i\tilde{l}_{11}\tilde{l}_{12}\ldots\tilde{l}_{1,\,i-1},\,\tilde{l}_{1,\,i-2}\ldots\tilde{l}_{1n}} \qquad (7.80)$$

и

$$\varphi_i = \psi_{21} + \psi_{22} + \cdots + \psi_{2m} - \tilde{\psi}_i - \tilde{\psi}_{11} - \tilde{\psi}_{12} - \cdots - \tilde{\psi}_{1,\,i-1} -$$

$$- \tilde{\psi}_{1,\,i+1} - \cdots - \tilde{\psi}_{1n}. \qquad (7.81)$$

Здесь $\tilde{l}_i$ и $\tilde{\psi}_i$ — длина и фазовый угол вектора, проведенного из начала осей координат к корню s_i; $l_{1\nu}$ и $\tilde{\psi}_{1\nu}$ — длина и фазовый угол вектора, проведенного из корня s_ν к корню s_i; l_{2j} и ψ_{2j} — длина и фазовый угол вектора, проведенного из предельной точки γ_j к корню s_i.

Кроме того, корневой годограф, что очень важно, наглядно показывает, как изменяется взаимное расположение нулей и полюсов передаточной функции замкнутой системы при изменении свободного параметра. Следовательно, на этом основании, используя материал п.7.7, можно заключить о влиянии свободного параметра на показатели качества переходной характеристики.

Пример 7.6. Передаточная функция разомкнутой САР

$$W = \frac{k(\tau s+1)}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)},$$

где $k = 100$ с$^{-1}$; $T_1 = 0{,}1$; $T_2 = 0{,}02$ с.

Выяснить влияние постоянной времени τ форсирующего звена на динамические свойства системы.

Для решения этой задачи построим корневой годограф, считая свободным параметром постоянную времени τ.

Составим характеристическое уравнение замкнутой САР и приведем его к виду (7.65):

$$s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + k(\tau s + 1) = 0;$$

$$[T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + s + k] + \tau k s = 0.$$

После подстановки числовых значений известных параметров и деления на k получим

$$B_n(s) + \tau B_m(s) = 0,$$

где $B_n(s) = 0{,}00002\,s^3 + 0{,}0012 s^2 + 0{,}01 s + 1$; $B_m(s) = s$.

Начальными точками траекторий являются корни полинома $B_n(s)$, которые определим одним из методов, изложенных в приложении 2:

$$\lambda_{1,2} = 2{,}5 \pm j29{,}9;\ \lambda_3 = -64{,}3.$$

Предельная точка, корень полинома $B_m(s)$, есть $\gamma_1 = 0$.

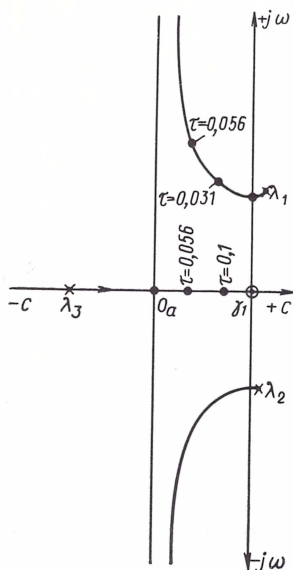


Рис. 7.17. Корневой годограф к примеру 7.6

Нанеся основные точки на чертеж (рис. 7.17), делаем вывод, что при $\tau = 0$ САР неустойчива, так как в этом случае пара комплексных сопряженных корней характеристического уравнения расположена в правой полуплоскости.

По формуле (7.66) определим абсциссу центра асимптот

$$c_a = -\frac{\dfrac{0{,}0012}{0{,}00002} - \dfrac{0}{1}}{3-1} = -30$$

и по формуле (7.67) их направления

$$\psi_a = \frac{180\,(\pm 1)}{3-1} = \pm 90^\circ,$$

т. е. асимптотами являются прямые, выходящие из точки O_a и параллельные мнимой оси.

Для участка действительной оси от предельной точки γ_1 до начальной точки λ_3 выполняется условие (7.68): $2 - 1 = 1$, т. е. с увеличением τ траектория из начальной точки λ_3 пойдет по действительной оси в предельную точку γ_1.

Комплексные сопряженные траектории из начальных точек λ_1 и λ_2 по мере увеличения τ будут приближаться к асимптотам. Чтобы выяснить расположение этих траекторий, можно воспользоваться формулой (7.73). Предварительно следует вычислить производные полиномов $B_m(s)$ и $B_n(s)$ по s:

$$B'_m(s) = 1; \quad B''_m(s) = 0;$$

$$B'_n(s) = 0{,}00006s^2 + 0{,}0024s + 0{,}01;$$

$$B''_n(s) = 0{,}00012s + 0{,}0024;$$

$$B'''_n(s) = 0{,}00012;$$

$$B''''_n(s) = 0.$$

По формуле (7.73) при $c = 0$ определим критическую частоту $\omega_к$:

$$\left[B_n(0) - \frac{\omega_к^2}{2} B''_n(0)\right] B'_m(0) = \left[1 - \frac{\omega_к^2}{2}\,0{,}0024\right] 1 = 0;$$

$$\omega_к^2 = \frac{1}{0{,}0012}; \quad \omega_к = \pm 28{,}9.$$

Итак, комплексные сопряженные траектории пересекают мнимую ось при ординатах $\pm 28{,}9$. Значение τ, соответствующее этим точкам, определим по формуле (7.74) при $c = 0$ и $\omega = 28{,}9$:

$$-\tau = \frac{0{,}01 - \dfrac{28{,}9^2}{6}\,0{,}00012}{1} = -0{,}0067.$$

Следовательно, рассматриваемая система устойчива при $\tau > 0{,}0067$.

Чтобы определить расположение комплексных сопряженных траекторий, вычислим по формуле (7.73) ординаты нескольких точек, задаваясь значениями их абсцисс.

При $c = -10$

$$\left\{0{,}00002(-10)^3 + 0{,}0012(-10)^2 + 0{,}01(-10) + 1 - \frac{\omega^2}{2}\left[0{,}00012(-10) + 0{,}0024\right]\right\} 1 - \left[0{,}00006(-10)^2 + 0{,}0024(-10) + 0{,}01 - \frac{\omega^2}{2\cdot 3}0{,}00012\right](-10) = 0.$$

Из этого равенства получим $0{,}0008\omega^2 = 0{,}92$; $\omega = \pm 33{,}9$.

Аналогично вычислим, что

при $c = -15$ $\omega = \pm 38{,}0$;

при $c = -20$ $\omega = \pm 45{,}8$;

при $c = -24$ $\omega = \pm 84$.

Полученные точки достаточно хорошо определяют расположение комплексных сопряженных траекторий.

Вычислим по формуле (7.74) значения τ для двух точек комплексных сопряженных траекторий.

При $c = -10$ и $\omega = 33{,}9$

$$-\tau = \frac{0{,}00006(-10)^2 + 0{,}0024(-10) + 0{,}01 - \frac{33{,}9^2}{2\cdot 3}0{,}00012}{1} = -0{,}031;$$

при $c = -20$ и $\omega = 45{,}8$ имеем $-\tau = -0{,}056$.

По формуле (7.75) вычислим значения τ для двух точек траектории, расположенной на действительной оси.

При $c = -10$

$$-\tau = \frac{0{,}00002(-10)^3 + 0{,}0012(-10)^2 + 0{,}01(-10) + 1}{-10} = -0{,}1;$$

при $c = -20$ имеем $-\tau = -0{,}056$.

Таким образом, для устойчивости системы постоянная времени τ должна быть больше 0,0067. При $\tau < 0{,}056$ доминирующими являются комплексные сопряженные корни характеристического уравнения и колебательность μ не слишком велика. Так, при $\tau = 0{,}031$ $\mu = \frac{33{,}9}{10} = 3{,}39$ и перерегулирование $\sigma = e^{\frac{-\pi}{3{,}39}}100 = 39{,}5\%$; при $\tau = 0{,}056$ $\mu = \frac{45{,}8}{20} = 2{,}29$ и $\sigma = e^{-\frac{\pi}{2{,}29}}100 = 25{,}4\%$. Дальнейшее увеличение τ ведет к резкому увеличению колебательности μ.

Глава 8

МЕТОДЫ И СРЕДСТВА СТАБИЛИЗАЦИИ И ПОВЫШЕНИЯ КАЧЕСТВА РЕГУЛИРОВАНИЯ

Проблема создания линейных непрерывных САР с хорошими или хотя бы с приемлемыми динамическими свойствами является многосторонней и весьма сложной. В ней прежде всего можно выделить следующие частные задачи: обеспечение устойчивости (стабилизация); повышение запаса устойчивости (демпфирование); повышение точности в установившихся режимах (уменьшение или устранение статической ошибки воспроизведения задающего воздействия и ошибки от возмущения); улучшение переходных процессов (увеличение быстродействия, максимальное уменьшение динамических ошибок воспроизведения задающего воздействия и ошибки от возмущения).

Каждую из этих задач решают различными способами. Иногда две или несколько частных задач могут быть решены совместно, в других случаях они оказываются противоречивыми. В зависимости от назначения системы одни задачи становятся основными, другие второстепенными.

Простой и вместе с тем действенный способ обеспечения устойчивости и высокого качества регулирования — это соответствующий выбор основных элементов системы или изменение в нужном направлении их динамических свойств местными обратными связями. Выбор типа и конструкции исполнительного элемента и усилителя может привести к тому, что их динамические свойства (прежде всего инерционность) не будут отрицательно влиять на свойства системы в целом.

Местные обратные связи весьма существенно изменяют свойства тех элементов, которые они охватывают (см. табл. 2.4): может быть обеспечена устойчивость неустойчивого или нейтрального элемента, уменьшена инерционность, обеспечены интегрирующие или дифференцирующие свойства. Причем местные обратные связи могут быть созданы не только в исполнительном элементе и усилителе, но и в регулируемом объекте.

Другой путь — создание дополнительных воздействий на регулятор или объект регулирования. Если это воздействие осуще-

Рис. 8.1. Структурные схемы каскадных систем регулирования

ствляется извне, то получается комбинированная система. Такие системы имеют весьма ценные свойства [78].

Дополнительные воздействия могут быть созданы и внутри замкнутого контура регулирования. Это имеет место в каскадных системах регулирования [97], структурные схемы которых показаны на рис. 8.1. Дополнительное воздействие создается координатой y_1 объекта регулирования, которая реагирует на возмущение f быстрее, чем регулируемая координата y. Регулятор $W_{р2}$ (рис. 8.1, *а*) под воздействием координаты y_1 устраняет в основном влияние f на y. Задающее воздействие для регулятора $W_{р2}$ создается регулятором $W_{р1}$ под влиянием рассогласования $x = g - y$. Во втором варианте каскадной системы регулирования (рис. 8.1, *б*) дифференциатор $W_{п}$ под воздействием координаты y_1 создает сигнал только при изменении возмущения f. Этот сигнал поступает на вход регулятора $W_{р}$ вместе с рассогласованием x и форсирует переходные процессы в системе. Использование каскадных систем регулирования наиболее эффективно при сложных объектах с большой инерционностью.

В некоторых объектах можно и целесообразно создавать дополнительное регулирующее воздействие [83]. Это воздействие z_1 прикладывается ближе к регулируемой величине y (рис. 8.2) и форсирует переходные процессы.

Для обеспечения высокой точности используют нониусные следящие системы [110]. Двухступенчатая нониусная САР (рис. 8.3) состоит из двух систем. Первая система W_1 создает основную составляющую y_1 регулируемой величины, приблизи-

Рис. 8.2. Структурная схема САР с вспомогательным регулирующим воздействием

Рис. 8.3. Структурная схема двухступенчатой нониусной САР

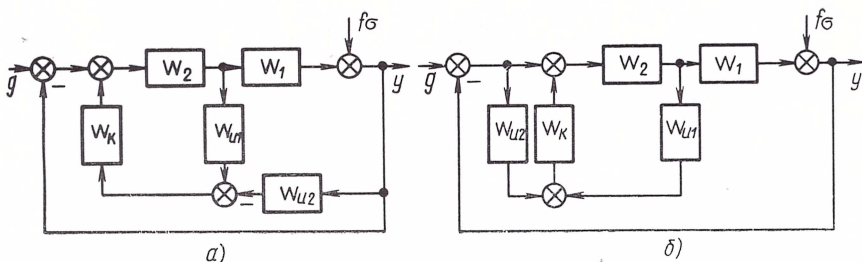


Рис. 8.4. Структурные схемы САР с обратной компенсирующей связью при косвенном измерении:

а — возмущения; *б* — задающего воздействия и возмущения

тельно соответствующую задающему воздействию g. Вторая система W_2 уточняет значение y — создает составляющую y_2, соответствующую рассогласованию $g - y$.

Для уменьшения влияния возмущений находят применение компаундирующие связи [64]. В системах регулирования по отклонению могут быть созданы дополнительные связи [78] для косвенного измерения и компенсации возмущений (рис. 8.4, *а*) и для компенсации ошибки, если осуществляется косвенное измерение задающего воздействия и возмущения (рис. 8.4, *б*). Местные обратные связи используют также для обеспечения устойчивости при весьма большом значении передаточного коэффициента разомкнутой САР [75].

С помощью фильтра и местной обратной связи может быть обеспечена различная реакция системы на задающее воздействие и возмущение [57] для того, чтобы подавлять как высокочастотные помехи, поступающие с задающим воздействием, так и возмущение, приложенное к объекту. Эту задачу можно решить и в том случае, когда задающее воздействие недоступно для измерения. Подобные результаты дает схема с условной обратной связью [57].

Дополнительные связи позволяют [57] выделять истинное значение задающего воздействия при наличии двух источников информации, а также компенсировать инерционность сравнивающего элемента.

Весьма широко используют такие методы повышения статической точности регулирования, как увеличение передаточного коэффициента разомкнутой САР и обеспечение астатизма. Желаемое качество переходных процессов достигается чаще всего с помощью корректирующих устройств.

В данной главе рассмотрены основные из перечисленных методов, а также наиболее распространенные технические средства для создания корректирующих устройств и дополнительных связей.

8.1. ПОВЫШЕНИЕ СТАТИЧЕСКОЙ ТОЧНОСТИ

Ошибка в установившихся режимах САР слагается из ошибки, создаваемой несовершенством (прежде всего нечувствительностью) отдельных элементов регулятора, ошибки воспроизведения задающего воздействия и ошибки, создаваемой возмущениями. Уменьшение первой составляющей достигается использованием более совершенных элементов и сопровождается, как правило, увеличением сложности и стоимости регулятора. Для уменьшения остальных двух составляющих используют следующие основные пути.

Увеличение передаточного коэффициента k разомкнутой САР является универсальным и эффективным способом уменьшения ошибки во всех установившихся режимах. Причем уменьшается как ошибка слежения, так и ошибка от возмущения.

Увеличения k достигают чаще всего введением усилителей. Иногда оказывается достаточным увеличения передаточных коэффициентов отдельных элементов, например исполнительного элемента или элемента сравнения.

В большинстве случаев увеличение k ведет к уменьшению запаса устойчивости и, для того чтобы система не потеряла устойчивости, значение k не должно превосходить некоторого критического значения $k_{гр}$ (см. п. 6.10). Однако приближение k к этому граничному значению обычно невозможно из-за резкого ухудшения показателей качества переходной характеристики. В этом проявляется противоречие между требованием к точности и требованием к устойчивости системы регулирования по отклонению. Это противоречие может быть устранено, если одновременно с увеличением k до значения, обеспечивающего необходимую точность, какими-то другими средствами обеспечить необходимый запас устойчивости. Такими средствами могут быть корректирующие устройства, рассматриваемые в п. 8.3.

Как уже отмечали в п. 7.1, у САР со структурной схемой, показанной на рис. 3.1, и передаточными функциями ее участков

$$W_о = 1, \quad W_1 = \frac{k_1 R_1}{Q_1} \text{ и } W_2 = \frac{k_2 R_2}{Q_2}, \tag{8.1}$$

где k_1, k_2 — передаточные коэффициенты; R_1, Q_1, R_2, Q_2 — полиномы от s со свободным членом, равным единице, установившееся значение ошибки при постоянном задающем g_0 и возмущающем f_0 воздействиях

$$x_у = \frac{1}{1+k} g_0 + \frac{k_1}{1+k} f_0 = S g_0 + k_1 S f_0, \tag{8.2}$$

где $k = k_1 k_2$ — передаточный коэффициент разомкнутой системы; $S = \frac{1}{1+k}$ — коэффициент статизма.

Следовательно, в рассматриваемой САР постоянные задающее воздействие и возмущение создают статическую ошибку, а систему

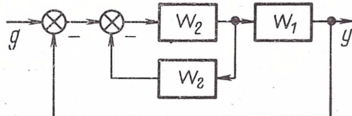


Рис. 8.5. Структурная схема САР, допускающая весьма большие значения k

называют статической. Понятно, что чем больше k, тем меньше коэффициент статизма S и тем меньше установившаяся ошибка.

Выше было сказано, что с увеличением k ухудшаются динамические свойства системы и неограниченное увеличение k невозможно. Поэтому представляют интерес такие структуры САР, при которых значение k можно повышать до весьма больших значений. Отличительной особенностью таких структур [75] является наличие в прямой цепи местной гибкой обратной связи (рис. 8.5).

Пусть передаточные функции элементов этой системы имеют следующий вид:

$$W_1 = \frac{k_1}{Q_1}; \quad W_2 = \frac{k_2}{Q_2} \text{ и } W_г = \frac{sR_г}{Q_г}, \tag{8.3}$$

где k_1 и k_2 — передаточные коэффициенты; Q_1, Q_2, $Q_г$ и $R_г$ — полиномы от s, у которых коэффициент младшего члена равен единице.

Передаточный коэффициент k_2 участка прямой цепи [75], охваченного гибкой обратной связью, может иметь весьма большие значения, если:

а) вырожденное характеристическое уравнение

$$sR_гQ_1 + k_1Q_г = A_0s^\nu + A_1s^{\nu-1} + \cdots + A_\nu = 0 \tag{8.4}$$

удовлетворяет условиям устойчивости;

б) разность между степенью n полинома

$$Q_1Q_2Q_г = B_0s^n + B_1s^{n-1} + \cdots + B_n \tag{8.5}$$

и степенью ν вырожденного характеристического уравнения (8.4) не больше двух:

$$n - \nu \leqslant 2; \tag{8.6}$$

в) при $n - \nu = 1$ удовлетворяется неравенство

$$\frac{A_0}{B_0} > 0, \tag{8.7}$$

а при $n - \nu = 2$ неравенство

$$\frac{B_1}{B_0} - \frac{A_1}{A_0} > 0. \tag{8.8}$$

Очевидно, при весьма большом передаточном коэффициенте k_2 становится весьма большим и передаточный коэффициент k разомкнутой системы.

По выражениям (8.4) и (8.5) легко заключить, что для удовлетворения неравенства (8.6) не следует иметь полином $Q_г$ более высокой степени, чем полином $sR_г$. Однако передаточная функция

$W_г$ может быть физически реализована только при степени $Q_г$ не ниже степени $sR_г$. Поэтому целесообразно иметь равные степени полиномов $sR_г$ и $Q_г$. Тогда полином Q_2 может быть только первой или второй степени, т. е. в рассматриваемой системе гибкой обратной связью может быть охвачено безынерционное, апериодическое или колебательное звено. Коэффициент усиления может быть очень большим и в системах, где два апериодических или интегрирующих звена или апериодическое и интегрирующее звенья охвачены гибкой обратной связью.

Передаточная функция W_1 в структурной схеме, приведенной на рис. 8.5, представляет собой произведение передаточных функций всех участков разомкнутой цепи системы, не охваченных гибкой обратной связью $W_г$. В функцию W_1 входит и передаточная функция $W_о$ главной обратной связи (если это не единичная обратная связь). Участок системы, не охваченный гибкой обратной связью, может иметь и звенья чистого запаздывания.

Существуют также варианты структур с несколькими гибкими обратными связями [75].

Следует заметить, что рассмотренная возможность увеличения k не находит широкого применения, так как неучтенные малые параметры могут заметно изменить свойства системы, вплоть до ее неустойчивости. Кроме того, при большом значении k_2 ухудшаются показатели качества переходной характеристики [39].

Пример 8.1. В САР со структурной схемой, показанной на рис. 8.5,

$$W_1 = \frac{k_1}{a_0 s^2 + a_1 s + 1}; \quad W_2 = k_2; \quad W_г = \frac{\tau s}{\tau s + 1},$$

где $k_1 = 2$; $a_0 = 0{,}015$ с^2 и $a_1 = 0{,}1$ с.

Выбрать значение τ, при котором передаточный коэффициент k_2 может быть весьма большим.

В рассматриваемой САР $Q_2 = 1$ и, следовательно, $n - \nu = 0$. Поэтому достаточно рассматривать вырожденное характеристическое уравнение (8.4):

$$\tau s (a_0 s^2 + a_1 s + 1) + k_1 (\tau s + 1) = 0;$$

$$a_0 \tau s^3 + a_1 \tau s^2 + \tau (1 + k_1) s + k_1 = 0.$$

Условие устойчивости этого характеристического уравнения по критерию Гурвица:

$$a_1 \tau\tau (1 + k_1) > a_0 \tau k_1;$$

$$a_1 \tau (1 + k_1) > a_0 k_1.$$

Из полученного неравенства определим необходимое значение

$$\tau > \frac{a_0 k_1}{a_1 (1 + k_1)} = \frac{0{,}015 \cdot 2}{0{,}1 (1 + 2)} = 0{,}1.$$

Итак, при $\tau > 0{,}1$ с в рассматриваемой САР передаточный коэффициент k_2 может быть весьма большим.

Пример 8.2. В САР со структурной схемой, представленной на рис. 8.5,

$$W_1 = \frac{k_1}{a_0 s^2 + a_1 s + 1}; \quad W_2 = \frac{k_2}{c_0 s^2 + c_1 s + 1}; \quad W_г = \frac{\tau s}{T s + 1},$$

где $k_1 = 4$; $a_0 = 0{,}02$ с^2; $a_1 = 0{,}5$ с; $c_0 = 0{,}005$ с^2; $c_1 = 0{,}02$ с.

Выбрать значения параметров τ и T гибкой обратной связи, при которых передаточный коэффициент k_2 может быть весьма большим.

Составим вырожденное характеристическое уравнение (8.4):

$$\tau s (a_0 s^2 + a_1 s + 1) + k_1 (Ts + 1) = 0;$$

$$a_0 \tau s^3 + a_1 \tau s^2 + (\tau + k_1 T) s + k_1 = 0.$$

Условие устойчивости этого уравнения по критерию Гурвица:

$$a_1 \tau (\tau + k_1 T) > a_0 \tau k_1;$$

$$a_1 (\tau + k_1 T) > a_0 k_1.$$

Из полученного неравенства определим, что параметры τ и T должны удовлетворять условию

$$\tau + k_1 T > \frac{a_0 k_1}{a_1};$$

$$\tau + 4T > 0{,}16.$$

Составим полином (8.5):

$$(a_0 s^2 + a_1 s + 1)(c_0 s^2 + c_1 s + 1)(Ts + 1) =$$

$$= 0{,}0001 Ts^5 + (0{,}0029T + 0{,}0001) s^4 + (0{,}035T + 0{,}0029) s^3 +$$

$$+ (0{,}52T + 0{,}035) s^2 + (T + 0{,}52) s + 1.$$

В рассматриваемом случае $n - \nu = 5 - 3 = 2$. Следовательно, САР будет иметь требуемое свойство при удовлетворении еще и условия (8.8). Выполним это неравенство

$$\frac{0{,}0029T + 0{,}0001}{0{,}0001T} - \frac{0{,}5\tau}{0{,}02\tau} > 0;$$

$$\frac{29T + 1}{T} - 25 > 0;$$

$$29T + 1 - 25T > 0;$$

$$4T + 1 > 0.$$

Полученное неравенство удовлетворяется при всех положительных значениях T. Поэтому достаточно выбрать τ и T так, чтобы удовлетворялось ранее полученное неравенство

$$\tau + 4T > 0{,}16.$$

Обеспечение астатизма есть весьма широко используемый метод улучшения статических свойств системы (см. пп. 7.1 и 7.2). Чаще всего астатизм достигается включением интегрирующих звеньев в прямую цепь системы. К сожалению, это неблагоприятно может сказаться на ее устойчивости. При двух интегрирующих звеньях система уже может оказаться структурно неустойчивой (см. п.6.11). Поэтому одновременно с обеспечением астатизма могут оказаться необходимыми мероприятия для обеспечения достаточного запаса устойчивости (см. п.8.2).

Пример 8.3. Выяснить, как повлияет на устойчивость введение интегрирующего звена, если передаточная функция разомкнутой системы

$$W = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)},$$

где k=20 и а) $T_1 = 0{,}5$, $T_2 = 0{,}02$, T_3=0,01; б) $T_1 = 0{,}05$, $T_2 = 0{,}002$, $T_3 = 0{,}001$ с.

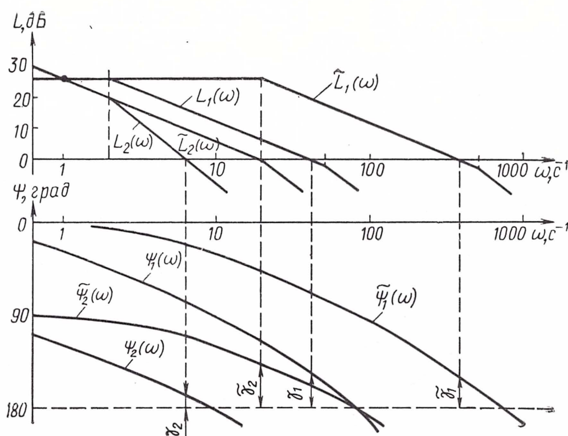


Рис. 8.6. Логарифмические частотные характеристики к примеру 8.3: $T_1 = 0,5$; $T_2 = 0,02$ и $T_3 = 0,01$ с

На рис. 8.6 построены логарифмические частотные характеристики $L_1(\omega)$ и $\psi_1(\omega)$ для случая а для схемы без интегрирующего звена и $L_2(\omega)$ и $\psi_2(\omega)$ для схемы с интегрирующим звеном. При введении интегрирующего звена запас устойчивости по фазе уменьшается с $\gamma_1 \approx 33°$ до $\gamma_2 \approx 12°$; уменьшается и запас устойчивости по модулю.

Логарифмические частотные характеристики $\tilde{L}_1(\omega)$ и $\tilde{\psi}_1(\omega)$ построены для случая б для схемы без интегрирующего звена и $\tilde{L}_2(\omega)$ и $\tilde{\psi}_2(\omega)$ для схемы с интегрирующим звеном. Интегрирующее звено увеличивает запас устойчивости по фазе от $\tilde{\gamma}_1 \approx 30°$ до $\tilde{\gamma}_2 \approx 43°$. Увеличивается и запас устойчивости по модулю.

Простейший и широко используемый интегрирующий элемент — это электродвигатель постоянного тока с независимым возбуждением, поворачивающий движок потенциометра. Напряжение u_2, снимаемое с потенциометра, пропорционально интегралу по времени от напряжения u_1, приложенного к обмотке якоря электродвигателя. Используют также механические, гидравлические, пневматические, химические и иные интегрирующие элементы.

Другой путь достижения астатизма — это включение в прямую цепь САР изодромного устройства с передаточной функцией $W_и = \frac{k_и(\tau_и s + 1)}{s}$. При соответствующем выборе постоянной времени $\tau_и$ включение изодромного устройства не оказывает или почти не оказывает влияния на запас устойчивости системы.

Например, $L_1(\omega)$ и $\psi_1(\omega)$ (рис. 8.7) есть логарифмические частотные характеристики разомкнутой САР с передаточной функцией

$$W = \frac{20}{(0,125s + 1)(0,05s + 1)(0,008s + 1)},$$

а $L_2(\omega)$ и $\psi_2(\omega)$ — характеристики той же системы при включении в ее прямую цепь изодромного устройства с передаточной функцией $W_и = \frac{0,8s + 1}{s}$. Изод-

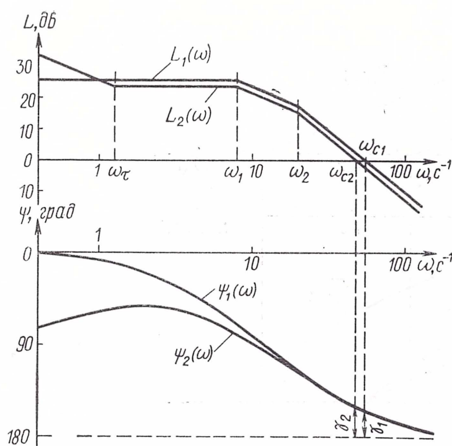


Рис. 8.7. Изменение логарифмических частотных характеристик при включении изодромного устройства

ромное устройство обеспечило астатизм и заметно повлияло лишь на низкочастотную часть характеристик. Запас устойчивости при этом практически не изменился.

С помощью изодромных устройств, включая их последовательно, можно обеспечивать астатизм второго и третьего порядков. Выбор постоянных времени изодромов должен осуществляться так, чтобы одновременно с астатизмом обеспечивались и необходимые динамические свойства системы. Изодромные устройства используют различной физической природы. Такое устройство можно получить параллельным включением интегрирующего элемента и усилителя.

В некоторых случаях необходимо, чтобы установившаяся ошибка не зависела от одной из производных внешнего воздействия. Это достигается [18] регулированием по производной, т. е. включением в прямую цепь САР форсирующего звена с передаточной функцией

$$W_ф = \tau_ф s + 1. \qquad (8.9)$$

Пусть передаточная функция разомкнутой САР

$$W = \frac{k}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

и в прямую цепь включен форсирующий элемент с передаточной функцией $W_ф = \tau_ф s + 1$. Тогда первые три коэффициента ошибки имеют следующие значения:

$$C_0 = 0; \quad C_1 = \frac{1}{k}; \quad C_2 = \frac{(T_1 + T_2 - \tau_ф)\,k - 1}{k^2}.$$

При $\tau_ф = T_1 + T_2 - \frac{1}{k}$ $C_2 = 0$ установившаяся ошибка становится не зависящей от постоянного ускорения задающего воздействия. Требование к значению $\tau_ф$ не противоречит условию устойчивости, выражаемому неравенством $\tau_ф > \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} - \frac{1}{k}$.

Последовательным включением двух форсирующих элементов можно обратить в нуль два коэффициента ошибки, т. е. при регулировании по первой и второй производным может быть достигнута независимость установившейся ошибки от двух производных внешнего воздействия.

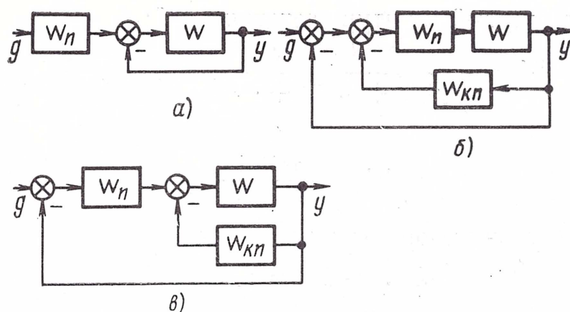


Рис. 8.8. Структурные схемы САР с коррекцией задающего воздействия

Коррекция задающего воздействия [57] позволяет придать системе астатические свойства или повысить порядок астатизма относительно этого воздействия. Коррекцию осуществляют по схеме, приведенной на рис. 8.8., *а*, т. е. на вход системы включают преобразовательный элемент с передаточной функцией $W_п$.

Изображение X ошибки (рассогласования) $x = g - y$ имеет в данном случае следующее значение:

$$X = G - Y = G - \frac{W}{1+W} W_п G = \frac{1 + W(1 - W_п)}{1+W} G. \qquad (8.10)$$

Следовательно, передаточная функция для ошибки слежения

$$W_x = \frac{1 + W(1 - W_п)}{1+W}. \qquad (8.11)$$

Предположим, что замкнутый контур статический:

$$W = \frac{k}{c_0 s^n + c_1 s^{n-1} + \cdots + c_{n-1} s + 1} \qquad (8.12)$$

и

$$W_п = k_п = \frac{k+1}{k}. \qquad (8.13)$$

Тогда

$$W_x = \frac{(c_0 s^{n-1} + c_1 s^{n-2} + \cdots + c_{n-1}) s}{c_0 s^n + c_1 s^{n-1} + \cdots + c_{n-1} s + (1+k)}, \qquad (8.14)$$

т. е. соответствующим выбором безынерционного преобразовательного элемента достигают астатизм системы при статическом замкнутом контуре. Такой прием находит широкое применение. Однако если передаточный коэффициент из-за ошибки при расчете или из-за неточности выполнения усилителя отклоняется от расчетного значения k на Δk, то появляется установившаяся ошибка [18]

$$x_у = \frac{\Delta k}{k^2} g_0. \qquad (8.15)$$

Пусть замкнутый контур астатический:

$$W = \frac{k}{(c_0 s^{n-1} + c_1 s^{n-2} + \cdots + c_{n-2} s + 1)\, s} \qquad (8.16)$$

и

$$W_{\text{п}} = \frac{\tau s + 1}{Ts + 1}, \qquad (8.17)$$

где $\tau > T$, и удовлетворяется равенство

$$k(\tau - T) = 1. \qquad (8.18)$$

Тогда

$$W_x = \frac{(c_0 s^{n-2} + c_1 s^{n-3} + \cdots + c_{n-2})\, s^2}{c_0 s^n + c_1 s^{n-1} + \cdots + c_{n-2} s^2 + s + k}. \qquad (8.19)$$

Значит, при использовании в качестве преобразовательного элемента реального форсирующего звена первого порядка астатизм увеличивается на один порядок. Форсирующее звено второго порядка увеличит астатизм на два порядка и т. д. [57].

Изложенный метод достижения астатизма или повышения его порядка имеет несомненные преимущества вследствие своей простоты и отсутствия в замкнутом контуре интегрирующих звеньев, которые затрудняют обеспечение устойчивости. Однако применение метода ограничивается теми случаями, когда задающее воздействие $g = g(t)$ имеет малый уровень помех. Кроме того, отклонение параметров от расчетных значений приводит к появлению статических ошибок.

Существуют САР, в которых задающее воздействие отсутствует, а имеется лишь ошибка x. В этом случае преобразовательный элемент $W_{\text{п}}$ может быть включен в цепь сигнала ошибки (рис. 8.8, *б*). Для того чтобы схема была эквивалентна ранее рассмотренной (рис. 8.8, *а*), включают компенсирующую отрицательную обратную связь с передаточной функцией

$$W_{\text{кп}} = \frac{1 - W_{\text{п}}}{W_{\text{п}}}. \qquad (8.20)$$

Компенсирующая обратная связь может быть включена и по схеме, изображенной на рис. 8,8, *в* [110]. Тогда ее передаточная функция

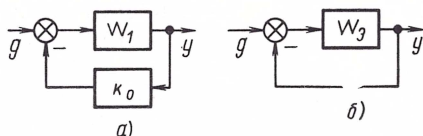
$$W_{\text{кп}} = 1 - W_{\text{п}}. \qquad (8.21)$$

Неединичная обратная связь (*рис. 8.9*, *а*) также позволяет обеспечить астатизм САР относительно задающего воздействия [18].

Этой схеме эквивалентна схема (рис. 8.9, *б*) с единичной обратной связью и прямой цепью

$$W_{\text{э}} = \frac{W_1}{1 - (1 - k_0)\, W_1}. \qquad (8.22)$$

Рис. 8.9. Структурная схема САР:
а — с неединичной обратной связью; *б* — эквивалентная



Пусть

$$W_1 = \frac{k_1 (b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + 1)}{c_0 s^n + c_1 s^{n-1} + \cdots + c_{n-1} s + 1}$$

и

$$k_о = 1 - \frac{1}{k_1}.$$

Тогда

$$W_э = \frac{k_1 (b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + 1)}{c_0 s^n + \cdots + (c_{n-2} - b_{m-2}) s^2 + (c_{n-1} - b_{m-1}) s}. \qquad (8.23)$$

Следовательно, в системе без интегрирующих звеньев соответствующим выбором коэффициента основной обратной связи может быть обеспечен астатизм относительно задающего воздействия.

Неединичная обратная связь позволяет также повышать порядок астатизма [18]. Нестабильность передаточного коэффициента k_1 так же, как и в ранее рассмотренном случае, послужит причиной появления статической ошибки слежения.

Общие условия неискаженного воспроизведения детерминированного задающего воздействия в установившемся режиме САР со структурной схемой, изображенной на рис. 3.1, заключается в том [64], что среди полюсов передаточной функции $W = W_1 W_2$ разомкнутой системы должны быть все полюсы изображения $L\{g(t)\}$ задающего воздействия.

Например, если $g = at + b$, то

$$L\{at + b\} = \frac{a}{s^2} + \frac{b}{s} = \frac{a + bs}{s^2},$$

и для отсутствия установившейся ошибки передаточная функция W должна иметь нулевой полюс второй кратности, т. е. система должна быть астатической второго порядка.

Если $g = a \sin \omega_0 t$, то

$$L\{a \sin \omega_0 t\} = \frac{a\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}.$$

Для отсутствия установившейся ошибки передаточная функция W должна содержать в качестве множителя передаточную функцию консервативного звена с постоянной времени $T = \frac{1}{\omega_0}$.

Аналогично условие отсутствия установившейся ошибки от возмущения f (см. рис. 3.1) заключается в том, что среди полюсов передаточной функции W_2 должны быть все полюсы изображения $L\{f(t)\}$ возмущения.

8.2. ОБЕСПЕЧЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ И УВЕЛИЧЕНИЕ ЗАПАСА УСТОЙЧИВОСТИ

Способы обеспечения устойчивости замкнутых САР и придания им необходимого запаса устойчивости (способы стабилизации и демпфирования) разнообразны. Уже отмечали возможность решения задачи выбором основных элементов регулятора и изменением их динамических свойств местными обратными связями. При этом можно руководствоваться следующими рекомендациями [86]. Если сопрягающая частота апериодического или колебательного звена расположена левее частоты среза ЛАЧХ разомкнутой системы, а сопрягающая частота форсирующего звена расположена правее частоты среза, то увеличение постоянной времени каждого из этих звеньев ведет к увеличению запаса устойчивости. Указанная зависимость справедлива лишь при условии, что сопрягающая частота расположена на некотором удалении (около декады) от частоты среза. Однако встречаются структуры, для которых эти рекомендации не выполняются.

Другой и более распространенный путь стабилизации и демпфирования — введение в систему дополнительных звеньев. Их включают последовательно в прямую цепь системы, параллельно отдельным участкам или охватывают участки обратной связью. В качестве дополнительных используют интегрирующее, апериодическое, дифференцирующее, форсирующее и чаще всего более сложные интегродифференцирующие звенья.

Эти способы улучшения динамических свойств отличаются один от другого влиянием на частотные характеристики разомкнутой системы (на амплитудно-фазовую или на амплитудную и фазовую). Основными являются следующие три способа.

1. Демпфирование с подавлением высоких частот (демпфирование с внесением отрицательных фазовых сдвигов). Устойчивость замкнутой САР и достаточный запас устойчивости обеспечивают посредством придания разомкнутой системе способности подавлять гармонические колебания, частота которых превышает некоторое значение ω_a.

Если разомкнутая САР состоит из безынерционных, апериодических, колебательных и форсирующих звеньев, то для подавления высоких частот достаточно включить апериодическое звено с достаточно большой постоянной времени T_0. Значение T_0 должно быть выбрано так, чтобы частота среза ω_c измененной ЛАЧХ находилась в диапазоне частот, при которых ординаты исходной ЛАЧХ еще весьма мало отличаются от $20 \lg k$ и ординаты исходной ЛФЧХ от нуля. В этом случае остальными постоянными времени можно пренебречь, и можно приближенно считать, что передаточная функция разомкнутой системы

$$W \approx \frac{k}{T_0 s + 1}. \tag{8.24}$$

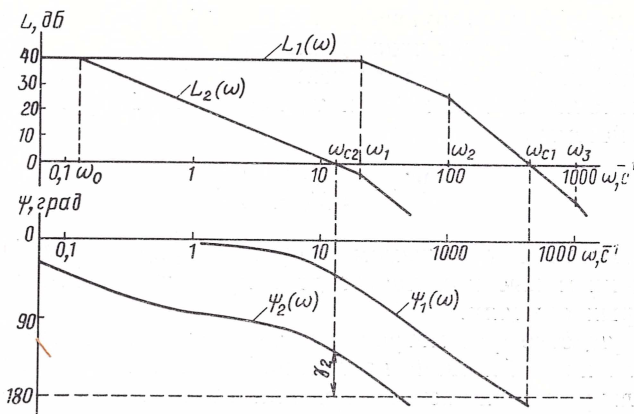


Рис. 8.10. Логарифмические частотные характеристики к примеру 8.4

Следовательно, замкнутая система устойчива и имеет вполне достаточный запас устойчивости.

Запас устойчивости не изменится и при увеличении k, если одновременно увеличивать T_0 так, чтобы оставалось неизменным отношение

$$\frac{k}{T_0} = \omega_c. \tag{8.25}$$

Пример 8.4. Передаточная функция разомкнутой САР

$$W = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s +)(T_3 s + 1)},$$

где $k = 100$, $T_1 = 0{,}05$, $T_2 = 0{,}01$ и $T_3 = 0{,}001$ с.

Выяснить, как повлияет на свойства системы включение в ее прямую цепь апериодического звена с постоянной времени $T_0 = 8$ с.

По логарифмическим частотным характеристикам $L_1(\omega)$ и $\psi_1(\omega)$ разомкнутой САР (рис. 8.10) заключаем, что при замыкании она будет неустойчива. Характеристики $L_2(\omega)$ и $\psi_2(\omega)$ разомкнутой САР с дополнительным апериодическим звеном свидетельствуют об устойчивости ее в замкнутом состоянии. Запас устойчивости по фазе $\gamma_2 \approx 51°$. Постоянная времени T_0 дополнительного звена имеет меньшее значение, чем следует по ранее сделанным рекомендациям, так как значение $\psi_1(\omega)$ при ω_{c2} не близко к нулю. Однако получены вполне приемлемые результаты (достаточное значение γ_2), поскольку ближайшая сопрягающая частота ω_1 создается апериодическим звеном. Рекомендации же предполагают наихудший случай, когда эта сопрягающая частота создается колебательным звеном.

Демпфирование статических систем можно осуществить не только апериодическим, но и более сложным интегро-дифференцирующим звеном с передаточной функцией

$$W_0 = \frac{\tau_0 s + 1}{T_0 s + 1} \quad \text{при } T_0 > \tau_0. \tag{8.26}$$

В этом случае постоянная времени T_0 может иметь меньшее значение, чем было рекомендовано для апериодического звена.

Интегродифференцирующее звено с передаточной функцией (8.26) обеспечивает подавление высоких частот и достаточный запас устойчивости в астатических системах первого порядка. При достаточно больших T_0 и τ_0 передаточная функция разомкнутой системы

$$W \approx \frac{k(\tau_0 s + 1)}{s(T_0 s + 1)}. \qquad (8.27)$$

В системах с астатизмом второго порядка демпфирование с подавлением высоких частот дает нужные результаты только в некоторых случаях.

Преимущество рассмотренного способа в том, что дополнительное звено с большой постоянной времени T_0 представляет собой фильтр низких частот и подавляет высокочастотные помехи. Недостаток — значительное уменьшение быстродействия системы. Этот недостаток сильно ограничивает применение данного способа.

2. *Демпфирование с поднятием высоких частот* (демпфирование с внесением положительных фазовых сдвигов). Устойчивость и нужный запас устойчивости обеспечивают посредством увеличения способности разомкнутой системы пропускать гармонические колебания, частота которых выше некоторого значения $\omega_а$.

Этого достигают включением в прямую цепь САР форсирующего звена с передаточной функцией $W_ф = \tau s + 1$. Оно создает положительный фазовый сдвиг $\psi_ф = \operatorname{arctg} \omega\tau$, который в области высоких частот приближается к 90° и увеличивает амплитуду в $A_ф = \sqrt{1 + \omega^2\tau^2}$ раз, т. е. тем сильнее, чем выше частота.

Если влияние одного форсирующего звена оказывается недостаточным, то включают последовательно два таких звена с постоянными времени τ_1 и τ_2. Тогда положительный фазовый сдвиг имеет две составляющих: $\psi_ф = \operatorname{arctg} \omega\tau_1 + \operatorname{arctg} \omega\tau_2$. Более значительно и увеличение амплитуды:

в $$A_ф = \sqrt{1 + \omega^2\tau_1^2}\sqrt{1 + \omega^2\tau_2^2} \text{ раз.}$$

При использовании реального форсирующего звена с передаточной функцией

$$W_ф = \frac{k_ф(\tau_ф s + 1)}{T_ф s + 1}, \qquad (8.28)$$

где $k_ф < 1$ и $\tau_ф \gg T_ф$, необходимо дополнительное увеличение передаточного коэффициента остальной части разомкнутой цепи в $\frac{1}{k_ф}$ раз.

Постоянная времени $T_ф$ ограничивает диапазон высоких частот, на котором вносится положительный фазовый сдвиг. Однако чем больше $\tau_ф$ по сравнению с $T_ф$, тем меньше влияние постоянной $T_ф$.

Вместо последовательных дифференцирующих звеньев могут быть использованы эквивалентные по влиянию местные обратные связи.

Демпфирование с поднятием высоких частот является теоретически универсальным способом и дает желаемый результат практически при любой передаточной функции исходной системы, в том числе и при наличии неминимально-фазовых звеньев.

Преимущество этого способа также в том, что увеличивается быстродействие системы. Однако способ имеет и весьма существенный недостаток: при дифференцировании сигнала повышается уровень высокочастотных помех.

Указанный недостаток сильно ограничивает практическое применение данного способа.

Пример 8.5. Выяснить, как повлияет на свойства САР, рассмотренной в примере 8,4, включение форсирующего звена с передаточной функцией $W_ф = 0{,}01s + 1$.

На рис. 8.11 показаны логарифмические частотные характеристики $L_1(\omega)$ и $\psi_1(\omega)$ разомкнутой цепи исходной системы и характеристики $L_2(\omega)$ и $\psi_2(\omega)$ системы с форсирующим звеном. Поднятие высоких частот обеспечивает устойчивость замкнутой системы и запас устойчивости по фазе $\gamma_2 \approx 42°$.

3. *Демпфирование с подавлением средних частот* также обеспечивает устойчивость и достаточный запас устойчивости. Достигается это включением в прямую цепь САР интегродифференцирующего звена второго порядка с передаточной функцией

$$W_{ид} = \frac{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}. \qquad (8.29)$$

Вместо последовательного звена можно создать эквивалентную по влиянию местную обратную связь.

При подавлении средних частот быстродействие системы уменьшается, но не существенно. Данный вид демпфирования наиболее распространенный.

Пример 8.6. Выяснить, как повлияет на свойства САР, рассмотренной в примере 8.4, включение интегродифференцирующего звена с передаточной функцией

$$W_{ид} = \frac{(0{,}01s + 1)^2}{(0{,}1s + 1)(0{,}001s + 1)}.$$

На рис. 8.12 представлены логарифмические частотные характеристики $L_1(\omega)$ и $\psi_1(\omega)$ разомкнутой исходной системы и характеристики $L_2(\omega)$ и $\psi_2(\omega)$ системы с интегродифференцирующим звеном. Подавление средних частот обеспечило устойчивость замкнутой системы и запас устойчивости по фазе $\gamma_2 \approx 49°$.

Во многих случаях рассмотренные способы комбинируют в зависимости от свойств частотных характеристик САР, устойчивость которой необходимо обеспечить. Может оказаться необходимым подавление средних частот с одновременным поднятием высоких частот, усиление части высоких частот и подавление другой их части и т. д.

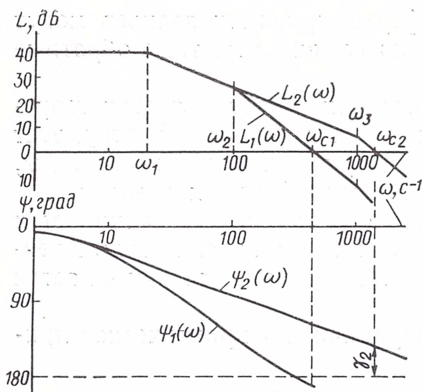


Рис. 8.11. Логарифмические частотные характеристики к примеру 8.5

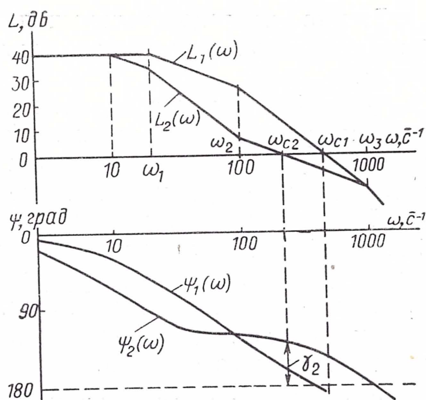


Рис. 8.12. Логарифмические частотные характеристики к примеру 8.6

При наличии в системе консервативного или колебательного звена с малым затуханием хорошие результаты дает демпфирование с введением отрицательных фазовых сдвигов [18]. Такое демпфирование заключается в том, что в прямую цепь САР включают неминимально-фазовое звено, например, с передаточной функцией

$$W_{д} = \frac{1 - Ts}{Ts + 1}. \tag{8.30}$$

Звено не изменяет амплитудно-частотной характеристики так как

$$A_{д} = \frac{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} = 1, \tag{8.31}$$

но создает отрицательные фазовые сдвиги

$$\psi_{д} = \operatorname{arctg}(-\omega T) - \operatorname{arctg}\omega T = -2\operatorname{arctg}\omega T. \tag{8.32}$$

В результате обеспечивается устойчивость и не изменяется быстродействие системы.

Пример 8.7. Передаточная функция разомкнутой САР

$$W = \frac{k}{s(T_1^2 s^2 + 2\xi T_1 s + 1)},$$

где $k = 5$, $T_1 = 0{,}05$ с и $\xi = 0{,}01$.

Выяснить, как повлияет на свойства САР включение в ее прямую цепь неминимально-фазового звена с передаточной функцией

$$W_{д} = \frac{1 - Ts}{Ts + 1},$$

где $T = 0{,}1$ с.

Частотная передаточная функция разомкнутой цепи исходной САР

$$\overline{W}(j\omega) = \frac{k}{j\omega[(1-\omega^2T_1^2)+j\omega 2\xi T_1]} = U + jV,$$

где

$$U = -\frac{2\xi T_1 k}{1-2T_1^2(1-2\xi^2)\omega^2+T_1^4\omega^4} \approx$$

$$\approx -\frac{0{,}005}{1-0{,}005\omega^2+6{,}25\cdot 10^{-6}\omega^4};$$

$$V = -\frac{k(1-\omega^2T_1^2)}{\omega[1-2T_1^2(1-2\xi^2)\omega^2+T_1^4\omega^4]} \approx$$

$$\approx -\frac{5(1-0{,}0025\omega^2)}{\omega(1-0{,}005\omega^2+6{,}25\cdot 10^{-6}\omega^4)}.$$

По значениям U и V определим основные сведения об АФЧХ разомкнутой САР:

при $\omega = 0 \quad U = -0{,}005;\ V = -\infty;$

$0 < \omega < 20 \quad U < 0;\ V < 0;$

$\omega = 20 \quad U = -12{,}5;\ V = 0;$

$20 < \omega \quad U < 0;\ V > 0;$

$\omega = \infty \quad U = 0;\ V = 0.$

Полученные данные определяют вид АФЧХ (кривая *1* на рис. 8.13) и позволяют заключить, пользуясь критерием Найквиста, что исходная система при замыкании становится неустойчивой.

Частотная передаточная функция разомкнутой цепи САР с дополнительным звеном

$$\overline{W}(j\omega) = \frac{k(1-j\omega T)}{j\omega[(1-\omega^2T_1^2)+j\omega 2\xi T_1](1+j\omega T)} = U + jV,$$

где

$$U = -\frac{k[2(T+\xi T_1)-2TT_1(T_1+\xi T)\omega^2]}{B} \approx$$

$$\approx -\frac{5(0{,}2-0{,}00051\omega^2)}{B};$$

$$V = -\frac{k[1-(T_1^2+4\xi TT_1+T^2)\omega^2+T^2T_1^2\omega^4]}{\omega B} \approx$$

$$\approx -\frac{5(1-0{,}0127\omega^2+2{,}5\cdot 10^{-5}\omega^4)}{\omega B};$$

$$B = 1 + [T^2 - 2T_1^2(1-2\xi^2)]\omega^2 + [T_1^4 - 2T^2T_1^2(1-2\xi^2)]\omega^4 +$$

$$+ T^2T_1^4\omega^6 \approx 1 + 0{,}005\omega^2 - 4{,}37\cdot 10^{-5}\omega^4 + 6{,}25\cdot 10^{-8}\omega^6.$$

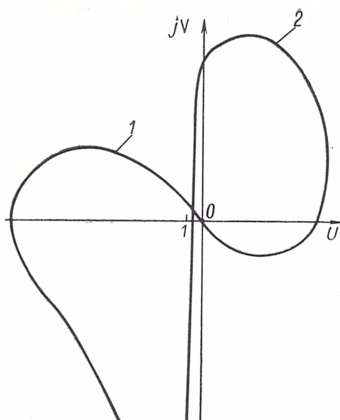


Рис. 8.13. Амплитудно-фазовые частотные характеристики к примеру 8.7

По значениям U и V — определим основные данные об АФЧХ разомкнутой САР с дополнительным звеном:

при $\omega = 0$ $\quad U = -1{,}0;\ V = -\infty;$
$0 < \omega < 9{,}87 \quad U < 0;\ V < 0;$
$\omega = 9{,}87; \quad U = -0{,}67;\ V = 0;$
$9{,}87 < \omega < 19{,}85 \quad U < 0;\ V > 0;$
$\omega = 19{,}85 \quad U = 0;\ V = 10{,}2;$
$19{,}85 < \omega < 20{,}26 \quad U > 0;\ V > 0;$
$\omega = 20{,}26 \quad U = 7{,}24;\ V = 0;$
$20{,}26 < \omega \quad U > 0;\ V < 0;$
$\omega = \infty \quad U = 0;\ V = 0.$

Полученные данные определяют вид АФЧХ (кривая 2 на рис. 8.13) и позволяют сделать вывод на основании критерия Найквиста, что замкнутая система с дополнительным звеном устойчива.

Неминимально-фазовое звено создает дополнительные фазовые сдвиги и АФЧХ как бы «закручивается» вокруг начала осей координат по часовой стрелке. В результате САР становится устойчивой.

8.3. КОРРЕКТИРУЮЩИЕ УСТРОЙСТВА

Наиболее действенным способом обеспечения необходимых динамических свойств САР является введение в нее дополнительного элемента, который исправляет (корректирует) свойства исходной системы. Элемент называют корректирующим элементом или корректирующим устройством.

Итак, корректирующее устройство — это функциональный элемент системы автоматического регулирования по отклонению, обеспечивающий необходимые динамические свойства этой системы, устойчивое и качественное ее действие. Иногда корректирующее устройство изменяет нужным образом и статические свойства САР.

Ранее уже рассматривали такие устройства. Ниже будут рассмотрены некоторые их общие свойства, что поможет решать задачи их выбора.

Корректирующее устройство можно включать в прямую цепь системы последовательно (рис. 8.14, *а*). Такое последовательное корректирующее устройство $W_{к1}$ включают непосредственно после элемента сравнения или после предварительного усилителя.

Широко используют также включение корректирующего устройства $W_{к2}$ в виде обратной связи, чаще всего отрицательной (рис. 8.14, *б*). Такое корректирующее устройство называют параллельным. Оно охватывает обратной связью исполнительный элемент или оконечный каскад усилителя.

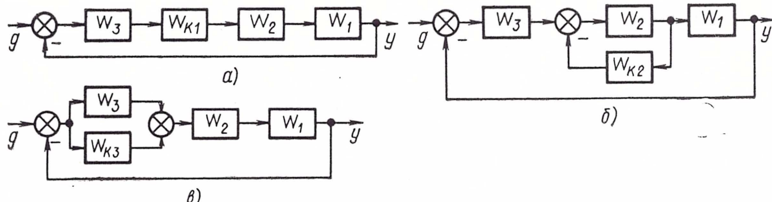


Рис. 8.14. Структурная схема САР с корректирующим устройством:
а — последовательным; *б* — параллельным; *в* — прямым параллельным

Передаточную функцию участка цепи с параллельным корректирующим устройством (рис. 8.14, *б*) вычисляют по формуле

$$W_э = \frac{W_2}{1 + W_2 W_{2к}}. \tag{8.33}$$

Обычно в достаточно широком и наиболее существенном для качества системы диапазоне частот требуют, чтобы

$$|\overline{W}_2(j\omega)\,\overline{W}_{2к}(j\omega)| \gg 1 \tag{8.34}$$

и тогда в этом диапазоне частот

$$\overline{W}_э(j\omega) \approx \frac{1}{\overline{W}_{2к}(j\omega)}, \tag{8.35}$$

т. е. при удовлетворении неравенства (8.34) свойства цепи с параллельным корректирующим устройством определяются только лишь свойствами самого корректирующего устройства.

Указанное обстоятельство является большим преимуществом параллельного корректирующего устройства, так как свойства участка цепи W_2 и изменение его параметров не влияют на свойства системы. Другое преимущество такого включения в том, что на корректирующее устройство поступает сигнал с выхода мощного элемента, и после преобразования сигнала его усиления не потребуется.

Параллельное корректирующее устройство можно включить также и в цепь основной обратной связи САР [62].

Применяют и третий вариант включения корректирующего устройства $W_{к3}$ — параллельно одному из участков ее прямой цепи (рис. 8.14, *в*). В этом случае корректирующее устройство называют прямым параллельным.

Прямое параллельное корректирующее устройство имеет, вообще говоря, меньшие возможности, чем два других. Однако иногда такое устройство при меньшей сложности обеспечивает необходимое преобразование сигнала.

Пусть, например,

$$W_3 = k_3 \text{ и } W_{к3} = -\frac{k_{к3}}{Ts + 1}.$$

Тогда передаточная функция участка цепи с этим прямым параллельным корректирующим устройством

$$W_э = W_3 + W_{к3} = \frac{k_э(\tau_э s + 1)}{Ts + 1},$$

где

$$k_э = k_3 - k_{к3} \text{ и } \tau_э = \frac{k_3}{k_3 - k_{к3}} T.$$

Следовательно, при малой разности $k_3 - k_{к3}$ получают реальное форсирующее звено с большой постоянной времени дифференцирования.

При выборе прямого параллельного корректирующего устройства могут быть полезными данные табл. 2.5.

В ряде случаев возникает задача выбора вида корректирующего устройства. Приводимые ниже формулы позволяют по передаточной функции, которую должно иметь корректирующее устройство, определить передаточную функцию эквивалентного ему корректирующего устройства другого вида. Корректирующие устройства различного вида эквивалентны, если они создают один и тот же эффект, одно и то же преобразование сигнала на участке цепи с корректирующим устройством.

Формулы эквивалентности корректирующих устройств таковы:

$$W_{к1} = \frac{1}{1 + W_2 W_{к2}}; \tag{8.36}$$

$$W_{к1} = 1 + \frac{W_{к3}}{W_3}; \tag{8.37}$$

$$W_{к2} = \frac{1 - W_{к1}}{W_2 W_{к1}}; \tag{8.38}$$

$$W_{к2} = -\frac{W_{к3}}{W_2(W_3 + W_{к3})}; \tag{8.39}$$

$$W_{к3} = W_3 (W_{к1} - 1); \tag{8.40}$$

$$W_{к3} = -\frac{W_2 W_3 W_{к2}}{1 + W_2 W_{к2}}. \tag{8.41}$$

Если значение передаточной функции $W_{к2}$ отрицательное, то это означает, что параллельное корректирующее устройство представляет собой положительную обратную связь.

Во многих случаях необходима сложная коррекция динамических свойств САР. Тогда вместо одного корректирующего устройства удобно использовать два более простых.

Последовательному корректирующему устройству (рис. 8.14, *а*) эквивалентно сочетание параллельного и прямого параллельного, если их передаточные функции удовлетворяют равенству

$$\frac{1 + \dfrac{W_{к3}}{W_3}}{1 + W_2 W_{к2}} = W_{к1}. \tag{8.42}$$

Параллельному корректирующему устройству (рис. 8.14, *б*) эквивалентно сочетание последовательного и прямого параллельного корректирующих устройств, передаточные функции которых удовлетворяют равенству

$$W_{к1}\left(1+\frac{W_{к3}}{W_3}\right)=\frac{1}{1+W_2W_{к2}}\,. \qquad (8.43)$$

Прямому параллельному корректирующему устройству (рис. 8.14, *в*) эквивалентны последовательное и параллельное корректирующие устройства с передаточными функциями, удовлетворяющими равенству

$$\frac{W_{к1}}{1+W_2W_{к2}}=1+\frac{W_{к3}}{W_3}\,. \qquad (8.44)$$

Весьма эффективны нелинейные корректирующие устройства. Однако их рассмотрение выходит за рамки данной книги.

8.4. КОМПАУНДИРУЮЩИЕ СВЯЗИ

В некоторых объектах регулирования можно обнаружить две физические величины, которые зависят от одних и тех же внешних воздействий и взаимосвязаны.

Если одна из этих величин — y является регулируемой, то другая — y_1 может быть использована для создания дополнительного воздействия на регулятор. Такая дополнительная связь внутри замкнутого контура регулирования по отклонению называется компаундирующей. Существуют два основных вида компаундирующей связи.

Компаундирующая связь $W_{кс}$, *образующая второй канал воздействия возмущения*, может быть создана когда в объекте регулирования возмущение f воздействует на регулируемую величину y через какую-то промежуточную величину y_1 (рис. 8.15, *а*). В этом случае регулирующая величина z влияет на y_1 только через y.

Компаундирующая связь в общем случае состоит из датчика и компенсирующего элемента. Если y_1 есть электрическая величина, то надобность в датчике отпадает. Компенсирующий элемент преобразует сигнал так, чтобы компенсировать влияние возмущения f на регулируемую величину y.

Система с компаундирующей связью описывается передаточными функциями:
разомкнутой цепи

$$W=\frac{W_0W_{11}W_2W_3}{1+W_{12}W_{13}-W_{11}W_2W_{кс}W_{13}}\,; \qquad (8.45)$$

относительно задающего воздействия

$$W_g=\frac{W_{11}W_2W_3}{1+W_{12}W_{13}-W_{11}W_2W_{кс}W_{13}+W_0W_{11}W_2W_3}\,; \qquad (8.46)$$

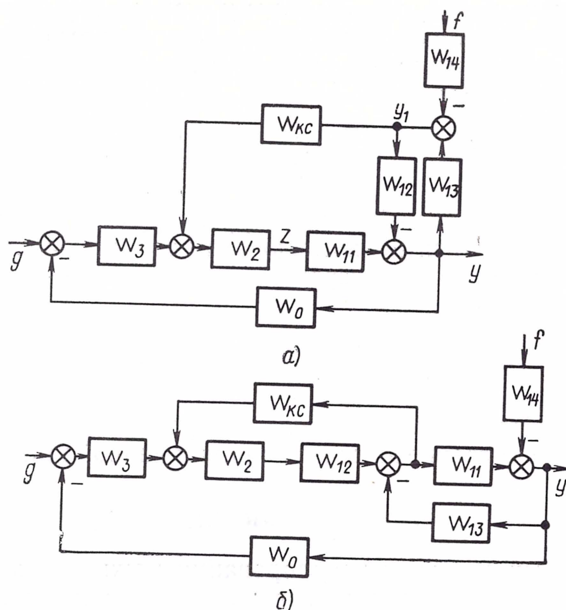


Рис. 8.15. Структурная схема САР с компаундирующей связью:

а — образующей второй накал воздействия возмущения; *б* — не образующей такого канала

относительно возмущения

$$W_f = \frac{-W_{14}(W_{12} - W_{11}W_2W_{\text{кс}})}{1 + W_{12}W_{13} - W_{11}W_2W_{\text{кс}}W_{13} + W_0W_{11}W_2W_3}, \qquad (8.47)$$

где W_{11}, W_{12}, W_{13}, W_{14} — передаточные функции элементов объекта регулирования; W_2, W_3, $W_о$ — передаточные функции элементов регулятора.

При выполнении компаундирующей связи с передаточной функцией

$$W_{\text{кс}} = \frac{W_{12}}{W_{11}W_2} \qquad (8.48)$$

передаточная функция W_f относительно возмущения обращается в нуль. В этом случае возмущение f не оказывает никакого влияния на регулируемую величину y, т. е. достигается полная инвариантность (независимость) y от f. Равенство (8.48) есть условие полной инвариантности и оно, вообще говоря, может быть реализовано, ибо существуют два канала, по которым возмущение f воздействует на регулируемую величину y. Один канал (естественный) состоит из элементов с передаточными функциями W_{14} и W_{12}. Другой образован компаундирующей связью и состоит из элементов с W_{14}, $W_{\text{кс}}$, W_2 и W_{11}.

Вероятнее всего, что из-за инерционности элемента с W_2 условие инвариантности не может быть реализовано полностью — не может быть физически осуществлена компаундирующая связь с передаточной функцией, определяемой равенством (8.48). Тогда компаундирующую связь выполняют лишь приближаясь к этому равенству и достигают частичной инвариантности или инвариантности с точностью до малой величины ε. Однако и в такой ситуации влияние f на y уменьшается весьма существенно.

Возможность достижения того или иного вида инвариантности регулируемой величины от основного возмущения является большим преимуществом рассматриваемой структуры.

Однако компаундирующая связь оказывает отрицательное влияние на устойчивость системы, так как она и элемент с W_{13} являются положительной обратной связью, охватывающей элементы W_{11} и W_2 прямой цепи. Это влияние может быть компенсировано соответствующим выбором корректирующего устройства в прямой цепи системы.

Генератор постоянного тока с независимым возбуждением может служить примером объекта, который позволяет осуществить компаундирующую связь, образующую второй канал воздействия возмущения. В этом случае регулируемой величиной является напряжение $u_{г}$; возмущением — напряжение у потребителя $u_{н}$, изменяющееся при изменении мощности нагрузки; величиной, характеризующей действие объекта, является ток $i_{г}$; регулирующим воздействием ток возбуждения $i_{в}$.

При обычных допущениях (скорость вращения генератора неизменна и его магнитная система не насыщена) указанные величины связаны следующими уравнениями:

$$u_{г} = k_{г} i_{в} - (L_{а} p + R_{а})\, i_{г};$$
$$(L_{л} p + R_{л}) i_{г} = u_{г} - u_{н},$$

где $k_{г}$ — передаточный коэффициент генератора; $L_{а}$, $R_{а}$, $L_{л}$, $R_{л}$ — индуктивности и сопротивления соответственно обмотки якоря генератора и линии, соединяющей генератор с потребителем.

После преобразования этих уравнений по Лапласу при нулевых начальных условиях можно определить передаточные функции элементов объекта:

$$W_{11} = k_{г};\ \ W_{12} = R_{а}\,(T_{а} s + 1);\ \ W_{13} = W_{14} = \frac{1}{R_{л}\,(T_{л} s + 1)};$$

где

$$T_a = \frac{L_a}{R_a};\quad T_{л} = \frac{L_{л}}{R_{л}}.$$

Очевидно, что структурная схема генератора постоянного тока такая же, как у объекта, изображенного на рис. 8.15, *а*. Следовательно, в системе автоматического регулирования напряжения генератора можно создать компаундирующую связь для компенсации влияния возмущения. Такую возможность широко используют.

Компаундирующая связь, не образующая второго канала воздействия возмущения, получается в том случае, когда возмущение f влияет на промежуточную величину y_1 через регулируемую величину y (рис. 8.15, *б*). При этом регулирующая величина z

обычно влияет на регулируемую величину y через промежуточную переменную y_1.

Система описывается передаточными функциями: разомкнутой цепи

$$W = \frac{W_0 W_{11} W_{12} W_2 W_3}{1 + W_{11} W_{13} - W_{12} W_2 W_{кс}}; \tag{8.49}$$

относительно задающего воздействия

$$W_g = \frac{W_{11} W_{12} W_2 W_3}{1 + W_{11} W_{13} - W_{12} W_2 W_{кс} + W_0 W_{11} W_{12} W_2 W_3}; \tag{8.50}$$

относительно возмущения

$$W_f = \frac{-W_{14}(1 - W_{12} W_2 W_{кс})}{1 + W_{11} W_{13} - W_{12} W_2 W_{кс} + W_0 W_{11} W_{12} W_2 W_3}; \tag{8.51}$$

где W_{11}, W_{12}, W_{13}, W_{14} — передаточные функции элементов объекта регулирования; $W_2 W_3 W_0$ — передаточные функции элементов регулятора.

Передаточная функция W_f обращается в нуль при выполнении компаундирующей связи с передаточной функцией

$$W_{кс} = \frac{1}{W_{12} W_2}. \tag{8.52}$$

Таким образом, это равенство является условием независимости (инвариантности) регулируемой координаты y от возмущения f. Однако, как правило, компенсирующая цепь не может быть выполнена с передаточной функцией $W_{кс}$, удовлетворяющей равенству (8.52). Удается лишь уравнять свободные члены и коэффициенты при младших степенях s левой и правой частей равенства, которое получается из равенства (8.52) после подстановки в него значений передаточных функций $W_{кс}$, W_1 и W_2. При этом достигают не полной, а лишь частичной инвариантности y от f. Все же влияние f на y значительно уменьшается.

Компаундирующая связь весьма заметно влияет на устойчивость системы и качество воспроизведения задающего воздействия, поэтому оказывается необходимым корректирующее устройство в прямой цепи системы.

Примером объекта, который позволяет создать компаундирующую связь рассмотренного типа, может служить электродвигатель постоянного тока с независимым возбуждением. В этом случае регулируемая величина — скорость вращения якоря ω; возмущение — момент сопротивления m; вторая величина, характеризующая действие двигателя, — ток якоря i; регулирующая величина — напряжение u, приложенное к обмотке якоря.

Уравнения электродвигателя

$$(L_a p + R_a)\, i = u - C_e \omega;$$

$$(Ip + C)\, \omega = C_m i - m,$$

где L_a, R_a — индуктивность и сопротивление обмотки якоря; I — момент инерции якоря и связанных с ним вращающихся масс; C_e, C, C_m — постоянные.

После преобразования уравнений по Лапласу при нулевых начальных условиях определяют передаточные функции элементов электродвигателя:

$$W_{11} = \frac{\Omega}{I} = \frac{k_{11}}{T_M s + 1}; \quad W_{12} = \frac{\Omega}{M} = \frac{k_{12}}{T_M s + 1};$$

$$W_{13} = \frac{I}{\Omega} = \frac{k_{13}}{T_a s + 1}; \quad W_{14} = \frac{I}{U} = \frac{k_{14}}{T_a s + 1},$$

где Ω, I, M, U — соответственно изображения, переменных ω, i, m, u;

$$k_{11} = \frac{C_m}{C}; \quad k_{12} = \frac{1}{C}; \quad k_{13} = \frac{C_e}{R_a}; \quad k_{14} = \frac{1}{R_a}; \; T_M = \frac{I}{C}; \quad T_a = \frac{L_a}{R_a}.$$

Структурная схема электродвигателя такая же, как и у объекта регулирования на рис. 8.15, *б*. Следовательно, в системе автоматического регулирования скорости вращения электродвигателя можно создать компаундирующую связь (обратную связь по току), которая однако не образует второго канала воздействия возмущения на регулируемую величину. Такую возможность широко используют в автоматизированных электроприводах.

8.5. КОМПЕНСАЦИЯ ВЛИЯНИЯ ЧИСТОГО ЗАПАЗДЫВАНИЯ ОБЪЕКТА

Многие промышленные объекты регулирования имеют чистое (транспортное) запаздывание, которое значительно ухудшает переходные процессы, уменьшает запас устойчивости и может быть причиной неустойчивости САР (см. п. 6.7).

Для компенсации такого нежелательного влияния чистого запаздывания объекта можно использовать дополнительную обратную связь, содержащую устройство предварения или линейный упредитель [34]. Структурная схема такой САР показана на рис. 8.16.

Если передаточная функция упредителя $W_у = W_1 (1 - e^{-\theta s})$, то передаточная функция САР относительно задающего воздействия

$$W_g = \frac{\dfrac{W_р W_1 e^{-\theta s}}{1 + W_р W_у}}{1 + \dfrac{W_р W_1 e^{-\theta s}}{1 + W_р W_у}} = \frac{W_р W_1}{1 + W_р W_1} e^{-\theta s}, \tag{8.53}$$

где $W_1 e^{-\theta s}$ и W_2 — передаточные функции объекта соответственно относительно регулирующего воздействия и возмущения f_2; $W_р$ — передаточная функция регулятора.

Этой передаточной функции соответствует структурная схема, изоб-

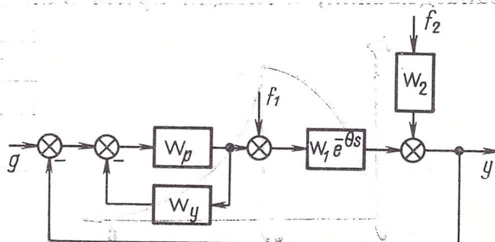


Рис. 8.16. Структурная схема САР с компенсацией влияния чистого запаздывания

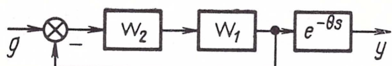


Рис. 8.17. Эквивалентная структурная схема САР с компенсацией влияния чистого запаздывания

раженная на рис. 8.17, т. е. САР с дополнительной обратной связью $W_у$ можно рассматривать состоящей из замкнутого контура с элементами W_1 и W_2 и звена чистого запаздывания. Передаточную функцию $W_р$ регулятора следует выбирать так, чтобы этот замкнутый контур был устойчив и обеспечивал необходимое качество регулирования, а переходная характеристика относительно g действительной САР лишь отставала во времени на θ от переходной характеристики замкнутого контура эквивалентной схемы.

Передаточные функции рассматриваемой САР (см. рис. 8.16) относительно возмущений f_1 и f_2 соответственно:

$$W_{f_1} = \frac{W_1 e^{-\theta s}}{1 + \dfrac{W_р W_1 e^{-\theta s}}{1 + W_р W_у}} = \left(1 - \frac{W_р W_1 e^{-\theta s}}{1 + W_р W_1}\right) W_1 e^{-\theta s}; \quad (8.54)$$

$$W_{f_2} = \frac{W_2}{1 + \dfrac{W_р W_1 e^{-\theta s}}{1 + W_р W_у}} = \left(1 - \frac{W_р W_1 e^{-\theta s}}{1 + W_р W_1}\right) W_2. \quad (8.55)$$

Передаточной функции W_{f_1} соответствует переходная характеристика h_f (рис. 8.18), которая представляет собой импульс продолжительностью около 2θ. Фронт и срез импульса определяются видом передаточных функций соответственно W_1 и $\frac{W_р W_1}{1 + W_р W_1} W_1$. Переходная характеристика, соответствующая передаточной функции W_{f_2}, также представляет собой импульс продолжительностью около 2θ, но начинается импульс при $t = 0$. Его фронт и срез определяются соответственно передаточными функциями W_2 и $\frac{W_р W_1}{1 + W_р W_1} W_2$.

Упредитель с передаточной функцией $W_у = W_1 (1 - e^{-\theta s})$ можно выполнить [34] по структурной схеме, приведенной на рис. 8.19. Звено с передаточной функцией W_1 представляет собой пассивный четырехполюсник постоянного тока и *УЗ* есть блок запаздывания, имеющий время запаздывания θ.

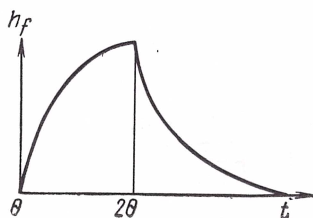
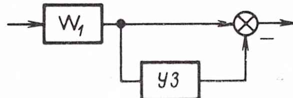


Рис. 8.18. Переходная характеристика по возмущению f_i

Рис. 8.19. Структурная схема упредителя



8.6. ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Во всех рассмотренных методах стабилизации и обеспечения высокого качества регулирования цель достигается соответствующим формированием сигнала, поступающего на исполнительный элемент регулятора. Для этого регулятор дополняют специальным элементом, задачей которого является необходимое преобразование сигнала.

В САР используют преобразовательные (корректирующие) элементы с весьма различными свойствами и различной физической природы. Наиболее широко применяют электрические преобразовательные элементы постоянного тока. Ниже рассмотрены основные из них.

Пассивные четырехполюсники постоянного тока — это электрические цепи из резисторов, конденсаторов и индуктивностей. Основные типовые схемы таких четырехполюсников и формулы для определения их передаточных функций $W_н$ при нагрузке и W при $R_н = \infty$ приведены в табл. 8.1. При последовательном соединении резистора с сопротивлением R_i, конденсатора с емкостью C_i и индуктивности L_i полное сопротивление отдельных участков, записанное в операторной форме:

$$Z_i = R_i + L_i s + \frac{1}{C_i s} = \frac{C_i L_i s^2 + R_i C_i s + 1}{C_i s},$$

при параллельном соединении резистора с сопротивлением R_i и конденсатора с емкостью C_i

$$Z_i = \frac{1}{\dfrac{1}{R_i} + C_i s} = \frac{R_i}{R_i C_i s + 1}.$$

Пассивные четырехполюсники собирают из дешевых стандартных деталей, если не используют индуктивности. Они надежны в эксплуатации, так как не имеют подвижных изнашивающихся частей. Разнообразие возможных схем весьма велико и в каждой из них в широких пределах можно изменять ее параметры. Следовательно, четырехполюсники могут осуществлять весьма разнообразное преобразование сигнала (напряжения постоянного тока). Их сочетание с другими электрическими элементами обычно не вызывает затруднений. Благодаря перечисленным положительным свойствам пассивные четырехполюсники постоянного тока широко применяют в САР самых различных классов.

Недостаток пассивных четырехполюсников в том, что они ослабляют сигнал вследствие потерь энергии в резисторах. Поэтому при их использовании необходим дополнительный усилитель, либо нужно увеличивать передаточный коэффициент имеющего усилителя.

Электрические схемы четырехполюсников, используемых на практике, и основные сведения о них приведены в табл. 8.2. Передаточные функции определены в предположении, что нагрузка

Таблица 8.1

Типовые схемы пассивных четырехполюсников постоянного тока

№ по пор.	Электрическая схема четырехполюсника	Передаточные функции, W при $z_{\text{н}} = \infty$: $W_{\text{н}}$ при нагрузке
1	z_1, z_2, u_1, u_2, $z_н$	$W = \dfrac{z_2}{z_1 + z_2}; \quad W_{\text{н}} = \dfrac{z_2 z_{\text{н}}}{z_1 z_2 + (z_1 + z_2) z_{\text{н}}}$
2	z_1, z_2, z_3, u_1, u_2, $z_н$	$W = \dfrac{z_2 z_3}{z_1 (z_2 + z_3) + z_2 z_3};$ $W_{\text{н}} = \dfrac{z_2 z_3 z_{\text{н}}}{z_1 z_2 z_3 + [z_1 (z_2 + z_3) + z_2 z_3] z_{\text{н}}}$
3	z_1, z_2, z_3, u_1, u_2	$W = \dfrac{(z_1 + z_2) z_3}{(z_1 + z_2) z_3 + z_1 z_2};$ $W_{\text{н}} = \dfrac{(z_1 + z_2) z_3 z_{\text{н}}}{z_1 z_2 z_3 + [z_1 z_2 + (z_1 + z_2) z_3] z_{\text{н}}}$
4	z_1, z_2, z_3, z_4, u_1, u_2, $z_н$	$W = \dfrac{z_3 z_4}{(z_1 + z_3)(z_2 + z_4) + z_1 z_3};$ $W_{\text{н}} = \dfrac{z_3 z_4 z_{\text{н}}}{z_4 [(z_1 + z_2) z_3 + z_1 z_2] + [(z_1 + z_3)(z_2 + z_4) + z_1 z_3] z_{\text{н}}}$
5	z_1, z_2, z_3, z_4, u_1, u_2, $z_н$	$W = \dfrac{(z_1 + z_2 + z_3) z_4 + z_2 z_3}{(z_1 + z_3)(z_2 + z_4) + z_2 z_4};$ $W_{\text{н}} = \dfrac{[(z_1 + z_2 + z_3) z_4 + z_2 z_3] z_{\text{н}}}{[z_2 (z_3 + z_4) + z_3 z_4] z_1 + [(z_1 + z_3)(z_2 + z_4) + z_2 z_4] z_{\text{н}}}$
6	z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, u_1, u_2, $z_н$	$W = \dfrac{[(z_1 + z_2 + z_3) z_4 + z_2 z_3] z_5}{[z_2 (z_3 + z_4 + z_5) + z_3 z_4] z_1 + [(z_1 + z_2 + z_3) z_4 + z_2 z_3] z_5};$ $W_{\text{н}} = \dfrac{[(z_1 + z_2 + z_3) z_4 + z_2 z_3] z_5 z_{\text{н}}}{[z_2 (z_3 + z_4) + z_3 z_4] z_1 z_5 + [(z_1 z_3 + z_3 z_5 + z_5 z_1)(z_2 + z_4) + (z_1 + z_5) z_2 z_4] z_{\text{н}}}$
7	z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, u_1, u_2, $z_н$	$W = \dfrac{z_4 z_5 z_6}{(z_3 + z_6)[(z_1 + z_4)(z_2 + z_5) + z_1 z_4] + z_5 [(z_1 + z_2) z_4 + z_1 z_2]};$ $W_{\text{н}} = \dfrac{z_4 z_5 z_6 z_{\text{н}}}{[(z_1 + z_4)(z_2 z_3 + z_3 z_5 + z_5 z_2) + z_1 z_4 (z_3 + z_5)] z_6 + \{(z_1 + z_4)[(z_2 + z_5)(z_3 + z_6) + z_2 z_5] + z_1 z_4 (z_3 + z_5 + z_6)\} z_{\text{н}}}$
8	z_1, z_2, z_3, z_4, u_1, u_2, $z_н$	$W = \dfrac{z_2}{z_1 + z_2} - \dfrac{z_4}{z_3 + z_4};$ $W_{\text{н}} = \dfrac{(z_2 z_3 - z_1 z_4) z_{\text{н}}}{(z_1 + z_2) z_3 z_4 + z_1 z_2 (z_3 + z_4) + (z_1 + z_2)(z_3 + z_4) z_{\text{н}}}$

отсутствует: $R_н = \infty$. Цифрами +20; +40; —20 и —40 указаны наклоны асимптот ЛАЧХ в дБ/дек. Ординаты L_0 и L_∞ могут быть определены следующим образом:

$$L_0 = 20 \lg A_0 \text{ и } L_\infty = 20 \lg A_\infty.$$

Если знаменатель передаточной функции четырехполюсника представляет собой двучлен $a_0 s^2 + a_1 s + 1$, то постоянные времени T_a и T_b определяют по формулам:
при

$$a_1^2 > 4a_0 \quad T_a = \frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0} \text{ и } T_b = \frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0};$$

при

$$a_1^2 < 4a_0 \quad T_a = T_b = \sqrt{a_0}.$$

Постоянные τ_a и τ_b определяют подобным образом по двучлену $b_0 s^2 + b_1 s + 1$ числителя передаточной функции.

По характеру преобразования сигнала четырехполюсники разделяют на следующие группы:

1) дифференцирующие четырехполюсники (№ 1—26 в табл. 8.2) в определенном диапазоне частот осуществляют дифференцирование сигнала, создают положительный сдвиг по фазе;

2) интегрирующие четырехполюсники (№ 27—43 в табл. 8.2) в определенном диапазоне частот осуществляют интегрирование сигнала, создают отрицательный сдвиг по фазе;

3) интегродифференцирующие четырехполюсники (№ 44—62 в табл. 8.2.) в одних диапазонах частот проявляют дифференцирующие свойства, в других — интегрирующие;

4) неминимально-фазовые или фазосдвигающие четырехполюсники (№ 63—66 в табл. 8.2) создают значительный отрицательный сдвиг по фазе. При этом четырехполюсники № 65 и 66 не изменяют амплитуду сигнала, являются динамическими звеньями с бесконечной полосой пропускания;

5) антивибратор (четырехполюсник № 67 в табл. 8.2) при частоте $\omega = \frac{1}{\tau}$ не пропускает сигнала.

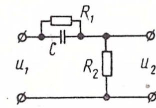
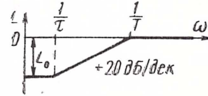
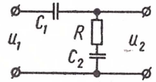
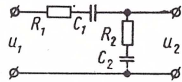
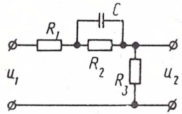
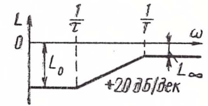
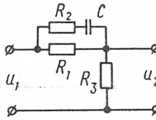
В ряде случаев возникает необходимость иметь корректирующее устройство с передаточной функцией, равной произведению передаточных функций двух (или более) четырехполюсников. Последовательное соединение этих четырехполюсников может не дать желаемых результатов, так как последующий четырехполюсник нагружает предыдущий; передаточная функция нагруженного четырехполюсника иная, чем указано для него в табл. 8.2.

При последовательном соединении двух пассивных четырехполюсников между ними необходимо включить разделительный (буферный) усилитель. Сопротивление его входной цепи должно быть весьма большим. Иногда допускают непосредственное соединение двух четырехполюсников, если все импеданцы последующего

Таблица 8.2

Пассивные четырехполюсники постоянного тока

№ по пор.	Электрическая схема	Передаточная функция, значения ее параметров и значения амплитуд $A_0 = A(0)$ и $A_\infty = A(\infty)$	Асимптотическая логарифмическая амплитудно-частотная характеристика
1	C, R; u_1, u_2	$W = \frac{ks}{Ts+1}$; $k = T = RC$; $A_0 = 0$; $A_\infty = 1$	L, 0, $\frac{1}{T}$, ω, +20 дб/дек
2	R_1, C, R_2; u_1, u_2	$W = \frac{ks}{Ts+1}$; $k = R_2C$; $T = (R_1 + R_2)C$; $A_0 = 0$; $A_\infty = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$	
3	C_1, R, C_2; u_1, u_2	$W = \frac{ks}{Ts+1}$; $k = RC_1$; $T = R(C_1 + C_2)$; $A_0 = 0$; $A_\infty = \frac{C_1}{C_1 + C_2}$	L, 0, $\frac{1}{T}$, ω, L_∞, +20 дб/дек
4	R_1, R_2, C, R_3; u_1, u_2	$W = \frac{ks}{Ts+1}$; $k = \frac{R_2R_3C}{R_1 + R_2}$; $T = \left(R_3 + \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}\right)C$; $A_0 = 0$; $A_\infty = \frac{R_2R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$	

5		$W=\frac{k(\tau s+1)}{Ts+1}$; $k=\frac{R_2}{R_1+R_2}$; $\tau=R_1C$; $T=k\tau=\frac{R_1R_2C}{R_1+R_2}$; $A_0=\frac{R_2}{R_1+R_2}$; $A_\infty=1$	
6		$W=\frac{k(\tau s+1)}{Ts+1}$; $k=\frac{C_1}{C_1+C_2}$; $\tau=RC_2$; $T=k\tau=\frac{C_1C_2R}{C_1+C_2}$; $A_0=\frac{C_1}{C_1+C_2}$; $A_\infty=1$	
7		$W=\frac{k(\tau s+1)}{Ts+1}$; $k=\frac{C_1}{C_1+C_2}$; $\tau=R_2C_2$; $T=\frac{(R_1+R_2)C_1C_2}{C_1+C_2}$; $A_0=\frac{C_1}{C_1+C_2}$; $A_\infty=\frac{R_2}{R_1+R_2}$	
8		$W=\frac{k(\tau s+1)}{Ts+1}$; $k=\frac{R_3}{R_1+R_2+R_3}$; $\tau=R_2C$; $T=\frac{(R_1+R_3)R_2C}{R_1+R_2+R_3}$; $A_0=\frac{R_3}{R_1+R_2+R_3}$; $A_\infty=\frac{R_3}{R_1+R_3}$	
9		$W=\frac{k(\tau s+1)}{Ts+1}$; $k=\frac{R_3}{R_1+R_3}$; $\tau=(R_1+R_2)C$; $T=\left(R_2+\frac{R_1R_3}{R_1+R_3}\right)C$; $A_0=\frac{R_3}{R_1+R_3}$; $A_\infty=\frac{(R_1+R_2)R_3}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}$	

Продолжение табл. 8.2

№ по пор.	Электрическая схема	Передаточная функция, значения ее параметров и значения амплитуд $A_0 = A(0)$ и $A_\infty = A(\infty)$	Асимптотическая логарифмическая амплитудно-частотная характеристика
10		$W = \frac{k(\tau s + 1)}{Ts + 1}$; $k = \frac{R_4}{R_1 + R_2 + R_4}$; $\tau = (R_2 + R_3) C$; $T = \left[R_3 + \frac{(R_1 + R_4) R_2}{R_1 + R_2 + R_4}\right] C$; $A_0 = \frac{R_4}{R_1 + R_2 + R_4}$; $A_\infty = \frac{R_4 (R_2 + R_3)}{(R_1 + R_2 + R_4) R_3 + (R_1 + R_4) R_2}$	См. эскиз п. 7—9
11		$W = \frac{k(\tau s + 1)}{Ts + 1}$; $k = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$; $\tau = \frac{L_1}{R_2}$; $T = \frac{L_1}{R_1 + R_2}$; $A_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$; $A_\infty = 1$	
12		$W = \frac{k(\tau s + 1)}{Ts + 1}$; $k = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$; $\tau = \frac{L_2}{R_2}$. $T = \frac{L_1 + L_2}{R_1 + R_2}$; $A_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$; $A_\infty = \frac{L_2}{L_1 + L_2}$	
13		$W = \frac{k(\tau s + 1) s}{a_0 s^2 + a_1 s + 1}$; $k = \frac{R_2 R_3 C_2}{R_1 + R_2}$; $\tau = R_1 C_1$; $a_0 = k\tau$; $a_1 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C_1 + \left(R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right) C_2$; $A_0 = 0$; $A_1 = 1$	

14		$W=\dfrac{k(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}{a_0 s^2+a_1 s+1}$; $k=\dfrac{R_2}{R_1+R_2}$; $\tau_1=R_1C$; $\tau_2=\dfrac{L_1}{R_2}$; $a_0=\dfrac{R_1CL_1}{R_1+R_2}$; $a_1=\dfrac{R_1R_2C+L_1}{R_1+R_2}$; $A_0=\dfrac{R_2}{R_1+R_2}$; $A_\infty=1$	
15		$W=\dfrac{k(b_0 s^2+b_1 s+1)}{a_0 s^2+a_1 s+1}$; $k=\dfrac{C_1}{C_1+C_2}$; $b_0=L_1C_2$; $b_1=R_2C_2$; $a_0=\dfrac{L_1C_1C_2}{C_1+C_2}$; $a_1=\dfrac{(R_1+R_2)C_1C_2}{C_1+C_2}$; $A_0=\dfrac{C_1}{C_1+C_2}$; $A_\infty=1$	
16		$W=\dfrac{ks^2}{a_0 s^2+a_1 s+1}$; $k=R_1R_2C_1C_2$; $a_0=R_1R_2C_1C_2$; $a_1=R_1C_1+(R_1+R_2)C_2$; $A_0=0$; $A_\infty=1$	
17		$W=\dfrac{ks^2}{a_0 s^2+a_1 s+1}$: $k=R_2R_3C_1C_2$; $a_0=(R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1)C_1C_2$; $a_1=(R_1+R_2)C_1+(R_2+R_3)C_2$; $A_0=0$; $A_\infty=\dfrac{R_2R_3}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}$	

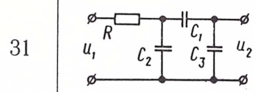
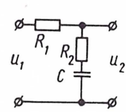
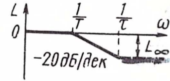
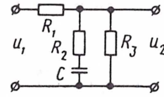
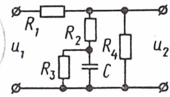
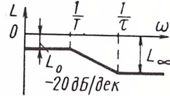
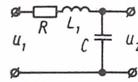
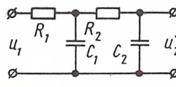
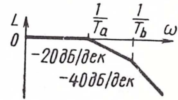
Продолжение табл. 8.2

№ по пор.	Электрическая схема	Передаточная функция, значения ее параметров и значения амплитуд $A_0 = A(0)$ и $A_\infty = A(\infty)$	Асимптотическая логарифмическая амплитудно-частотная характеристика
18	C, R, L_1, u_1, u_2	$W = \dfrac{k(\tau s + 1)s}{a_0 s^2 + a_1 s + 1}$; $k = a_1 = RC$; $\tau = \dfrac{L_1}{R}$; $a_0 = CL_1$; $A_0 = 0$; $A_\infty = 1$	L, 0, $\frac{1}{\tau}$, $\frac{1}{T_a}$, $\frac{1}{T_b}$, ω; +20 дб/дек; +40 дб/дек; +20 дб/дек
19	C, R, L_1, u_1, u_2	$W = \dfrac{ks^2}{a_0 s^2 + a_1 s + 1}$; $k = a_0 = CL_1$; $a_1 = RC$; $A_0 = 0$; $A_1 = 1$	L, 0, $\frac{1}{T_a}$, $\frac{1}{T_b}$, ω; +20 дб/дек; +40 дб/дек
20	R_1, L_1, C, R_2, L_2, u_1, u_2	$W = \dfrac{k(\tau s + 1)s}{a_0 s^2 + a_1 s + 1}$; $k = R_2 C$; $\tau = \dfrac{L_2}{R_2}$; $a_0 = (L_1 + L_2)C$; $a_1 = (R_1 + R_2)C$; $A_0 = 0$; $A_\infty = \dfrac{L_2}{L_1 + L_2}$	L, 0, $\frac{1}{\tau}$, $\frac{1}{T_a}$, $\frac{1}{T_b}$, ω, L_∞; +20 дб/дек; +40 дб/дек; +20 дб/дек
21	R_1, C_1, C_2, R_2, u_1, u_2	$W = \dfrac{k(\tau s + 1)s}{a_0 s^2 + a_1 s + 1}$; $k = R_2(C_1 + C_2)$; $\tau = \dfrac{R_1 C_1 C_2}{C_1 + C_2}$; $a_0 = R_1 R_2 C_1 C_2$; $a_1 = (R_1 + R_2)C_1 + R_2 C_2$; $A_0 = 0$; $A_\infty = 1$	L, 0, $\frac{1}{\tau}$, $\frac{1}{T_a}$, $\frac{1}{T_b}$, ω; +20 дб/дек; +40 дб/дек; +20 дб/дек

22		$W = \dfrac{k(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s \mp 1)}{a_0 s^2 + a_1 s + 1}$; $\tau_1 = R_1C_1$; $\tau_2 = R_2C_2$; $k = \dfrac{R_3R_4}{R_1(R_2+R_3+R_4)+R_3(R_2+R_4)}$; $a_1 = \dfrac{R_1R_3(R_2+R_4)C_1 + R_2[R_1(R_3+R_4)+R_3R_4]C_2}{R_1(R_2+R_3+R_4)+R_3(R_2+R_4)}$; $a_0 = k\tau_1\tau_2$; $A_0 = k$; $A_\infty = 1$	
23		$W = \dfrac{k(\tau s + 1)s^2}{a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + 1}$; $k = R_1R_2C_1C_2$; $\tau = \dfrac{L_1}{R_1}$; $a_0 = R_2L_1C_1C_2$; $a_1 = L_1(C_1 + C_2) + R_1R_2C_1C_2$; $a_2 = R_1C_1 + (R_1 + R_2)C_2$; $A_0 = 0$; $A_\infty = 1$	
24		$W = \dfrac{k(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)s}{a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + 1}$; $k = R_2(C_1 + C_2)$; $\tau_1 = \dfrac{L_1}{R_2}$; $\tau_2 = \dfrac{R_1C_1C_2}{C_1 + C_2}$; $a_0 = R_1L_1C_1C_2$; $a_1 = L_1(C_1 + C_2) + R_1R_2C_1C_2$; $a_2 = R_1C_1 + R_2(C_1 + C_2)$; $A_0 = 0$; $A_\infty = 1$	
25		$W = \dfrac{k(b_0 s^2 + b_1 s + 1)}{a_0 s^2 + a_1 s + 1}$; $k = \dfrac{R_3}{R_1 + R_3}$; $b_0 = R_1R_2C_1C_2$; $b_1 = R_2(C_1 + C_2)$; $a_0 = \dfrac{R_1R_2R_3C_1C_2}{R_1 + R_3}$; $a_1 = R_2(C_1 + C_2) + \dfrac{R_1R_3C_2}{R_1 + R_3}$; $A_0 = \dfrac{R_3}{R_1 + R_3}$; $A_\infty = 1$	

Продолжение табл. 8.2

№ по пор.	Электрическая схема	Передаточная функция, значения ее параметров и значения амплитуд $A_0 = A(0)$ и $A_\infty = A(\infty)$	Асимптотическая логарифмическая амплитудно-частотная характеристика
26	u_1, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, C_1, C_2, u_2	$W = \frac{k(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{a_0 s^2 + a_1 s + 1)}$; $\tau_1 = R_2 C_1$; $\tau_2 = R_3 C_2$; $k = \frac{R_4 R_5}{B}$; $a_0 = \frac{[R_1(R_4 + R_5) + R_4 R_5] R_2 R_3 C_1 C_2}{B}$; $a_1 = \frac{1}{B} \{[R_1(R_3 + R_4 + R_5) + R_4(R_3 + R_5)] R_2 C_1 + [(R_1 + R_2)(R_4 + R_5) + R_4 R_5] R_3 C_2\}$; $B = (R_1 + R_2)(R_3 + R_4 + R_5) + R_4(R_3 + R_5)$; $A_0 = k$; $A_\infty = \frac{R_4 R_5}{R_1(R_4 + R_5) + R_4 R_5}$	L, 0, $\frac{1}{\tau_1}$, $\frac{1}{\tau_2}$, $\frac{1}{T_a}$, $\frac{1}{T_b}$, ω, L_0, L_∞, +20 дб/дек, +40 дб/дек, +20 дб/дек
27	u_1, R, C, u_2	$W = \frac{1}{Ts + 1}$; $T = RC$; $A_0 = 1$; $A_\infty = 0$	L, 0, $\frac{1}{T}$, ω, −20 дб/дек
28	u_1, C_1, R, C_2, u_2	$W = \frac{k}{Ts + 1}$; $k = \frac{C_1}{C_1 + C_2}$; $T = \frac{RC_1 C_2}{C_1 + C_2}$; $A_0 = k$; $A_\infty = 0$	
29	u_1, R_1, L_1, R_2, u_2	$W = \frac{k}{Ts + 1}$; $k = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$; $T = \frac{L_1}{R_1 + R_2}$; $A_0 = k$; $A_\infty = 0$	
30	u_1, R_1, R_2, C, u_2	$W = \frac{k}{Ts + 1}$; $k = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$; $T = \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}$; $A_0 = k$; $A_\infty = 0$	L, 0, $\frac{1}{T}$, ω, L_0, −20 дб/дек

31		$W = \dfrac{k}{Ts+1}$; $k = \dfrac{C_1}{C_1+C_3}$; $T = \dfrac{R(C_1C_2+C_2C_3+C_3C_1)}{C_1+C_3}$; $A_0 = k$; $A_\infty = 0$	
32		$W = \dfrac{\tau s+1}{Ts+1}$; $\tau = R_2C$; $T = (R_1+R_2)C$; $A_0 = 1$; $A_\infty = \dfrac{R_2}{R_1+R_2}$	
33		$W = \dfrac{k(\tau s+1)}{Ts+1}$; $k = \dfrac{R_3}{R_1+R_3}$; $\tau = R_2C$; $T = \dfrac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_1+R_3}C$; $A_0 = k$; $A_\infty = \dfrac{R_2R_3}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}$	
34		$W = \dfrac{k(\tau s+1)}{Ts+1}$; $k = \dfrac{(R_2+R_3)R_4}{R_1(R_2+R_3+R_4)+R_4(R_2+R_3)}$; $\tau = \dfrac{R_2R_3C}{R_2+R_3}$; $T = \dfrac{[R_1(R_2+R_4)+R_2R_4]R_3C}{R_1(R_2+R_3+R_4)+R_4(R_2+R_3)}$; $A_0 = k$; $A_\infty = \dfrac{R_2R_4}{R_1(R_2+R_4)+R_2R_4}$	
35		$W = \dfrac{1}{a_0s^2+a_1s+1}$; $a_0 = L_1C$; $a_1 = RC$; $A_0 = 1$; $A_\infty = 0$	
36		$W = \dfrac{1}{a_0s^2+a_1s+1}$; $a_0 = R_1R_2C_1C_2$; $a_1 = R_1C_1+(R_1+R_2)C_2$; $A_0 = 1$; $A_\infty = 0$	

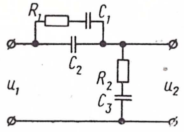
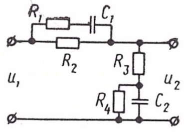
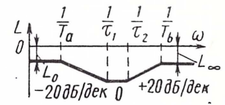
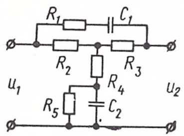
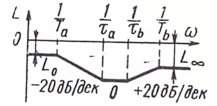
Продолжение табл. 8.2

№ по пор.	Электрическая схема	Передаточная функция, значения ее параметров и значения амплитуд $A_0 = A(0)$ и $A_\infty = A(\infty)$	Асимптотическая логарифмическая амплитудно-частотная характеристика
37	R, L_1, C_1, C_2; u_1, u_2	$W = \dfrac{k}{a_0 s^2 + a_1 s + 1}$; $k = \dfrac{C_1}{C_1 + C_2}$; $a_0 = \dfrac{C_1 C_2 L_1}{C_1 + C_2}$; $a_1 = \dfrac{R C_1 C_2}{C_1 + C_2}$; $A_0 = k$; $A_\infty = 0$	
38	R_1, L_1, C, R_2; u_1, u_2	$W = \dfrac{k}{a_0 s^2 + a_1 s + 1}$; $k = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$; $a_0 = \dfrac{R_2 L_1 C}{R_1 + R_2}$; $a_1 = \dfrac{R_1 R_2 C + L_1}{R_1 + R_2}$; $A_0 = k$; $A_\infty = 0$	L, 0, $\frac{1}{T_a}$, $\frac{1}{T_b}$, ω, L_0, -20 *дб/дек*, -40 *дб/дек*
39	R_1, R_2, C_1, R_3, C_2, R_4; u_1, u_2	$W = \dfrac{k}{a_0 s^2 + a_1 s + 1}$; $k = \dfrac{R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$; $a_0 = \dfrac{R_1 R_2 (R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} C_1 C_2$; $a_1 = \dfrac{R_1 (R_2 + R_3 + R_4) C_1 + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4) C_2}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$; $A_0 = k$; $A_\infty = 0$	
40	R_1, L_1, C, R_2, R_3; u_1, u_2	$W = \dfrac{k(\tau s + 1)}{a_0 s^2 + a_1 s + 1}$; $k = \dfrac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$; $\tau = R_2 C$; $a_0 = \dfrac{R_2 L_1 C}{R_1 + R_2 + R_3}$; $a_1 = \dfrac{(R_1 + R_3) R_2 C + L_1}{R_1 + R_3 + R_3}$; $A_0 = k$; $A_\infty = 0$	L, 0, $\frac{1}{T_a}$, $\frac{1}{T_b}$, $\frac{1}{\tau}$, ω, L_0, -20 *дб/дек*, -40 *дб/дек*, -20 *дб/дек*
41	R_1, R_2, R_3, C_1, R_4, C_2; u_1, u_2	$W = \dfrac{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{a_0 s^2 + a_1 s + 1}$; $\tau_1 = R_3 C_1$; $\tau_2 = R_4 C_2$; $a_0 = [R_1 (R_2 + R_3 + R_4) + R_3 (R_2 + R_4)] C_1 C_2$; $a_1 = (R_1 + R_3) C_1 + (R_1 + R_2 + R_4) C_2$; $A_0 = 1$; $A_\infty = \dfrac{R_3 R_4}{R_1 (R_2 + R_3 + R_4) + R_3 (R_2 + R_4)}$	L, 0, $\frac{1}{T_a}$, $\frac{1}{T_b}$, $\frac{1}{\tau_1}$, $\frac{1}{\tau_2}$, ω, L_∞, -20 *дб/дек*, -40 *дб/дек*, -20 *дб/дек*

42		$W=\dfrac{k(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}{a_0 s^2+a_1 s+1}$; $k=\dfrac{R_5}{R_1+R_2+R_5}$; $\tau_1=R_3C_1$; $\tau_2=R_4C_2$; $a_0=\dfrac{(R_1+R_3)[R_4(R_2+R_5)+R_2R_5]+R_1R_3(R_4+R_5)}{R_1+R_2+R_5}C_1C_2$; $a_1=\dfrac{[(R_1+R_3)(R_2+R_5)+R_1R_3]C_1+[(R_1+R_2)(R_4+R_5)+R_4R_5]C_2}{R_1+R_2+R_5}$. $A_0=k$; $A_\infty=\dfrac{R_3R_4R_5}{(R_1+R_3)[R_4(R_2+R_5)+R_2R_5]+R_1R_3(R_4+R_5)}$	
43		$W=\dfrac{\tau s+1}{a_0 s^2+a_1 s+1}$; $\tau=R_3C_2$; $a_0=R_1(R_2+R_3)C_1C_2$; $a_1=R_1C_1+(R_1+R_2+R_3)C_2$; $A_0=1$; $A_\infty=0$	
44		$W=\dfrac{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}{a_0 s^2+a_1 s+1}$; $\tau_1=R_1C_1$; $\tau_2=R_2C_2$; $a_0=R_1R_2C_1C_2$; $a_1=R_1C_1+(R_1+R_2)C_2$; $A_0=A_\infty=1$	
45		$W=\dfrac{b_0 s^2+b_1 s+1}{a_0 s^2+a_1 s+1}$; $b_0=a_0=R_1R_2C_1C_2$; $b_1=(R_1+R_2)C_1$; $a_1=(R_1+R_2)C_1+R_1C_2$; $A_0=A_\infty=1$	
46		$W=\dfrac{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}{a_0 s^2+a_1 s+1}$; $\tau_1=(R_1+R_2)C_1$; $\tau_2=R_3C_2$; $a_0=(R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1)C_1C_2$; $a_1=(R_1+R_2)C_1+(R_2+R_3)C_2$; $A_0=1$; $A_\infty=\dfrac{(R_1+R_2)R_3}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}$	

Продолжение табл. 8.2

№ по пор.	Электрическая схема	Передаточная функция, значения ее параметров и значения амплитуд $A_0 = A(0)$ и $A_\infty = A(\infty)$	Асимптотическая логарифмическая амплитудно-частотная характеристика
47		$W = \dfrac{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{a_0 s^2 + a_1 s + 1}$; $\tau_1 = R_2 C_1$; $\tau_2 = R_3 C_2$; $a_0 = (R_1 + R_3) R_2 C_1 C_2$; $a_1 = R_2 C_1 + (R_1 + R_2 + R_3) C_2$; $A_0 = 1$; $A_\infty = \dfrac{R_3}{R_1 + R_3}$	
48		$W = \dfrac{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{a_0 s^2 + a_1 s + 1}$; $\tau_1 = (R_1 + R_2) C_1$; $\tau_2 = R_3 C_2$; $a_0 = (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1) C_1 C_2$; $a_1 = (R_1 + R_2) C_1 + (R_2 + R_3) C_2$; $A_0 = 1$; $A_\infty = \dfrac{(R_1 + R_2) R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$	
49		$W = \dfrac{b_0 s^2 + b_1 s + 1}{a_0 s^2 + a_1 s + 1}$; $b_0 = [(R_1 + R_2 + R_3) R_4 + R_2 R_3] C_1 C_2$; $b_1 = (R_1 + R_2 + R_3) C_1 + R_4 C_2$; $a_0 = [(R_1 + R_2 + R_3) R_4 + (R_1 + R_3) R_2] C_1 C_2$; $a_1 = (R_1 + R_2 + R_3) C_1 + (R_2 + R_4) C_2$; $A_0 = 1$; $A_\infty = \dfrac{(R_1 + R_2 + R_3) R_4 + R_2 R_3}{(R_1 + R_2 + R_3) R_4 + (R_1 + R_3) R_2}$	
50		$W = \dfrac{k(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{a_0 s^2 + a_1 s + 1}$; $k = \dfrac{R_2 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$; $\tau_1 = R_1 C_1$; $\tau_2 = \dfrac{R_2 R_3 C_2}{R_2 + R_3}$; $a_0 = \dfrac{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2}{R_1 + R_2 + R_3}$; $a_1 = \dfrac{R_1 (R_2 + R_3) C_1 + R_3 (R_1 + R_2) C_2}{R_1 + R_2 + R_3}$; $A_0 = k$; $A_\infty = 1$	

51		$W = \frac{k(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{a_0 s^2 + a_1 s + 1}$; $k = \frac{C_1 + C_2}{C_1 + C_2 + C_3}$; $\tau_1 = \frac{R_1 C_1 C_2}{C_1 + C_2}$; $\tau_2 = R_2 C_3$; $a_0 = \frac{R_1 R_2 C_1 C_2 C_3}{C_1 + C_2 + C_3}$; $a_1 = \frac{R_1 C_1 (C_2 + C_3) + R_2 C_3 (C_1 + C_2)}{C_1 + C_2 + C_3}$; $A_0 = k$; $A_\infty = 1$	
52		$W = \frac{k(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{a_0 s^2 + a_1 s + 1}$; $k = \frac{R_3 + R_4}{R_2 + R_3 + R_4}$; $\tau_1 = (R_1 + R_2) C_1$; $\tau_2 = \frac{R_3 R_4 C_2}{R_3 + R_4}$; $a_0 = \frac{R_1 R_2 + (R_1 + R_2) R_3}{R_2 + R_3 + R_4} R_4 C_1 C_2$; $a_1 = \frac{[R_1 R_2 + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)] C_1 + (R_2 + R_3) R_4 C_2}{R_2 + R_3 + R_4}$; $A_0 = k$; $A_\infty = \frac{(R_1 + R_2) R_3}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2) R_3}$	
53		$W = \frac{k(b_0 s^2 + b_1 s + 1)}{a_0 s^2 + a_1 s + 1}$; $k = \frac{R_4 + R_5}{R_2 + R_4 + R_5}$; $b_0 = \frac{(R_1 + R_2 + R_3) R_4 + R_2 R_3}{R_4 + R_5} R_5 C_1 C_2$; $b_1 = \frac{[(R_1 + R_2 + R_3)(R_4 + R_5) + R_2 R_3] C_1 + R_4 R_5 C_2}{R_4 + R_5}$; $a_0 = \frac{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4) + R_2 R_4}{R_2 + R_4 + R_5} R_5 C_1 C_2$; $a_1 = \frac{[(R_1 + R_3)(R_2 + R_4 + R_5) + R_2 (R_4 + R_5)] C_1 + (R_2 + R_4) R_5 C_2}{R_2 + R_4 + R_5}$; $A_0 = k$; $A_\infty = \frac{(R_1 + R_2 + R_3) R_4 + R_2 R_3}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4) + R_2 R_4}$	

Продолжение табл. 8.2

№ по пор.	Электрическая схема	Передаточная функция, значения ее параметров и значения амплитуд $A_0 = A(0)$ и $A_\infty = A(\infty)$	Асимптотическая логарифмическая амплитудно-частотная характеристика
54	R_1, C_1, R_2, R_3, R_4, R_5, C_2, R_6, u_1, u_2	$W = \dfrac{k(b_0 s^2 + b_1 s + 1)}{a_0 s^2 + a_1 s + 1}$; $k = \dfrac{(R_4 + R_5) R_6}{(R_2 + R_3 + R_6)(R_4 + R_5) + R_2(R_3 + R_6)}$; $b_0 = \dfrac{(R_1 + R_2 + R_3) R_4 + R_2 R_3}{R_4 + R_5} R_5 C_1 C_2$; $b_1 = \dfrac{[(R_1 + R_2 + R_3)(R_4 + R_5) + R_2 R_3] C_1 + R_4 R_5 C_2}{R_4 + R_5}$; $a_0 = \dfrac{[(R_1 R_3 + R_3 R_6 + R_6 R_1)(R_2 + R_4) + R_2 R_4 (R_1 + R_6)] R_5 C_1 C_2}{(R_2 + R_3 + R_6)(R_4 + R_5) + R_2 (R_3 + R_6)}$; $a_1 = \dfrac{[(R_1 R_3 + R_3 R_6 + R_6 R_1)(R_2 + R_4 + R_5) + R_2 (R_1 + R_6)(R_4 + R_5)] C_1 + [(R_2 + R_4)(R_3 + R_6) + R_2 R_4] C_2}{(R_2 + R_3 + R_6)(R_4 + R_5) + R_2 (R_3 + R_6)}$; $A_0 = k$; $A_\infty = \dfrac{[(R_1 + R_2 + R_3) R_4 + R_2 R_3] R_6}{(R_1 R_3 + R_3 R_6 + R_6 R_1)(R_2 + R_4) + R_2 R_4 (R_1 + R_6)}$	L, 0, $\frac{1}{\tau_a}$, $\frac{1}{T_a}$, $\frac{1}{T_b}$, $\frac{1}{\tau_b}$, ω, L'_0, 0, L_∞, + 20дб/дек, − 20дб/дек
55	R_1, C_1, R_2, C_2, R_3, u_1, u_2	$W = \dfrac{ks}{a_0 s^2 + a_1 s + 1}$; $k = \dfrac{R_2 R_3 C_1}{R_1 + R_2}$; $a_0 = \dfrac{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2}{R_1 + R_2}$; $a_1 = \left(R_3 + \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right) C_1 + R_3 C_2$; $A_0 = A_\infty = 0$	L, 0, $\frac{1}{T_a}$, $\frac{1}{T_b}$, ω, 0, L_τ, +20дб/дек, −20дб/дек

56	R_1, C, R_2, L_1, R_3, R_4, u_1, u_2	$W = \dfrac{ks}{a_0 s^2 + a_1 s + 1}$; $k = \dfrac{R_3 R_4 C}{R_2 + R_3 + R_4}$; $a_0 = \dfrac{(R_1 + R_3)\,CL_1}{R_2 + R_3 + R_4}$; $a_1 = \dfrac{[(R_1 + R_3)(R_2 + R_4) + R_1 R_3]\,C + L_1}{R_2 + R_3 + R_4}$; $A_0 = A_\infty = 0$	
57	R_1, C, R_2, L_1, R_3, R_4, u_1, u_2	$W = \dfrac{k(\tau s + 1)\,s}{a_0 s^2 + a_1 s + 1}$; $k = \dfrac{R_3 R_4 C}{R_2 + R_3 + R_4}$; $\tau = \dfrac{L_1}{R_4}$; $a_0 = \dfrac{(R_1 + R_3)\,CL_1}{R_2 + R_3 + R_4}$; $a_1 = \dfrac{[(R_1 + R_3)(R_2 + R_4) + R_1 R_3]\,C + L_1}{R_2 + R_3 + R_4}$; $A_0 = 0$; $A_\infty = \dfrac{R_3}{R_1 + R_3}$	L, 0, $\frac{1}{T_a}$, $\frac{1}{T_b}$, $\frac{1}{\tau}$, ω, 0, L_∞, +20 дб/дек, −20 дб/дек
58	R_1, L_1, C, R_2, u_1, u_2	$W = \dfrac{ks}{a_0 s^2 + a_1 s + 1}$; $k = R_2 C$; $a_0 = CL_1$; $a_1 = (R_1 + R_2)\,C$; $A_0 = A_\infty = 0$	
59	R_1, R_2, C_1, C_2, R_3, u_1, u_2	$W = \dfrac{ks}{a_0 s^2 + a_1 s + 1}$; $k = \dfrac{R_2 R_3 C_1}{R_1 + R_2}$; $a_0 = \dfrac{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2}{R_1 + R_2}$; $a_0 = \dfrac{[R_1 (R_2 + R_3) + R_2 R_3]\,C_1 + (R_1 + R_2)\,R_3 C_2}{R_1 + R_2}$; $A_0 = A_\infty = 0$	L, 0, $\frac{1}{T_a}$, $\frac{1}{T_b}$, ω, 0, L_τ, +20 дб/дек, −20 дб/дек

Продолжение табл. 8.2

№ по пор.	Электрическая схема	Передаточная функция, значения ее параметров и значения амплитуд $A_0 = A(0)$ и $A_\infty = A(\infty)$	Асимптотическая логарифмическая амплитудно-частотная характеристика
60	C_1 R_2 R_3 R_1 u_1 R_4 C_2 C_3 u_2	$W = \dfrac{k(\tau s + 1)}{a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + 1}$; $k = \dfrac{R_4}{R_1 + R_4}$; $\tau = R_1 C_1$; $a_0 = \dfrac{R_1 R_2 R_3 R_4 C_1 C_2 C_3}{R_1 + R_4}$; $a_1 = \dfrac{R_1 R_2 R_4 C_1 C_2 + R_1 (R_2 + R_3) R_4 (C_1 + C_2) C_3 + R_2 R_3 R_4 C_2 C_3}{R_1 + R_4}$; $a_2 = \dfrac{R_1 R_4 (C_1 + C_2 + C_3) + (R_1 + R_4) R_2 (C_2 + C_3) + (R_1 + R_4) R_3 C_3}{R_1 + R_4}$; $A_0 = k$; $A_\infty = 0$	L 0 $\frac{1}{\tau}$ $\frac{1}{T_a}$ $\frac{1}{T_b}$ $\frac{1}{T_c}$ ω L_0 +20 дб/дек −20 дб/дек −40 дб/дек
61	R_1 C_1 R_2 u_1 L_1 u_2 C_2	$W = \dfrac{(\tau s + 1)(b_0 s^2 + b_1 s + 1)}{a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + 1}$; $\tau = R_1 C_1$; $b_0 = L_1 C_2$; $b_1 = R_2 C_2$; $a_0 = R_1 C_1 C_2 L_1$; $a_1 = (R_1 R_2 C_1 + L_1) C_2$; $a_2 = (R_1 + R_2) C_2 + R_1 C_1$; $A_0 = A_\infty = 1$	L 0 $\frac{1}{T_a}$ $\frac{1}{\tau_a}$ $\frac{1}{T_b}$ $\frac{1}{\tau_b}$ $\frac{1}{\tau_c}$ $\frac{1}{T_c}$ ω −20 дб/дек −20 дб/дек +20 дб/дек
62	R_1 L_1 R_2 C_1 R_3 u_1 u_2 C_2	$W = \dfrac{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + 1}$; $\tau_1 = R_2 C_1$; $\tau_2 = R_3 C_2$; $a_0 = R_2 C_1 C_2 L_1$; $a_1 = [(R_1 + R_3) R_2 C_1 + L_1] C_2$; $a_2 = R_2 C_1 + (R_1 + R_2 + R_3) C_2$; $A_0 = 1$; $A_\infty = 0$	L 0 $\frac{1}{T_a}$ $\frac{1}{\tau_1}$ $\frac{1}{\tau_2}$ $\frac{1}{T_b}$ $\frac{1}{T_c}$ ω −20 дб/дек +20 дб/дек −20 дб/…
63	R_2 R_1 C_1 u_2 u_1 R_1 C_1 R_2	$W = \dfrac{1 - \tau s}{Ts + 1}$; $\tau = (R_2 - R_1) C$; $T = (R_2 - R_1) C$; $R_2 > R_1$; $A_0 = 1$; $A_\infty = \dfrac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1}$	L 0 $\frac{1}{T}$ $\frac{1}{\tau}$ ω −20 дб/дек L_∞ φ, град 0 ω −180

64	u_1, u_2, R_1, R_2, C	$W = \dfrac{k(1-\tau s)}{Ts+1}$; $k = \dfrac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}$; $\tau = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 - R_2} C$; $T = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C$; $R_1 > R_2$; $A_0 = k$; $A_\infty = 1$	L, 0, $\frac{1}{\tau}$, $\frac{1}{T}$, ω, L_0, +20 дб/дек; φ, град, 0, -180, ω
65	u_1, u_2, R, C	$W = \dfrac{1-\tau s}{1+Ts}$; $\tau = T = RC$; $A_0 = A_\infty = 1$	L, 0, $\frac{1}{\tau}$, ω; φ, град, 0, -90, -180, ω
66	u_1, u_2, R, C, L_1	$W = \dfrac{\tau^2 s^2 - 2\zeta\tau s + 1}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}$; $\tau = T = \sqrt{L_1 C}$; $\zeta = \xi = \dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L_1}}$; $A_0 = A_\infty = 1$	L, 0, $\frac{1}{\tau}$, ω; φ, град, 0, -180, -360, ω
67	u_1, u_2, R, L_1, C	$W = \dfrac{\tau^2 s^2 + 1}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}$ $\tau = T = \sqrt{L_1 C}$; $\xi = \dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L_1}}$; $A_0 = A_\infty = 1$	L, 0, $\frac{1}{\tau}$, ω; φ, град, 0, -180, -360, ω

четырехполюсника не менее чем в 10—100 раз превышают наибольший импеданс предыдущего четырехполюсника.

Встречаются САР с дифференциальной (балансной) цепью передачи сигнала, т. е. с передачей сигнала в виде разности $u = u_a - u_b$ двух напряжений постоянного тока. Таким путем обычно поступает сигнал на встречно включенные обмотки управления электромашинного и магнитного усилителей. Для преобразования сигнала в соответствии с передаточной функцией $W_п$ в дифференциальную цепь необходимо включить два пассивных четырехполюсника (рис. 8.20, *а*) с передаточными функциями $W_п$.

Вместо двух интегрирующих четырехполюсников можно включить двухполюсник (рис. 8.20, *б*) параллельно взаимно связанным обмоткам на выходе цепи. Такое включение обеспечивает преобразование сигнала по передаточной функции

$$W_э = \frac{I_2}{I_1} = \frac{Z_д}{Z_д - 2\left[(L_0 - M_0)s + R_0\right]}, \tag{8.56}$$

где $I_1 = I_1(s)$ и $I_2 = I_2(s)$ — соответственно изображения $i_1 = i_{a1} - i_{b1}$ и $i_{a2} = i_2 - i_{b2}$; R_0, L_0 и M_0 — сопротивление, индуктивность и взаимоиндуктивность каждой из обмоток; $z_д = z_д(s)$ — импеданс двухполюсника в операторной форме.

Например, при $Z_д = R_д$

$$W_э = \frac{k}{Ts + 1},$$

где

$$k = \frac{R_д}{R_д + 2R_0}; \quad T = \frac{2(L_0 + M_0)}{R_д + 2R_0},$$

что эквивалентно включению четырехполюсника № 28 табл. 8.2.

При

$$Z_д = \frac{1}{\omega C_д}$$

$$W_э = \frac{1}{a_0 s^2 + a_1 s + 1},$$

где

$$a_0 = 2C_д(L_0 + M_0) \text{ и } a_1 = 2R_0 C_д,$$

и это эквивалентно включению четырехполюсника № 35 или 36 (табл. 8.2).

Активные четырехполюсники постоянного тока — это сочетания электронных усилителей и цепей из резисторов, конденсаторов и индуктивностей.

Схема такого четырехполюсника показана на рис. 8.21. В общем случае он содержит входную цепь с импедансом $Z_п$ и цепь с импедансом Z_0, которая охватывает усилитель отрицательной обратной связью. Обычно используют операционный усилитель с весьма большим передаточным коэффициентом. Тогда передаточная функ-

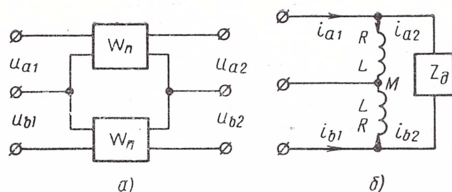


Рис. 8.20. Включение пассивных элементов в дифференциальную цепь:
а — четырехполюсников; *б* — двухполюсника

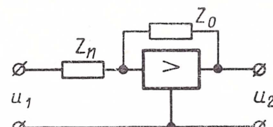


Рис. 8.21. Схема активного четырехполюсника постоянного тока

ция четырехполюсника с большой точностью определяется равенством

$$W_а = -\frac{Z_0}{Z_п}, \tag{8.57}$$

где $Z_п = Z_п(s)$ и $Z_0 = Z_0(s)$ — импеданцы прямой цепи и обратной связи в операторной форме.

Активные четырехполюсники могут быть выполнены так, что их свойства будут близки к идеальным дифференцирующим, форсирующим или интегрирующим звеньям. В этом основное преимущество таких элементов.

Например, при $Z_п = \frac{1}{Cs}$ и $Z_0 = R_0$

$$W_a \approx -RCs$$

и активный четырехполюсник практически идеально дифференцирует сигнал.

При $Z_п = \frac{R}{RCs+1}$ (параллельное соединение резистора сопротивлением R и конденсатора емкостью C) и $Z_0 = R_0$

$$W_а \approx \frac{R_0}{R}(RCs+1)$$

и четырехполюсник приближается к идеальному форсирующему звену.

На входе активного четырехполюсника легко осуществлять суммирование сигналов. Одновременно с преобразованием сигнала может быть получено значительное усиление.

Таким образом, активные четырехполюсники имеют значительно более совершенные динамические свойства, чем пассивные. Однако если усилитель выполнен на лампах, то активные четырехполюсники значительно сложнее пассивных и соответственно стоимость первых много выше.

Проще и дешевле активные четырехполюсники с полупроводниковым усилителем. Дифференцирующий элемент может быть выполнен по одной из схем, показанных на рис. 8.22. Передаточная функция схемы с общей базой (рис. 8.22, *а*)

$$W = ks, \tag{8.58}$$

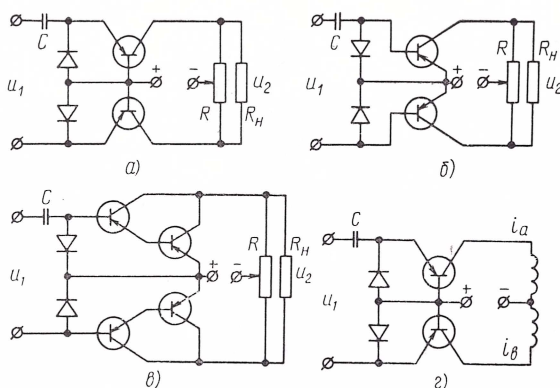


Рис. 8.22. Схема полупроводникового дифференцирующего элемента:
а — с общей базой; *б* — с общим эмиттером; *в* — двухкаскадного; *г* — с балансной нагрузкой

где $k = \alpha R_э C$; α — коэффициент усиления триода по току;

$$R_э = \frac{RR_н}{2\,(R + R_н)}.$$

Для схемы с общим эмиттером (рис. 8.22, *б*) коэффициент передаточной функции (8.58) $k = \frac{\alpha}{1-\alpha} R_э C$. При двухкаскадной схеме (рис. 8.22, *в*) $k = \frac{R_э C}{(1-\alpha)^2}$. В схеме с балансной нагрузкой (рис. 8.22, *г*) $k = \alpha C$, если выходной величиной считать разность токов $i = i_a - i_b$ двух обмоток. Индуктивность обмоток практически не влияет на динамические свойства схемы.

Выражение (8.58) справедливо для достаточно широкого диапазона частот: практически до $\omega = 200 \div 300$ с$^{-1}$.

Дифференцирующий трансформатор — это трансформатор весьма малой мощности, используемый для дифференцирования сигнала постоянного тока (рис. 8.23, *а*). Если пренебречь рассеянием, то при $R_н \approx \infty$ его передаточная функция [55]

$$W_т = \frac{k_т s}{T_1 s + 1}, \tag{8.59}$$

где

$$k_т = \frac{k_{тр} L_1}{R_0 + R_1}; \quad T_1 = \frac{L_1}{R_0 + R_1};$$

$k_{тр}$ — коэффициент трансформации: $k_{тр} = \frac{w_2}{w_1}$; R_1 и L_1 — сопротивление и индуктивность первичной обмотки; w_1 и w_2 — число витков первичной и вторичной обмоток; R_0 — входное сопротивление.

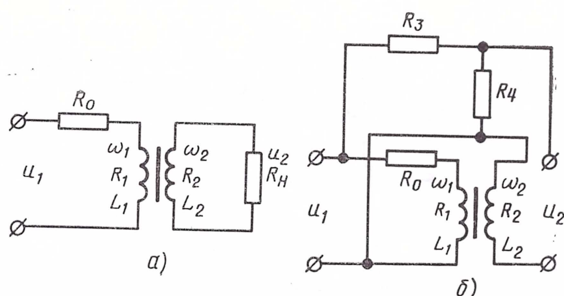


Рис. 8.23. Дифференцирующий трансформатор:
а — простейшая схема; *б*—схема сложения сигнала и его производной

При конечном значении сопротивления $R_н$ нагрузки

$$W_т = \frac{\alpha k_т s}{(T_1 + T_2)\, s + 1}, \tag{8.60}$$

где

$$\alpha = \frac{R_н}{R_2 + R_н}; \quad T_2 = \frac{L_2}{R_2 + R_н};$$

R_2 и L_2 — сопротивление и индуктивность вторичной обмотки трансформатора.

Дифференцирующий трансформатор часто используют в качестве параллельного корректирующего устройства. Он позволяет избежать гальванической связи между цепями входного и выходного сигналов, что в ряде случаев необходимо и не может быть достигнуто при использовании четырехполюсников постоянного тока. Если гальваническая связь допустима, то включение трансформатора по схеме, показанной на рис. 8.23, *б*, позволяет получить выходной сигнал в виде суммы двух составляющих. Одна из них пропорциональна входному сигналу, другая — производной от него. Передаточная функция этой схемы (при $R_н \approx \infty$)

$$W_т = \frac{k_т (\tau s + 1)}{T_1 s + 1}, \tag{8.61}$$

где

$$k_т = \frac{R_4}{R_3 + R_4}; \quad \tau = \frac{(R_3 + R_4)\, k_т L_1}{R_4 (R_0 + R_1)}.$$

В первичную или во вторичную цепь дифференцирующего трансформатора можно включить пассивный четырехполюсник, тогда можно получить элементы с различными более сложными передаточными функциями.

Тахогенератор постоянного тока представляет собой генератор весьма малой мощности с независимым возбуждением или с возбуждением от постоянных магнитов. Его напряжение при холостом ходе можно считать пропорциональным скорости вращения

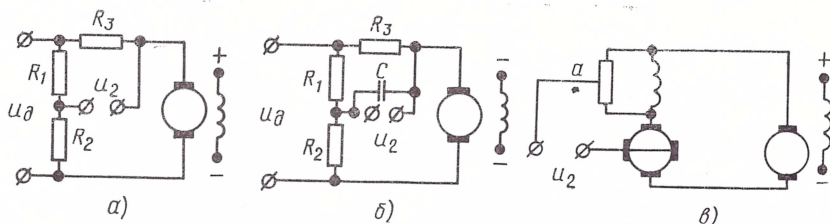


Рис. 8.24. Тахометрический мост:

а — простейшая схема; *б* — схема с фильтром; *в* — снятие напряжения, пропорционального скорости вращения в схеме ГД

якоря или производной от угла поворота α. При этом передаточная функция

$$W_{\text{ТГ}} = k_{\text{ТГ}} s, \tag{8.62}$$

где $k_{\text{ТГ}}$ — передаточный коэффициент.

Передаточные функции тахогенератора при конечном значении сопротивления $R_{\text{н}}$ нагрузки, а также при соединении тахогенератора с простейшими пассивными четырехполюсниками приведены в табл. 8.3.

Серьезным недостатком коллекторных тахогенераторов постоянного тока является наличие пульсаций выходного напряжения. От этого недостатка свободны бесконтактные тахогенераторы постоянного тока, состоящие из синхронного генератора и полупроводникового блока управления. Бесконтактные тахогенераторы получают возбуждение от постоянных магнитов, расположенных на роторе. Срок службы их в 8—10 раз больше, чем коллекторных тахогенераторов.

Тахометрические мосты позволяют получать сигналы, пропорциональные производным от угла поворота α электродвигателя без помощи тахогенератора. Простейшая схема тахометрического моста с электродвигателем постоянного тока приведена на рис. 8.24, *а*. Его передаточная функция в первом приближении [110]

$$W_{\text{м}} = \frac{U_2(s)}{\alpha(s)} = k_{\text{м}}(T_{\text{м}} s + 1) s, \tag{8.63}$$

где

$$k_{\text{м}} = \frac{C_e R_1}{R_1 + R_2}; \quad T_{\text{м}} = \left(R_{\text{я}} - \frac{R_2 R_3}{R}\right) \frac{I}{C_e C_{\text{М}}};$$

$C_e = \dfrac{U_{\text{н}} - R_{\text{я}} I_{\text{н}}}{\omega_{\text{н}}}$; $C_{\text{м}} = \dfrac{C_e}{9{,}81}$ — постоянные двигателя; $U_{\text{н}}$, $I_{\text{н}}$, $\omega_{\text{н}}$ — соответственно номинальные значения напряжения, тока и угловой скорости вращения двигателя (паспортные данные); $R_{\text{я}}$ — сопротивление обмотки якоря.

Если мост уравновешен:

$$R_1 R_{\text{я}} = R_2 R_3, \tag{8.64}$$

Таблица 8.3

Корректирующие устройства с тахогенератором постоянного тока ($k_г$, $R_г$, $L_г$ — передаточный коэффициент, сопротивление и индуктивность тахогенератора)

Электрическая схема	Передаточная функция, значения ее параметров и значения амплитуды $A_0 = A(0)$ и $A_\infty = A(\infty)$	Асимптотическая ЛАЧХ
	$W = \frac{ks}{Ts+1}$; $k = k_г$ $T = \frac{L_г}{R_г + R_н}$; $A_0 = 0$; $A_\infty = \frac{k_г(R_г + R_н)}{L_г}$	
	$W = \frac{ks}{Ts+1}$; $k = k_г$; $T = \frac{L_г}{R_г + R}$; $A_0 = 0$; $A_\infty = \frac{k_г(R_г + R)}{L_г}$	
	$W = \frac{ks^2}{a_0 s^2 + a_1 s + 1}$; $k = k_г RC$; $a_0 = CL_г$; $a_1 (R_г + R) C$; $A_0 = 0$; $A_\infty = \frac{k_г R}{L_г}$	
	$W = \frac{ks}{a_0 s^2 + a_1 s + 1}$; $k = k_г$; $a_0 = CL_г$; $a_1 = (R_г + R) C$; $A_0 = A_\infty = 0$	
	$W = \frac{k_г Z_2 s}{Z_г + Z_1 + Z_2}$; $Z_г = R_г + L_г s$	—
	$W = \frac{k_г Z_2 Z_3 s}{(Z_1 + Z_2 + Z_3) Z_г + Z_2 (Z_1 + Z_3)}$; $Z_г = R_г + L_г s$	—

то

$$W_{\text{м}} = k_{\text{м}} s. \tag{8.65}$$

Равенство (8.64) проверяют при заторможенном якоре двигателя; в этих условиях u_2 должно быть равно нулю.

Для сглаживания пульсаций, вызываемых наличием коллектора, в тахометрический мост включают конденсатор $C_{\text{ф}}$ (рис. 8.24, *б*). Тогда передаточная функция уравновешенного моста [94]

$$W_{\text{м}} = \frac{k_{\text{м}} s}{T_{\text{м}} s + 1}, \tag{8.66}$$

где

$$T_{\text{м}} = C_{\text{ф}} \left(\frac{R_3 R_{\text{я}}}{R_3 + R_{\text{я}}} + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right).$$

В электроприводе, выполненном по схеме генератор—двигатель с электромашинным усилителем, создавать тахометрический мост не нужно. Напряжение u_2, пропорциональное производной от угла поворота якоря двигателя, снимается как показано на рис. 8.24, *b*.

Если

$$R_1 = \frac{1}{2} \left[R_{\text{к}} + R_{\text{д}} \left(1 + \frac{R_{\text{к}}}{R_{\text{ко}}} \right) \right],$$

то передаточная функция

$$W_{\text{м}} = \frac{U_2(s)}{\alpha(s)} = \frac{1}{2} C_e s. \tag{8.67}$$

Здесь $R_{\text{ко}}$ — сопротивление компенсационной обмотки ЭМУ; $R_{\text{к}}$ — сопротивление, шунтирующее компенсационную обмотку; R_1 — часть сопротивления $R_{\text{к}}$ от продольной щетки ЭМУ до точки *a*.

Более точные передаточные функции тахометрических мостов даны в работе [130]. Там же показано, как изменять некоторые постоянные этих передаточных функций.

Недостатком тахометрического моста является малый передаточный коэффициент $k_{\text{м}}$. Кроме того, при неточном удовлетворении равенства (8.64) напряжение u_2 на выходе моста будет иметь составляющую, пропорциональную напряжению $u_{\text{д}}$. Тогда включение моста в цепь местной обратной связи вызовет создание непредусмотренной обратной связи (положительной или отрицательной) по напряжению $u_{\text{д}}$ двигателя.

Глава 9

МЕТОДЫ СИНТЕЗА СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ ПО ОТКЛОНЕНИЮ

Синтез САР имеет своей целью выбор ее структуры и параметров так, чтобы удовлетворялись определенные (заданные) требования к качеству регулирования. При этом известен объект регулирования, т. е. имеются его характеристики (математическое описание), а иногда уже выбраны основные функциональные элементы регулятора.

Синтез САР есть лишь один из этапов ее проектирования. Синтезу предшествует, по крайней мере, следующее:

1. Исследование объекта регулирования для определения его динамических свойств и условий, в которых его используют. Динамические свойства определяют либо теоретически, либо экспериментально и фиксируют в виде дифференциального уравнения (системы уравнений) или передаточной функции, или частотных характеристик. При анализе условий использования объекта выявляют действующие на него возмущения и стабильность его параметров или возможную их зависимость от каких-то факторов.

2. Составление требований к качеству регулирования. Требования определяются назначением объекта, а также опытом проектирования и эксплуатации САР такого же класса. Верхний предел, оптимальные показатели качества (которые далеко не всегда достижимы) определяются теорией. При составлении требований необходимо учитывать ограничения, налагаемые на динамические характеристики системы допустимыми нагрузками элементов, подводимой мощностью и т. д.

3. Выбор основных элементов регулятора (датчика регулируемой величины, элемента сравнения, усилителя и исполнительного элемента) и определение их динамических свойств.

После синтеза, т. е. отыскания структуры и параметров регулятора, выполняют последующие этапы проектирования: выбор технических средств для реализации найденной структуры и параметров; энергетический расчет [76] и согласование характеристик элементов; изготовление макета регулятора; определение динами-

ческих характеристик системы (с макетом регулятора); уточнение параметров регулятора. При этом из возможных решений должно быть выбрано оптимальное в отношении массы, габаритных размеров, стоимости и других требований, определяемых конкретными условиями эксплуатации.

В теории автоматического регулирования есть ряд методов синтеза. Это объясняется разнообразием исходных данных и требований.

При синтезе системы непрерывного регулирования по отклонению основа ее структуры уже задана. В этом случае характерны два варианта постановки задачи. Первый из них допускает лишь выбор некоторых параметров (вероятнее всего, передаточного коэффициента разомкнутой системы и постоянных времени корректирующих устройств). Второй разрешает уточнение структуры: выбор местных обратных связей, а также элементов, обеспечивающих астатизм, и корректирующих устройств, и выбор части параметров.

Требования к качеству регулирования в общем случае определяют как статические, так и динамические свойства системы. При этом возможны различные формулировки требований в зависимости от назначения системы, используемого метода синтеза и т. д.

По проблемам синтеза обыкновенных линейных САР имеется обширная литература: монографии [11, 17, 22, 93, 116] и книги о синтезе систем определенного назначения [7, 16, 30, 35, 44, 46, 52, 68, 70, 90, 126].

Дальнейшее совершенствование методов проектирования САР в значительной степени связано с применением современной вычислительной техники (ЦВМ). При синтезе САР с использованием ЦВМ можно рассматривать объект без излишнего упрощения уравнений, описывающих его свойства, исследовать влияние всех корней характеристического уравнения любого порядка, оценивать достаточно большое число вариантов решения и выбирать оптимальный. Наиболее систематизированный материал о синтезе с помощью ЦВМ имеется в работе [11], где приведены, в частности, машинные алгоритмы вычисления нулей и полюсов передаточной функции и ее разложения на компоненты.

Ниже изложен порядок синтеза линейных систем непрерывного регулирования по отклонению при наиболее характерных вариантах требований и наиболее широко применяемыми методами.

9.1. ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ ПО ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТИ

Простейшая задача синтеза САР, встречающаяся при инженерных расчетах, это выбор ее параметров при известной структуре по заданной точности (допустимой ошибке) в установившемся режиме. Иногда выбору подлежит лишь один параметр — передаточный коэффициент разомкнутой системы.

Эта задача имеет несколько основных вариантов.

1. В статической системе стабилизации установившаяся ошибка x_{0f} от постоянного возмущения f_0 не должна превышать α от установившегося значения y_0 регулируемой величины; выбирают значение k передаточного коэффициента разомкнутой системы, гарантирующее выполнение этого требования.

В установившемся режиме (при единичной обратной связи) в %

$$\alpha = \frac{x_{0f}}{y_0} 100 = \frac{W_f(0) f_0}{W_g(0) g_0} 100 = \frac{k_f f_0}{k g_0} 100, \tag{9.1}$$

где W_f и W_g — передаточные функции замкнутой системы относительно возмущения и задающего воздействия; k_f — передаточный коэффициент цепи от возмущения до регулируемой величины; g_0 — задающее воздействие.

Следовательно, необходимо иметь

$$k \geqslant \frac{k_f f_0}{\alpha g_0} 100. \tag{9.2}$$

Если в системе предусмотрено изменение регулируемой величины в некоторых пределах, то относительная ошибка не должна превышать α при минимальном значении регулируемой величины, т. е. в формулу (9.2) нужно подставлять минимальное значение $g_{0\,\min}$ задающего воздействия.

2. В системе стабилизации коэффициент статизма должен быть равен S_0; выбирают значение передаточного коэффициента k разомкнутой системы, при котором это условие будет выполнено.

По определению коэффициент статизма

$$S = \frac{1}{1+k}. \tag{9.3}$$

Следовательно, коэффициент статизма будет иметь заданное значение S_0, если

$$k = \frac{1-S_0}{S_0}. \tag{9.4}$$

3. В астатической следящей системе, задающее воздействие которой $g(t) = g_0 + g_1 t$, установившаяся ошибка слежения не должна превышать β; выбирают передаточный коэффициент k разомкнутой системы.

На основании формулы (7.5)

$$\beta \geqslant C_0 (g_0 + gt) + C_1 g_1 = \frac{g_1}{k},$$

так как в астатической системе $C_0 = 0$, $C_1 = \frac{1}{k}$.

Следовательно,

$$k \geqslant \frac{g_1}{\beta}. \tag{9.5}$$

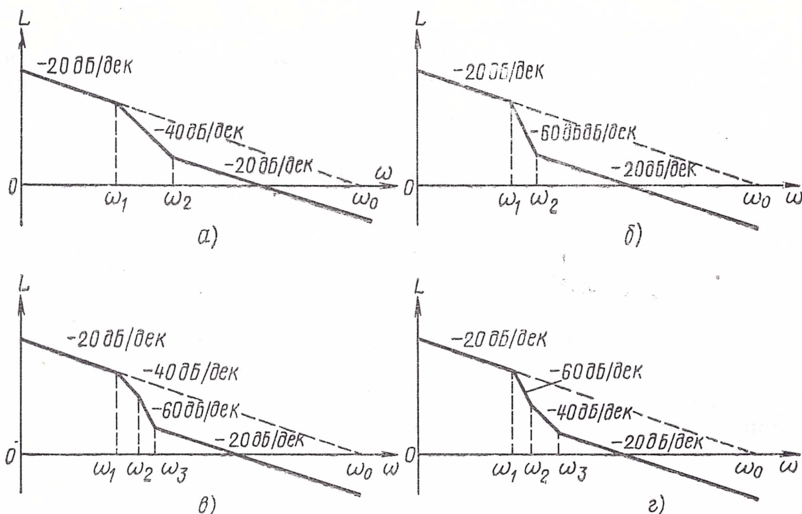


Рис. 9.1. Основные варианты низкочастотной части ЛАЧХ разомкнутой астатической системы

4. В астатической следящей системе необходимо иметь заданные значения C_1 и C_2 коэффициентов ошибки от задающего воздействия; отыскивают ограничение на логарифмическую амплитудно-частотную характеристику разомкнутой системы, обеспечивающее это условие.

Предположим, что среднечастотная асимптота ЛАЧХ разомкнутой системы (рис. 9.1, *а*) достаточно велика. Тогда передаточная функция разомкнутой системы

$$W \approx \frac{k(\tau_2 s + 1)}{s(T_1 s + 1)},$$

где

$$T_1 = \frac{1}{\omega_1}, \quad \tau_2 = \frac{1}{\omega_2}.$$

По формулам № 2 табл. 7.1 в данном случае при $\beta_0 = \beta_1 = 0$; $\beta_2 = \tau_2$; $b_0 = 0$ и $b_1 = T_1$ коэффициенты ошибки слежения имеют следующие значения:

$$C_1 = \frac{1}{k} \text{ и } C_2 = \frac{b_1 - (1 + k\beta_2) C_1}{k} = \frac{T_1 - \tau_2}{k} - \frac{1}{k^2}.$$

При достаточно большом k вторым членом в выражении для C_2 можно пренебречь. Тогда из составленных равенств следует, что низкочастотная часть ЛАЧХ должна удовлетворять таким требованиям:

$$\omega_0 \geqslant \frac{1}{C_1}; \quad \frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} \geqslant \frac{C_2}{C_1}. \tag{9.6}$$

Если низкочастотная часть ЛАЧХ имеет форму, показанную на рис. 9.1, *б*, *в* и *г*, то при аналогичных допущениях требования к ней выражаются соответственно следующими неравенствами:

$$\omega_0 \geqslant \frac{1}{C_1}; \quad \frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} \geqslant \frac{C_2}{2C_1}; \qquad (9.7)$$

$$\omega_0 \geqslant \frac{1}{C_1}; \quad \frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} - \frac{2}{\omega_3} \geqslant \frac{C_2}{C_1}; \qquad (9.8)$$

$$\omega_0 \geqslant \frac{1}{C_1}; \quad \frac{2}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} - \frac{1}{\omega_3} \geqslant \frac{C_2}{C_1}. \qquad (9.9)$$

5. В статической следящей системе установившееся значение ошибки не должно превышать β при постоянном задающем воздействии g_0 и постоянном возмущении f_0; отыскивают значение передаточного коэффициента k разомкнутой системы.

В установившемся режиме (при единичной обратной связи)

$$x_0 = \frac{g_0}{1+k} + \frac{k_f f_0}{1+k},$$

где k_f — передаточный коэффициент цепи от возмущения до регулируемой величины.

Следовательно, необходимо иметь

$$k \geqslant \frac{g_0 + k_f f_0}{\beta} - 1. \qquad (9.10)$$

6. В следящей системе с гармоническим задающим воздействием

$$g = g_{\max} \sin \omega_g t$$

установившаяся ошибка не должна превышать β; отыскивают ограничение на логарифмическую амплитудно-частотную характеристику разомкнутой системы.

Амплитуда ошибки

$$x_{\max} = |W_x(j\omega_g)|\, g_{\max} = \frac{g_{\max}}{|1 + W(j\omega_g)|} \approx \frac{g_{\max}}{|W(j\omega_g)|},$$

где W и W_x — передаточные функции разомкнутой системы и замкнутой системы для ошибки слежения;

$$|W(j\omega_g)| \gg 1.$$

Следовательно,

$$|W(j\omega_g)| \geqslant \frac{g_{\max}}{\beta} \qquad (9.11)$$

и ЛАЧХ разомкнутой системы должна проходить не ниже контрольной точки B (рис. 9.2, *а*) с координатами

$$\omega_к = \omega_g; \quad L_к = 20 \lg \frac{g_{\max}}{\beta}. \qquad (9.12)$$

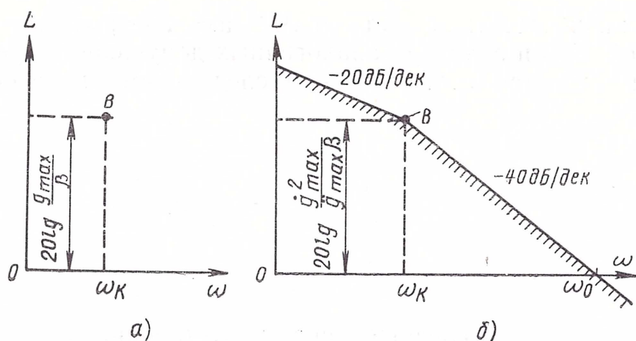


Рис. 9.2. Построение для низкочастотной части ЛАЧХ разомкнутой следящей системы:

а — контрольной точки; *б* — запретной зоны

Пример 9.1. Задающее воздействие следящей системы $g = g_{max} \sin \omega_g t$, где $g_{max} = 20°$ и $\omega_g = 6{,}28$ с$^{-1}$.
Определить минимальное значение k, при котором установившаяся ошибка β не превысит 0,025°. Передаточная функция разомкнутой системы

$$W = \frac{k(\tau s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)},$$

где $\tau = 0{,}008$ с; $T_1 = 0{,}01$ и $T_2 = 0{,}005$ с.

Пользуясь формулой (9.12), определим координаты контрольной точки B:

$$\omega_к = \omega_g = 6{,}28 \text{ с}^{-1};$$

$$L_к = 20 \lg \frac{g_{max}}{\beta} = 20 \lg \frac{20}{0{,}025} = 58 \text{ дБ}.$$

Наносим на график контрольную точку B (рис. 9.3). Затем строим ЛАЧХ разомкнутой системы так, чтобы ее низкочастотная асимптота проходила через контрольную точку B.

По характеристике $L(\omega)$ определим, что $L(1) = 71$ дБ. Следовательно, $\lg k = 3{,}7$ и искомое значение передаточного коэффициента разомкнутой системы $k = 5012$.

Для проверки устойчивости системы при этом значении k строим ЛФЧХ $\psi(\omega)$. Пользуясь критерием Найквиста, заключаем, что замкнутая система устойчива.

7. В следящей системе, задающее воздействие которой изменяется с максимальной скоростью $\dot{g}_{max}$ и максимальным ускорением $\ddot{g}_{max}$, установившаяся ошибка не должна превышать β; отыскивают ограничение на ЛАЧХ разомкнутой системы.

В данном случае удобно рассматривать эквивалентное гармоническое задающее воздействие

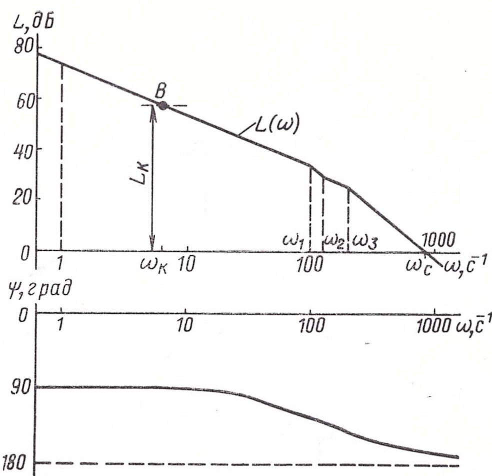
$$g_э = g_{max\,э} \sin \omega_{gэ} t$$

с заданными значениями максимальной скорости и ускорения:

$$\dot{g}_э = g_{max\,э}\omega_{gэ} = \dot{g}_{max};$$

$$\ddot{g}_э = g_{max\,э}\omega^2_{gэ} = \ddot{g}_{max}.$$

Рис. 9.3. Логарифмические частотные характеристики к примеру 9.1



Эти равенства удовлетворяются при

$$\omega_{g\,э} = \frac{\ddot{g}_{max}}{\dot{g}_{max}}$$

и

$$g_{max\,э} = \frac{\dot{g}^2_{max}}{\ddot{g}_{max}}. \quad (9.13)$$

На основании формул (9.12) и (9.13) заключаем, что ЛАЧХ разомкнутой системы должна проходить не ниже контрольной точки *B* (рис. 9.2, *б*) с координатами

$$\omega_к = \frac{\ddot{g}_{max}}{\dot{g}_{max}} \quad и \quad L_к = 20 \lg \frac{\dot{g}^2_{max}}{\ddot{g}_{max}\beta}. \quad (9.14)$$

Пусть скорость изменения задающего воздействия остается максимальной, а ускорение уменьшается: $\ddot{g} < \ddot{g}_{max}$. По формулам (9.14) видно, что при этом контрольная точка *B* (см. рис. 9.2, *б*) будет перемещаться влево по прямой с наклоном — 20 дБ/дек.

Если скорость изменения задающего воздействия уменьшается ($\dot{g} < \dot{g}_{max}$), а ускорение остается максимальным, то контрольная точка *B* на рис. 9.2, *б* будет перемещаться вправо по прямой с наклоном —40 дБ/дек.

Построенные прямые ограничивают сверху область, в которую не должна заходить ЛАЧХ разомкнутой системы.

В частности, передаточный коэффициент *k* астатической системы (добротность по скорости) должен удовлетворять неравенству

$$k \geqslant \frac{\dot{g}_{max}}{\beta}, \quad (9.15)$$

а коэффициент *k* системы с астатизмом второго порядка (добротность по ускорению) неравенству

$$k \geqslant \frac{\ddot{g}_{max}}{\beta}. \quad (9.16)$$

Если сопрягающая частота одного из апериодических звеньев системы равна $\omega_к$, то рекомендуется поднять ограничивающие прямые (см. рис. 9.2, *б*) на 3 дБ. Тогда они будут очерчивать область, в которую не должна заходить асимптотическая ЛАЧХ разомкнутой системы.

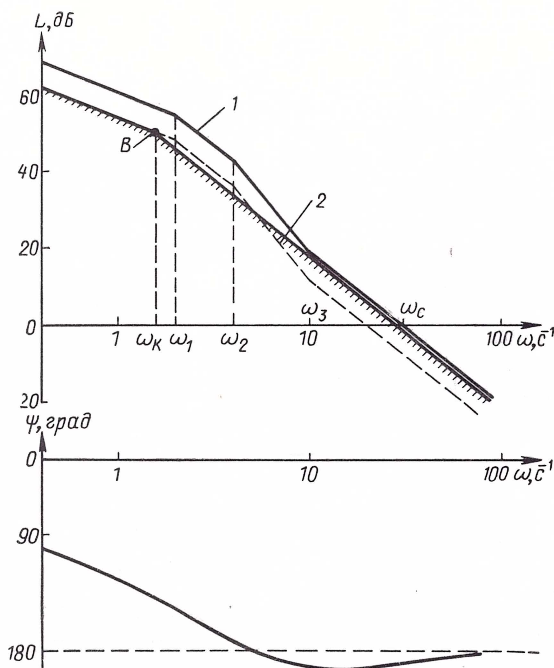


Рис. 9.4. Логарифмические частотные характеристики к примеру 9.2

Пример 9.2. Скорость и ускорение задающего воздействия следящей системы могут иметь максимальные значения соответственно $\dot{g}_{max} = 25$ град/с и $\ddot{g}_{max} = 40$ град/с^2. Определить минимальное значение k, при котором установившаяся ошибка не превысит $\beta = 0{,}05$ град, если передаточная функция разомкнутой системы

$$W = \frac{k(\tau s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)},$$

где $\tau = 0{,}1$ с; $T_1 = 0{,}5$ и $T_2 = 0{,}25$ с.

По формулам (9.14) определим координаты контрольной точки B:

$$\omega_{к} = \frac{\ddot{g}_{max}}{\dot{g}_{max}} = \frac{40}{25} = 1{,}6 \text{ с}^{-1};$$

$$L_{к} = 20 \lg \frac{\dot{g}^2_{max}}{\ddot{g}_{max}\beta} = 20 \lg \frac{25^2}{40 \cdot 0{,}05} = 49{,}9 \text{ дБ}.$$

Наносим контрольную точку B (рис. 9.4) с координатами $[\omega_{к}, L_{к}]$ и проводим от нее прямую с наклоном —20 дБ/дек в сторону высоких частот. Область, в которую направлена штриховка этих прямых, является запретной для ЛАЧХ разомкнутой системы.

Пользуясь формулой (9.15), определим минимально допустимое значение

$$k = \frac{\dot{g}_{max}}{\beta} = \frac{25}{0{,}05} = 500 \text{ с}^{-1}.$$

Теперь построим асимптотическую ЛАЧХ разомкнутой системы по ее передаточной функции

$$W = \frac{500\,(0{,}1s + 1)}{s\,(0{,}5s + 1)\,(0{,}25s + 1)}.$$

Низкочастотная асимптота этой ЛАЧХ частично совпадает с граничной прямой, а остальная часть ЛАЧХ изображена штриховой линией (кривая *2*).

По графику заключаем, что ЛАЧХ заходит в запретную область. ЛАЧХ разомкнутой системы для удовлетворения требования к точности должна занимать положение, показанное на рис. 9.4 сплошной линией (кривая *1*).

Ордината этой ЛАЧХ $L\,(1) = 60{,}5$ дБ, т. е. нужно иметь $k = 1060$.

Для проверки устойчивости построим ЛФЧХ разомкнутой системы при $k = 1060$. Эта характеристика $\psi\,(\omega)$ построена на рис. 9.4.

На основании критерия Найквиста заключаем, что при $k = 1060$ замкнутая система неустойчива. Следовательно, необходимо увеличить допустимое значение ошибки β или ввести в систему корректирующее устройство для обеспечения устойчивости.

Запретная область для ЛАЧХ разомкнутой системы может быть построена [17] при неединичной обратной связи, для статической следящей системы и с учетом влияния возмущения.

9.2. ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ ПО МИНИМУМУ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ОЦЕНКИ

Выбор параметров САР при заданной структуре довольно часто выполняют с помощью квадратичных интегральных оценок.

Постановка задачи в этом случае сводится к следующему. Структура системы и, следовательно, ее передаточные функции известны. Некоторые параметры системы (передаточные коэффициенты и постоянные времени, а иногда и коэффициенты демпфирования) можно изменять; остальные параметры заданы постоянными. Необходимо отыскать такие значения изменяемых параметров, при которых квадратичная интегральная оценка становится минимальной. Рассмотрим интегральную оценку переходного процесса, создаваемого ступенчатым задающим воздействием в следящих системах и возмущением в системах стабилизации.

Предположим сначала, что может изменяться только один параметр α. Тогда расчет будет состоять из таких этапов:

1. Выбирают вид квадратичной интегральной оценки.

Минимизация квадратичной интегральной оценки J приближает переходную характеристику к ступенчатой, но возможно значительное перерегулирование. Однако если отличны от нуля коэффициенты b_1, b_2, . . . в числителе изображения $H\,(s)$ переходной характеристики, то существенное перерегулирование мало вероятно. Поэтому оценку J широко используют.

При минимизации улучшенной квадратичной интегральной оценки J_T переходная характеристика приближается к экспоненте (7.35а), и чем больше T, тем меньше возможное перерегулирование. Вычисление J_T сложнее, чем J, особенно для системы высокого порядка.

Улучшенные квадратичные оценки J_{TT} и оценки еще более сложного вида [113] используют в тех случаях, когда требования к форме переходной характеристики должны быть выдержаны особенно точно.

2. Составляют выражение для выбранной квадратичной интегральной оценки.

В зависимости от вида изображения $H(s)$ переходной характеристики используют формулу (7.28) или (7.32). Для вычисления улучшенной квадратичной оценки нужно использовать еще формулы (7.36) и (7.38). Табл. 7.6 дает значения квадратичной оценки систем от второго до шестого порядков.

3. В выражение для квадратичной оценки подставляют числовые значения известных параметров.

После этого квадратичная оценка становится функцией лишь одного искомого параметра α: $J = J(\alpha)$.

4. Определяют значение α, при котором квадратичная оценка имеет минимум.

Искомое значение α определяют из уравнения

$$\frac{dJ(\alpha)}{d\alpha} = 0. \qquad (9.17)$$

Затем необходимо проверить, что равенство (9.17) есть действительно условие минимума функции $J(\alpha)$. Это имеет место, если при найденном значении α:

$$\frac{d^2J(\alpha)}{d\alpha^2} > 0. \qquad (9.18)$$

Иногда для указанной проверки удобнее вычислить J при найденном значении α, а также при двух соседних — большем и меньшем. Последние два значения J должны быть больше первого.

Может оказаться, что функция $J(\alpha)$ не имеет минимума по α вообще или внутри области допустимых значений α. Тогда нужно определить J при граничных значениях α (максимальном и минимальном) и выбрать то из них, которое соответствует меньшему значению J.

5. Проверяют устойчивость системы и определяют показатели качества переходной характеристики системы при выбранном значении α.

Переходная характеристика может быть построена точным или приближенным методом (см. гл. 4). Ориентировочные значения показателей качества могут быть определены, как рекомендовано в п. 7.4.

При неудовлетворительных показателях качества переходной характеристики нужно искать новое значение параметра α. Вместо квадратичной интегральной оценки J следует использовать улучшенную оценку J_T. Если уже применяли оценку J_T, то нужно

изменить значение T. Вероятнее всего, его следует увеличить для уменьшения перерегулирования и уменьшить для уменьшения времени регулирования. К цели также приведет более сложная улучшенная квадратичная оценка.

При выборе нескольких параметров α_1, α_2,... по минимуму квадратичной интегральной оценки порядок расчета остается тем же, что и при выборе одного параметра α.

После определения интегральной оценки как функции искомых параметров $J = J(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, вычисляют и приравнивают нулю ее частные производные по каждому из этих параметров:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_1} = 0; \quad \frac{\partial J}{\partial \alpha_2} = 0; \ \ldots \tag{9.19}$$

Полученная система алгебраических уравнений (обычно нелинейных) позволяет вычислить искомые значения параметров. Необходимо, конечно, проверить, действительно ли равенства (9.19) соответствуют минимуму функции $J(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ по α_1, α_2, ...

Аналитическое решение задачи выбора САР по минимуму интегральной оценки целесообразно только для системы невысокого порядка. Если порядок системы выше четвертого, то используют аналоговые вычислительные машины [113, гл. XIX].

Выбор параметров по минимуму интегральной оценки (или оценок) наиболее удобен, когда синтезируется система, сходная с существующей. В этом случае метод обычно дает хорошие результаты.

9.3. МЕТОД СТАНДАРТНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ (СТАНДАРТНЫХ ПЕРЕХОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК)

Метод стандартных коэффициентов [57] предполагает такой выбор параметров элементов САР с заданной структурой, при котором коэффициенты ее передаточной функции принимают заранее назначенные (стандартные) значения. При этом и переходная характеристика системы будет иметь желаемую (стандартную) форму.

Существует несколько принципов определения стандартных коэффициентов. Порядок расчета статических и астатических систем различный.

Статическая система. Пусть передаточная функция разомкнутой цепи статической системы

$$W = \frac{k}{c_0 s^n + c_1 s^{n-1} + \cdots + c_{n-1} s + 1}. \tag{9.20}$$

Корни характеристического уравнения замкнутой системы будут кратными вещественными отрицательными (равными $-\lambda$), если коэффициенты c_0, c_1, . . ., c_{n-1} передаточной функции W

Таблица 9.1

Коэффициенты стандартной передаточной функции разомкнутой статической САР

№ по пор.	n	$t_p\Omega$	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7
1	2	4,8	$\frac{1+k}{\Omega^2}$	$\frac{2(1+k)}{\Omega}$	—	—	—	—	—	—
	3	6,0	$\frac{1+k}{\Omega^3}$	$\frac{3(1+k)}{\Omega^2}$	$\frac{3(1+k)}{\Omega}$	—	—	—	—	—
	4	7,7	$\frac{1+k}{\Omega^4}$	$\frac{4(1+k)}{\Omega^3}$	$\frac{6(1+k)}{\Omega^2}$	$\frac{4(1+k)}{\Omega}$	—	—	—	—
	5	9,0	$\frac{1+k}{\Omega^5}$	$\frac{5(1+k)}{\Omega^4}$	$\frac{10(1+k)}{\Omega^3}$	$\frac{10(1+k)}{\Omega^2}$	$\frac{5(1+k)}{\Omega}$	—	—	—
	6	10,4	$\frac{1+k}{\Omega^6}$	$\frac{6(1+k)}{\Omega^5}$	$\frac{15(1+k)}{\Omega^4}$	$\frac{20(1+k)}{\Omega^3}$	$\frac{15(1+k)}{\Omega^2}$	$\frac{6(1+k)}{\Omega}$	—	—
	7	11,6	$\frac{1+k}{\Omega^7}$	$\frac{7(1+k)}{\Omega^6}$	$\frac{21(1+k)}{\Omega^5}$	$\frac{35(1+k)}{\Omega^4}$	$\frac{35(1+k)}{\Omega^3}$	$\frac{21(1+k)}{\Omega^2}$	$\frac{7(1+k)}{\Omega}$	—
2	2	3,0	$\frac{1+k}{\Omega^2}$	$\frac{1,5(1+k)}{\Omega}$	—	—	—	—	—	—
	3	4,5	$\frac{1+k}{\Omega^3}$	$\frac{2,5(1+k)}{\Omega^2}$	$\frac{2,5(1+k)}{\Omega}$	—	—	—	—	—

2	4	5,1	$\frac{1+k}{\Omega^4}$	$\frac{3(1+k)}{\Omega^3}$	$\frac{4,25(1+k)}{\Omega^2}$	$\frac{3(1+k)}{\Omega}$	—	—	—	—
	5	6,0	$\frac{1+k}{\Omega^5}$	$\frac{4(1+k)}{\Omega^4}$	$\frac{7,25(1+k)}{\Omega^3}$	$\frac{7,25(1+k)}{\Omega^2}$	$\frac{4(1+k)}{\Omega}$	—	—	—
	6	6,6	$\frac{1+k}{\Omega^6}$	$\frac{4,5(1+k)}{\Omega^5}$	$\frac{9,25(1+k)}{\Omega^4}$	$\frac{12,375(1+k)}{\Omega^3}$	$\frac{9,25(1+k)}{\Omega^2}$	$\frac{4,5(1+k)}{\Omega}$	—	—
3	2	2,9	$\frac{1+k}{\Omega^2}$	$\frac{1,38(1+k)}{\Omega}$	—	—	—	—	—	—
	3	4,4	$\frac{1+k}{\Omega^3}$	$\frac{2,05(1+k)}{\Omega^2}$	$\frac{2,39(1+k)}{\Omega}$	—	—	—	—	—
	4	4,6	$\frac{1+k}{\Omega^4}$	$\frac{2,6(1+k)}{\Omega^3}$	$\frac{3,8(1+k)}{\Omega^2}$	$\frac{2,8(1+k)}{\Omega}$	—	—	—	—
	5	5,7	$\frac{1+k}{\Omega^5}$	$\frac{2,5(1+k)}{\Omega^4}$	$\frac{5,3(1+k)}{\Omega^3}$	$\frac{5,46(1+k)}{\Omega^2}$	$\frac{3,64(1+k)}{\Omega}$	—	—	—
	6	6,3	$\frac{1+k}{\Omega^6}$	$\frac{3,73(1+k)}{\Omega^5}$	$\frac{8(1+k)}{\Omega^4}$	$\frac{10,3(1+k)}{\Omega^3}$	$\frac{8,56(1+k)}{\Omega^2}$	$\frac{4,18(1+k)}{\Omega}$	—	—
	7	7,1	$\frac{1+k}{\Omega^7}$	$\frac{2,76(1+k)}{\Omega^6}$	$\frac{8,12(1+k)}{\Omega^5}$	$\frac{11,74(1+k)}{\Omega^4}$	$\frac{14,35(1+k)}{\Omega^3}$	$\frac{11,5(1+k)}{\Omega^2}$	$\frac{4,86(1+k)}{\Omega}$	—
	8	7,7	$\frac{1+k}{\Omega^8}$	$\frac{4,65(1+k)}{\Omega^7}$	$\frac{9,42(1+k)}{\Omega^6}$	$\frac{22,7(1+k)}{\Omega^5}$	$\frac{28,4(1+k)}{\Omega^4}$	$\frac{24,3(1+k)}{\Omega^3}$	$\frac{15(1+k)}{\Omega^2}$	$\frac{5,45(1+k)}{\Omega}$

выбирать в зависимости от значения n (см. № 1 табл. 9.1). Среднегеометрический корень

$$\Omega = \sqrt[n]{\lambda_1 \lambda_2 \ \ldots \ \lambda_n}, \qquad (9.21)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — модули корней характеристического уравнения. В данном случае $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \lambda$ и $\Omega = \lambda$.

Переходные характеристики таких систем апериодические. В табл. 9.1 приведены значения произведений $t_р\Omega$, где $t_р$ — время регулирования, т. е. время, по истечении которого отклонение переходной характеристики от установившегося значения не превышает 5%.

Время регулирования имеет меньшее значение, если характеристический полином замкнутой системы представляет собой произведение трехчленов вида $(T^2s^2 + 2\xi Ts + 1)$ и двучлена вида $(Ts + 1)$ при нечетном n, где коэффициент демпфирования $\xi = 0{,}75$. Для этого коэффициенты $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ передаточной функции W разомкнутой системы должны иметь значения, приведенные в № 2 табл. 9.1.

Переходные характеристики в этом случае имеют перерегулирование менее 5%, значения $t_р\Omega$ указаны в таблице.

Время регулирования (см. № 3 табл. 9.1) будет минимальным, если все комплексные корни (и один вещественный корень при n нечетном) имеют вещественные части, равные $-\eta$, а мнимые части образуют арифметическую прогрессию с разностью γ. При этом отношение γ/η должно быть равно 1; 1,45; 0,79; 1,5; 0,64; 1,5 и 0,7 соответственно при $n = 2$; 3; 4; 5; 6; 7 и 8. Необходимые для этого значения коэффициентов $c_0, c_1, \ldots$ передаточной функции W указаны в № 3 табл. 9.1. Переходные характеристики имеют перерегулирование до 5%.

Порядок расчета статической системы методом стандартных коэффициентов может быть следующим:

1. Выбирают структуру системы и составляют передаточную функцию $\tilde{W}$ ее разомкнутой цепи. Коэффициенты знаменателя $\tilde{W}$ являются некоторыми функциями параметров элементов системы.

2. Определяют значение передаточного коэффициента k, необходимое для обеспечения заданной статической точности.

3. Вычисляют значение среднегеометрического корня по отношению

$$\Omega = \frac{t_р\Omega}{t_р}, \qquad (9.22)$$

где $t_р\Omega$ — значение, взятое из табл. 9.1 в соответствии со значением n и типом динамических звеньев системы; $t_р$ — допустимое время регулирования.

4. Вычисляют необходимые значения коэффициентов $c_0, c_1, \ldots$ $\ldots, c_{n-1}$ по соответствующим формулам табл. 9.1 и составляют

передаточную функцию W разомкнутой системы, удовлетворяющую требованиям, предъявляемым к системе.

5. Определяют необходимые значения параметров элементов САР путем решения системы алгебраических уравнений. Последние получают путем приравнивания коэффициентов при равных степенях s знаменателей передаточных функций W и $\tilde{W}$.

Знаменатель заданной передаточной функции $\tilde{W}$ может быть произведением элементарных множителей. Тогда полином

$$c_0 s^n + c_1 s^{n-1} + \cdots + c_{n-1} s + 1$$

удобнее разложить на элементарные множители (см. приложение 2).

6. Выясняют возможность физической реализации необходимых значений параметров. Если их реализуют приближенно, то необходимо построить переходную характеристику синтезированной системы и проверить удовлетворение исходных требований.

Пример 9.3. Передаточная функция разомкнутой САР

$$\tilde{W} = \frac{k}{(T^2 s^2 + 2\xi T s + 1)(T_1 s + 1)}.$$

Определить значения параметров системы, при которых коэффициент статизма $S = 0{,}02$, время регулирования $t_р \leqslant 0{,}2$ и перерегулирование $\sigma \leqslant 10\%$.

Пользуясь формулой (9.4), определим необходимое значение передаточного коэффициента разомкнутой системы:

$$k = \frac{1 - S}{S} = \frac{1 - 0{,}02}{0{,}02} = 49.$$

Коэффициенты передаточной функции будем определять так, чтобы обеспечить минимальное время регулирования, т. е. по № 3 табл. 9.1. Перерегулирование в этом случае не превысит 5%.

При $n = 3$ $t_р\Omega = 4{,}4$. Следовательно, среднегеометрический корень должен иметь следующее значение:

$$\Omega = \frac{t_р\Omega}{t_р} = \frac{4{,}4}{0{,}2} = 22.$$

Теперь определим необходимые значения коэффициентов передаточной функции разомкнутой системы:

$$c_0 = \frac{1 + k}{\Omega^3} = \frac{1 + 49}{22^3} = 0{,}0047;$$

$$c_1 = \frac{2{,}05(1 + k)}{\Omega^2} = \frac{2{,}05(1 + 49)}{22^2} = 0{,}212;$$

$$c_2 = \frac{2{,}39(1 + k)}{\Omega} = \frac{2{,}39(1 + 49)}{22} = 5{,}43.$$

Следовательно,

$$W = \frac{49}{0{,}0047 s^3 + 0{,}212 s^2 + 5{,}436 + 1}.$$

Разложим знаменатель W на элементарные множители, пользуясь методом Лина (см. приложение 2), тогда он примет следующий вид:

$$(0{,}0295^2 s^2 + 2 \cdot 0{,}664 \cdot 0{,}0295 s + 1)(5{,}39 s + 1).$$

Следовательно, для удовлетворения требований параметры передаточной функции $\tilde{W}$ должны быть следующими: $k = 49$; $T = 0{,}0295$ с; $\xi = 0{,}664$ и $T_1 = 5{,}39$ с.

Астатическая система. Передаточная функция разомкнутой цепи системы с астатизмом первого порядка

$$W = \frac{k}{s\,(c_0 s^{n-1} + c_1 s^{n-2} + \cdots + c_{n-2} s + 1)}. \tag{9.23}$$

Стандартные значения коэффициентов k, c_0, c_1, ... приведены в табл. 9.2. В табл. 9.2 № 1, 2 и 3 соответствуют по распределению корней характеристического уравнения замкнутой системы соответствующим номерам табл. 9.1.

Передаточная функция разомкнутой цепи системы с астатизмом второго порядка

$$W = \frac{k\,(bs + 1)}{s^2\,(c_0 s^{n-2} + c_1 s^{n-3} + \cdots + c_{n-3} s + 1)}. \tag{9.24}$$

Коэффициенты k, b, c_0, c_1, ... рекомендуется [57] выбирать по табл. 9.3. При этом перерегулирование переходных характеристик составляет 8—12%. Существуют и несколько иные рекомендации для выбора коэффициентов передаточных функций астатических систем [18].

Передаточная функция разомкнутой цепи системы с астатизмом третьего порядка

$$W = \frac{k\,(b_0 s^2 + b_1 s + 1)}{s^3\,(c_0 s^{n-3} + c_1 s^{n-4} + \cdots + c_{n-4} s + 1)}. \tag{9.25}$$

Коэффициенты k, b_0, b_1, c_0, c_1, ... рекомендуется [57] выбирать по табл. 9.4.

Передаточный коэффициент разомкнутой астатической системы (добротность) зависит от значения среднегеометрического корня Ω (см. табл. 9.2, 9.3 и 9.4). Поэтому при расчете можно удовлетворить или требование к статической точности, т. е. выбрать значение k, которое определяет значение Ω, или требование к быстродействию, т. е. определить Ω по допустимому значению $t_р$. В остальном порядок расчета астатической системы не отличается от расчета статической системы.

Пример 9.4. Передаточная функция разомкнутой САР

$$W = \frac{k\,(\tau s + 1)}{s^2\,(Ts + 1)}.$$

Выбрать передаточный коэффициент k и постоянные времени τ и T корректирующего устройства так, чтобы время регулирования $t_р \leqslant 0{,}5$ с и перерегулирование $\sigma \leqslant 15\%$.

Таблица 9.2

Коэффициенты передаточной функции разомкнутой астатической САР

№ по пор.	n	$t_р\Omega$	k	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6
1	2	4,8	$\frac{\Omega}{2}$	$\frac{1}{2\Omega}$	—	—	—	—	—	—
	3	6,0	$\frac{\Omega}{3}$	$\frac{1}{3\Omega^2}$	$\frac{1}{\Omega}$	—	—	—	—	—
	4	7,7	$\frac{\Omega}{4}$	$\frac{1}{4\Omega^3}$	$\frac{1}{\Omega^2}$	$\frac{3}{2\Omega}$	—	—	—	—
	5	9,0	$\frac{\Omega}{5}$	$\frac{1}{5\Omega^4}$	$\frac{1}{\Omega^3}$	$\frac{2}{\Omega^2}$	$\frac{2}{\Omega}$	—	—	—
	6	10,4	$\frac{\Omega}{6}$	$\frac{1}{6\Omega^5}$	$\frac{1}{\Omega^4}$	$\frac{5}{2\Omega^3}$	$\frac{10}{3\Omega^2}$	$\frac{5}{2\Omega}$	—	—
	7	11,6	$\frac{\Omega}{7}$	$\frac{1}{7\Omega^6}$	$\frac{1}{\Omega^5}$	$\frac{3}{\Omega^4}$	$\frac{5}{\Omega^3}$	$\frac{5}{\Omega^2}$	$\frac{3}{\Omega}$	—
2	2	3,0	$\frac{\Omega}{1,5}$	$\frac{1}{1,5\Omega}$	—	—	—	—	—	—
	3	4,5	$\frac{\Omega}{2,5}$	$\frac{1}{2,5\Omega^2}$	$\frac{1}{\Omega}$	—	—	—	—	—
	4	5,1	$\frac{\Omega}{3}$	$\frac{1}{3\Omega^3}$	$\frac{1}{\Omega^2}$	$\frac{1,42}{\Omega}$	—	—	—	—
	5	6,0	$\frac{\Omega}{4}$	$\frac{1}{4\Omega^4}$	$\frac{1}{\Omega^3}$	$\frac{1,81}{\Omega^2}$	$\frac{1,81}{\Omega}$	—	—	—
	6	6,6	$\frac{\Omega}{4,5}$	$\frac{1}{4,5\Omega^5}$	$\frac{1}{\Omega^4}$	$\frac{2,056}{\Omega^3}$	$\frac{2,75}{\Omega^2}$	$\frac{2,056}{\Omega}$	—	—
3	2	2,9	$\frac{\Omega}{1,38}$	$\frac{1}{1,38\Omega}$	—	—	—	—	—	—
	3	4,4	$\frac{\Omega}{2,39}$	$\frac{1}{2,39\Omega^2}$	$\frac{0,858}{\Omega}$	—	—	—	—	—

Продолжение табл. 9.2

№ по пор.	n	$t_p\Omega$	k	c_0:	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6
3	4	4,6	$\frac{\Omega}{2,8}$	$\frac{1}{2,8\Omega^3}$	$\frac{0,929}{\Omega^2}$	$\frac{1,357}{\Omega}$	—	—	—	—
	5	5,7	$\frac{\Omega}{3,64}$	$\frac{1}{3,64\Omega^4}$	$\frac{0,687}{\Omega^3}$	$\frac{1,456}{\Omega^2}$	$\frac{1,5}{\Omega}$	—	—	—
	6	6,3	$\frac{\Omega}{4,18}$	$\frac{1}{4,18\Omega^5}$	$\frac{0,892}{\Omega^4}$	$\frac{1,914}{\Omega^3}$	$\frac{2,464}{\Omega^2}$	$\frac{2,048}{\Omega}$	—	—
	7	7,1	$\frac{\Omega}{4,86}$	$\frac{1}{4,86\Omega^6}$	$\frac{0,568}{\Omega^5}$	$\frac{1,671}{\Omega^4}$	$\frac{2,416}{\Omega^3}$	$\frac{2,953}{\Omega^2}$	$\frac{2,366}{\Omega}$	—
	8	7,7	$\frac{\Omega}{5,45}$	$\frac{1}{5,45\Omega^7}$	$\frac{0,853}{\Omega^6}$	$\frac{1,728}{\Omega^5}$	$\frac{4,165}{\Omega^4}$	$\frac{5,211}{\Omega^3}$	$\frac{4,459}{\Omega^2}$	$\frac{2,752}{\Omega}$

Таблица 9.3

Коэффициенты передаточной функции разомкнутой САР с астатизмом второго порядка

n	$t_p\Omega$	Значения коэффициентов					
		k	b	c_0	c_1	c_2	c_3
2	3,8	Ω^2	$\frac{2,5}{\Omega}$	—	—	—	—
3	6,8	$\frac{\Omega^2}{5,1}$	$\frac{6,35}{\Omega}$	$\frac{1}{5,1\Omega}$	—	—	—
4	13,2	$\frac{\Omega^2}{16,3}$	$\frac{11,83}{\Omega}$	$\frac{1}{16,3\Omega^2}$	$\frac{0,443}{\Omega}$	—	—
5	17	$\frac{\Omega^2}{38}$	$\frac{18}{\Omega}$	$\frac{1}{38\Omega^3}$	$\frac{0,237}{\Omega^2}$	$\frac{0,763}{\Omega}$	—
6	19	$\frac{\Omega^2}{82,3}$	$\frac{27,7}{\Omega}$	$\frac{1}{82,3\Omega^4}$	$\frac{0,134}{\Omega^3}$	$\frac{0,557}{\Omega^2}$	$\frac{1,122}{\Omega}$

Таблица 9.4

Коэффициенты передаточной функции разомкнутой САР с астатизмом третьего порядка

n	$t_p\Omega$	σ, %	k	b_0	b_1	c_0	c_1
3	1,8	10	Ω^3	$\frac{6,7}{\Omega^2}$	$\frac{6,7}{\Omega}$	—	—
4	5,3	16	$\frac{\Omega^3}{7,9}$	$\frac{15}{\Omega^2}$	$\frac{7,9}{\Omega}$	$\frac{1}{7,9\Omega}$	—
5	11,6	20	$\frac{\Omega^3}{69}$	$\frac{69}{\Omega^2}$	$\frac{18}{\Omega}$	$\frac{1}{69\Omega^2}$	$\frac{18}{69\Omega}$

Система третьего порядка с астатизмом второго порядка, поэтому по табл. 9.3 определим $t_p\Omega = 6{,}8$.

Следовательно,

$$\Omega = \frac{t_p\Omega}{t_p} = \frac{6{,}8}{0{,}5} = 13{,}6;$$

$$k = \frac{\Omega^2}{5{,}1} = \frac{13{,}6^2}{5{,}1} = 36{,}3 \text{ с}^{-2};$$

$$\tau = b = \frac{6{,}35}{13{,}6} = 0{,}467 \text{ с};$$

$$T = c_0 = \frac{1}{5{,}1\Omega} = \frac{1}{5{,}1 \cdot 13{,}6} = 0{,}0144 \text{с}.$$

Очевидно, что синтез САР методом стандартных коэффициентов весьма прост. Лишь один этап может вызвать затруднения при ручном счете — разложение полинома на множители или решение системы нелинейных алгебраических уравнений при синтезе САР четвертого и более высокого порядка.

Однако применение данного метода ограничено. Его недостаток в том, что одновременно выбирают все коэффициенты передаточной функции и необходимо иметь по крайней мере n варьируемых параметров. Необходимые значения параметров не всегда могут быть физически реализованы, прежде всего из-за малого перерегулирования стандартных переходных характеристик.

9.4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОРНЕВЫХ ГОДОГРАФОВ

Корневой годограф (см. п. 7.8) позволяет выяснить влияние одного из параметров системы на расположение полюсов и нулей передаточной функции и, следовательно, на ее динамические свойства (см. п. 7.7). Поэтому корневой годограф может быть использован как для выбора значения какого-либо из параметров системы, так и для синтеза корректирующего устройства.

Пусть требуется выбрать значение параметра α (передаточного коэффициента разомкнутой цепи, постоянной времени или коэффициента демпфирования элементов). Тогда при постоянных значениях всех остальных параметров нужно задавать различные значения α_1, α_2, ... внутри возможных пределов изменения этого параметра и построить траектории корней. Затем можно выбрать такое значение α, при котором имеет место наиболее благоприятное расположение нулей и полюсов.

Корни следует вычислять наиболее простым числовым методом, так как большой точности не требуется вследствие приближенности корневой оценки качества.

Показатели качества приближенно легко определить по преобладающей паре полюсов.

Предположим, что передаточная функция замкнутой системы

$$\Phi \approx \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}, \tag{9.26}$$

т. е. в характеристическом уравнении этой системы преобладающей является пара комплексно-сопряженных корней s_1 и s_2:

$$s_{1,2} = -\delta_1 \pm j\omega_1, \tag{9.27}$$

где

$$\delta_1 = \frac{\xi}{T} \text{ и } \omega_1 = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}.$$

Тогда переходную характеристику определяют по формуле

$$h(t) = 1 - \frac{1}{\omega_1 T} e^{-\delta_1 t} \sin(\omega_1 t + \theta), \tag{9.28}$$

где

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{\omega_1}{\delta_1}.$$

Основные показатели качества могут быть вычислены по следующим формулам: перерегулирование (в относительных единицах)

$$\sigma = e^{\frac{-\delta_1 \pi}{\omega_1}} = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}; \tag{9.29}$$

время регулирования

$$t_р \approx \frac{3}{\delta_1} \approx \frac{3T}{\xi}; \tag{9.30}$$

показатель колебательности

$$M = \frac{1}{2\delta_1 \omega_1 T^2} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}. \tag{9.31}$$

Графики зависимостей σ, $t_р/T$ и M от ξ, вычисленных по этим формулам, показан на рис. 9.5.

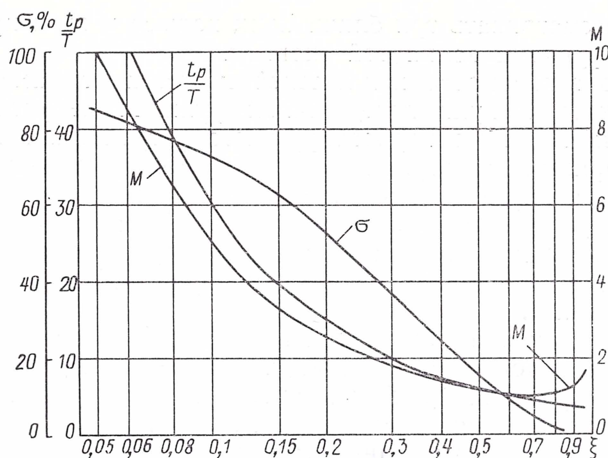


Рис. 9.5. Зависимость перерегулирования σ, относительного времени регулирования $t_р/T$

и показателя колебательности M от коэффициента демпфирования ξ преобладающей комплексно-сопряженной пары полюсов

Продолжительность переходного процесса приближается к минимальной при $\xi = 0,7$. В этом случае $\sigma = 0,05$ и $M = 1$. Поэтому значение коэффициента демпфирования $\xi = 0,7$ является в определенном смысле оптимальным и целесообразно приближать ξ к этому значению.

Уточненные формулы для определения σ и $t_р$ приведены в источнике [117]. Однако они не всегда дают хорошее приближение. Если известны полюсы и нули передаточной функции замкнутой системы, то не составляет труда определить точное аналитическое выражение переходной характеристики, пользуясь табл. 4.1, и построить эту характеристику.

При использовании корневых годографов для синтеза корректирующих устройств исходят из различных предположений. Иногда полагают зависимость переходной характеристики лишь от ближайшего к мнимой оси вещественного полюса. Вместе с тем пользуются и предположением, что наилучшие динамические свойства система имеет, когда ближайшей к мнимой оси будет пара комплексных сопряженных полюсов. Исходят также и из более сложной ситуации: ближайший к мнимой оси полюс вещественный и за ним следует пара комплексных сопряженных полюсов. Каждое из этих предположений может быть основой расчета лишь при условии, что все остальные полюсы скомпенсированы (хотя бы приблизительно) нулями или достаточно удалены от рассматриваемых полюсов.

Необходимо также учитывать влияние нулей передаточной функции. Поэтому для определения качества переходного процесса и для синтеза корректирующего устройства наиболее пра-

вильно рассматривать три ближайших полюса и один нуль передаточной функции замкнутой системы.

Однако зависимости показателей качества от расположения трех полюсов и нуля передаточной функции не установлены. Поэтому при синтезе корректирующего устройства с использованием корневого годографа принимают, что переходный процесс определяется парой комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения замкнутой системы. Их расположение выбирают по заданным показателям качества, а корректирующее устройство выбирают так, чтобы эти корни были действительно определяющими.

Пусть задано значение передаточного коэффициента разомкнутой системы и допустимые значения перерегулирования σ и времени регулирования $t_р$. Тогда синтез корректирующего устройства может слагаться из следующих этапов.

1. По заданным значениям σ и $t_р$ с помощью номограммы (рис. 9.5) определяют значения коэффициента демпфирования ξ и постоянной времени T желаемой передаточной функции (9.26) замкнутой системы.

2. Вычисляют по формуле (9.27) значения определяющей пары корней и последние наносят на комплексную плоскость (достаточно нанести только один корень s_1).

3. На график наносят все полюсы λ_i и нули γ_j передаточной функции неизменяемой части системы, т. е. начальные и предельные точки ветвей корневого годографа.

4. Вводят дополнительные нули для компенсации полюсов (кроме нулевого), расположенных справа от s_1 и близко от s_1, слева. Этим обеспечивается определяющая роль корней s_1 и s_2.

5. Вводят дополнительный полюс (или полюсы) так, чтобы для точки s_1 удовлетворялось уравнение фаз (7.71):

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_{1i} - \sum_{j=1}^{m} \psi_{2j} = N\pi, \ N = \pm 1, \ \pm 3, \ \ldots,$$

где ψ_{1i} — угол вектора от i-го полюса к точке s_1; ψ_{2j} — угол вектора от j-го нуля к точке s_1.

При удовлетворении этого равенства через точку s_1 будет проходить одна из ветвей корневого годографа.

6. По формуле (7.72) вычисляют значение передаточного коэффициента k разомкнутой системы, соответствующее точке s_1 корневого годографа:

$$k = \frac{l_{11} l_{12} \ \ldots \ l_{1n} \gamma_1 \gamma_2 \ \ldots \ \gamma_m}{l_{21} l_{22} \ \ldots \ l_{2m} \lambda_1 \lambda_2 \ \ldots \ \lambda_n},$$

где l_{1i} — длина вектора от i-го полюса к точке s_1; l_{2j} — длина вектора от j-го нуля к точке s_1; λ_i, γ_j — значения полюсов и нулей (отличные от нуля).

7. Если значение k отличается от требуемого $k_т$, то вводят полюс λ и нуль γ, значения которых определяют из соотношения

$$\frac{\gamma}{\lambda} = \frac{k_т}{k}. \qquad (9.32)$$

Полюс λ и нуль γ располагают так, чтобы они представляли собой диполь, т. е. чтобы векторы от них к точке s_1 были приблизительно равной длины и равного наклона. Тогда они не нарушат равенства (7.71), но изменят нужным образом правую часть формулы (7.72).

8. По введенным при синтезе полюсам λ_I, λ_{II}, ... и нулям γ_I, γ_{II}, ... составляют передаточную функцию последовательного корректирующего устройства

$$W_{к\,1} = \frac{\left(\frac{1}{\gamma_I}s + 1\right)\left(\frac{1}{\gamma_{II}}s + 1\right)\cdots}{\left(\frac{1}{\lambda_I}s + 1\right)\left(\frac{1}{\lambda_{II}}s + 1\right)\cdots}. \qquad (9.33)$$

9. Для проверки удовлетворения требований строят переходную характеристику скорректированной системы.

Синтез корректирующего устройства по преобладающей паре полюсов можно осуществить без графических построений. По заданным значениям k, σ и $t_р$, пользуясь номограммой на рис. 9.5, следует составить желаемую передаточную функцию замкнутой системы. Затем определить желаемую передаточную функцию разомкнутой системы и разделить ее на передаточную функцию неизменяемой части системы. В результате определяется передаточная функция необходимого последовательного корректирующего устройства.

9.5. МЕТОД ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Свойства САР полностью определяются частотными характеристиками ее разомкнутой цепи. Если все элементы системы минимально-фазовые, то достаточно рассматривать только амплитудно-частотную характеристику. Для построения логарифмической асимптотической амплитудно-частотной характеристики почти не требуется расчетов. Поэтому метод синтеза, основанный на использовании ЛАЧХ, широко применяют в инженерной практике.

Сущность этого метода заключается в следующем. Сначала строят асимптотическую ЛАЧХ $L_н(\omega)$ неизменяемой (основной) части системы. Затем строят желаемую ЛАЧХ $L_ж(\omega)$ разомкнутой системы. Разность

$$L_ж(\omega) - L_н(\omega) = L_{к\,1}(\omega) \qquad (9.34)$$

есть ЛАЧХ дополнительного элемента, который нужно ввести в систему для того, чтобы она имела необходимые свойства, т. е. это есть ЛАЧХ последовательного корректирующего устройства.

Неизменяемая часть системы регулирования по отклонению включает в себя объект регулирования и исполнительный элемент, а также элемент основной обратной связи и элемент сравнения. К неизменяемой части относят обычно также элементы, которые обеспечивают необходимые статические свойства системы: усилитель и в астатической системе интегрирующий или изодромный элемент (элементы). Асимптотическую ЛАЧХ $L_н(\omega)$ строят по передаточной функции неизменяемой части системы обычным методом (см. п. 5.3).

Желаемую ЛАЧХ условно разделяют на три части: низкочастотную, среднечастотную и высокочастотную. Низкочастотная часть определяет статические свойства системы, ее точность в установившихся режимах.

Среднечастотная часть является наиболее важной. Она определяет устойчивость, запас устойчивости и, следовательно, качество переходных процессов, оцениваемое обычно показателями качества переходной характеристики. Основные параметры среднечастотной асимптоты это ее наклон и частота среза $\omega_с$, т. е. частота, при которой желаемая ЛАЧХ пересекает ось абсцисс.

Чем больше наклон среднечастотной асимптоты, тем труднее обеспечить хорошие динамические свойства системы. Поэтому наиболее целесообразен наклон —20 дБ/дек и крайне редко он превышает —40 дБ/дек. Частота среза $\omega_с$ определяет быстродействие системы. Чем больше $\omega_с$, тем выше быстродействие, тем меньше время регулирования $t_р$ переходной характеристики.

Высокочастотная часть желаемой ЛАЧХ незначительно влияет на динамические свойства системы. Вообще говоря, лучше иметь возможно больший наклон ее асимптот, что уменьшает требуемую мощность исполнительного органа и влияние высокочастотных помех. В ряде случаев при расчете высокочастотную часть ЛАЧХ не принимают во внимание.

Желаемую ЛАЧХ строят на основании требований, предъявляемых к ее свойствам. Требования к статическим свойствам задают в виде порядка астатизма ν и передаточного коэффициента (добротности) k разомкнутой системы. Иногда для системы с астатизмом первого порядка задают коэффициенты ошибки C_1 и C_2. Ранее было показано, как по этим требованиям построить низкочастотную асимптоту ЛАЧХ.

При синтезе САР рассматриваемым методом требования к динамическим свойствам задаются максимально допустимыми значениями перерегулирования σ и временем регулирования $t_р$ переходного процесса, создаваемого ступенчатым задающим воздействием. Может быть задано ограничение в виде максимально допустимого ускорения w_{max} регулируемой величины при начальном рассогласовании x_0.

Если неизменяемая часть системы включает в себя элементы, обеспечивающие необходимые статические свойства, то низкочастотная часть характеристики $L_н(\omega)$ является вместе с тем и

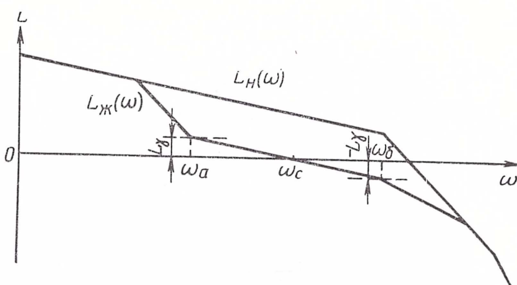


Рис. 9.6. Построение желаемой ЛАЧХ

низкочастотной частью характеристики $L_ж(\omega)$. В этом случае ЛАЧХ $L_{к1}(\omega)$, определяемая равенством (9.34), является характеристикой последовательного корректирующего устройства. По параметрам этой ЛАЧХ составляют передаточную функцию $W_{к1}$ последовательного корректирующего устройства. Формулы (8.38) и (8.40) позволяют отыскать значения передаточных функций $W_{к2}$ параллельного и $W_{к3}$ прямого параллельного корректирующих устройств, имеющих те же свойства.

Для построения желаемой ЛАЧХ используют различные правила. Рассмотрим наиболее распространенные из них.

Построение желаемой ЛАЧХ по В. В. Солодовникову [84, 114]. Предположим, что ее низкочастотная асимптота, совпадающая с ЛАЧХ $L_н(\omega)$, имеет наклон —20 дБ/дек и ордината этой асимптоты (или ее продолжения) при $\omega = 1$ $с^{-1}$ равна $20 \lg k$ (рис. 9.6). Порядок построения желаемой ЛАЧХ будет следующий.

1. Выбирают частоту среза $\omega_с$ так, чтобы удовлетворялось неравенство

$$\omega_{с\,1} \leqslant \omega_с \leqslant \omega_{с\,2}. \tag{9.35}$$

Здесь $\omega_{с1}$ — минимальное значение частоты среза, при котором время регулирования не превысит заданного значения $t_р$. Значение $\omega_{с1}$ определяют по номограмме, изображенной на рис. 7.5.

По заданному значению σ с помощью кривой $\sigma(P_{max})$ номограммы определяют соответствующее значение P_{max}. Затем по значению P_{max} с помощью кривой $t_р(P_{max})$ определяют значение $\frac{c\pi}{\omega_с}$. Эту величину приравнивают заданному значению $t_р$ и из полученного равенства

$$\omega_{с\,1} = \frac{c\pi}{t_р}\, c^{-1}. \tag{9.36}$$

Правая часть неравенства (9.35) есть максимальное значение частоты среза, допустимое при заданных значениях максимального ускорения ε_{max} регулируемой координаты и начального рассогласования x_0:

$$\omega_{с\,2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{max}}{x_0}}\, с^{-1}. \tag{9.37}$$

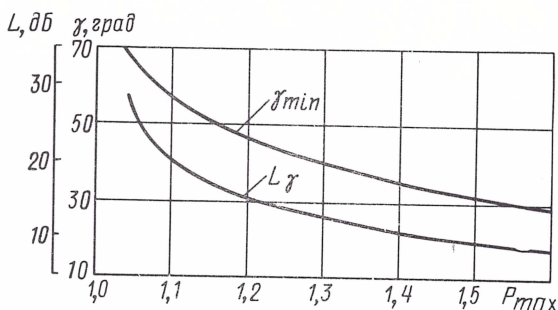


Рис. 9.7. Номограмма для определения ординат $\pm L_\gamma$ контрольных точек и необходимого избытка фазы γ_{min}

Если оказывается, что $\omega_{c1} > \omega_{c2}$, то нужно выбирать $\omega_c \leqslant \omega_{c2}$. Иногда значения ϖ_{max} и x_0 не задаются, тогда $\omega_c \geqslant \omega_{c1}$.

Выбранное значение ω_c наносят на график (рис. 9.6).

2. Строят среднечастотную асимптоту. Ее проводят через точку ω_c на оси абсцисс с наклоном —20 дБ/дек. Меньший наклон трудно осуществить, а при большем наклоне трудно обеспечить необходимый запас устойчивости.

3. Среднечастотную асимптоту сопрягают с низкочастотной так, чтобы в том интервале частот, в котором

$$0 \leqslant L_ж(\omega) \leqslant L_\gamma, \tag{9.38}$$

избыток фазы

$$\gamma \geqslant \gamma_{min}. \tag{9.39}$$

Сопряжение осуществляется асимптотой с наклоном —40 дБ/дек или —60 дБ/дек при $\nu = 1$, и асимптотой с наклоном —60 дБ/дек при $\nu = 2$.

Значения L_γ и γ_{min} определяют с помощью номограммы (рис. 9.7) по ранее найденному значению P_{max}. Удовлетворение неравенств (9.38) и (9.39) означает, что желаемой ЛАЧХ соответствует типовая вещественная частотная характеристика, у которой $|P_{min}| = P_{max} - 1$ и для которой составлены ранее использованные зависимости $\sigma(P_{max})$ и $t_р(P_{max})$ (см. рис. 7.5).

Избыток фазы $\gamma = \pi + \psi(\omega)$, где $\psi(\omega) < 0$, проверяют лишь при той частоте ω_a (см. рис. 9.6), при которой $L_ж(\omega) = L_\gamma$. Этой частоте может соответствовать точка сопряжения асимптот или точка на одной из этих асимптот.

Избыток фазы при частоте ω_a можно определить по приближенной формуле

$$\gamma_a = \pi - \nu\frac{\pi}{2} - \left(m\frac{\pi}{2} - \sum_{i=1}^{m}\frac{\omega_i}{\omega_a}\right) + \left(l\frac{\pi}{2} - \sum_{i=1}^{l}\frac{\omega_i}{\omega_a}\right), \tag{9.40}$$

где ω_i — сопрягающие частоты, меньшие $\omega_а$;

m и l — число сопрягающих частот, на которых наклон желаемой ЛАЧХ соответственно изменяется на —20 или на +20 дБ/дек.

Для вычисления γ можно также использовать другие методы определения фазы по ЛАЧХ (см. п. 5.4).

Если при выбранном сопряжении асимптот избыток фазы $\gamma_а$ в контрольной точке оказывается меньше γ_{min}, то сопрягающую асимптоту нужно сместить влево или уменьшить ее наклон. Если же $\gamma_а > \gamma_{min}$, то необходимо смещение сопрягающей асимптоты вправо или увеличение ее наклона.

Таким образом, нужное положение сопрягающей асимптоты отыскивается методом проб. При этом разность $\gamma_а - \gamma_{min}$ не должна превышать нескольких градусов.

При сопряжении нужно стремиться к тому, чтобы желаемая ЛАЧХ возможно меньше отличалась от ЛАЧХ неизменяемой части системы.

4. Среднечастотная асимптота сопрягается с высокочастотной частью ЛАЧХ $L_н(\omega)$ неизменяемой части системы так, чтобы в том интервале частот, в котором

$$0 \geqslant L_ж(\omega) \geqslant -L_\gamma, \tag{9.41}$$

избыток фазы γ был не меньше γ_{min}.

Избыток фазы достаточно проверить лишь при той частоте $\omega_б$ (см. рис. 9.6), при которой $L_ж(\omega) = -L_\gamma$. Можно пользоваться приближенной формулой

$$\gamma_б = \pi - \frac{\pi}{4} q_{ср} - \sum_{i=1}^{r} \frac{\omega_б}{\omega_i}, \tag{9.42}$$

где $q_{ср}$ — относительный наклон среднечастотной асимптоты;

r — число сопрягающих частот, которые больше частоты среза.

Если при выбранном сопряжении асимптот избыток фазы $\gamma_б$ в контрольной точке оказывается меньше γ_{min}, то сопрягающую асимптоту нужно сместить вправо или уменьшить ее наклон. Если $\gamma_б > \gamma_{min}$, то необходимо смещение сопрягающей асимптоты влево или увеличение ее наклона. Таким образом, нужное положение сопрягающей асимптоты также находят с помощью проб. Разность $\gamma_б - \gamma_{min}$ не должна быть больше нескольких градусов.

При сопряжении опять следует стремиться к тому, чтобы $L_ж(\omega)$ возможно меньше отличалась от $L_н(\omega)$. Чем меньше различие между формой этих ЛАЧХ, тем проще необходимое корректирующее устройство.

Номограммы для синтеза корректирующих устройств. Желаемая ЛАЧХ астатической системы очень часто состоит из четырех асимптот (рис. 9.8): низкочастотной с наклоном —20 дБ/дек, сопрягающей с наклоном —40 или —60 дБ/дек, среднечастотной

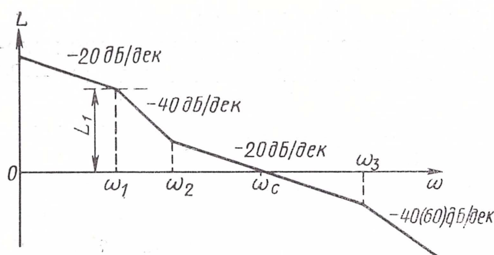


Рис. 9.8. Типовая ЛАЧХ

с наклоном —20 дБ/дек и высокочастотной с наклоном —40 или —60 дБ/дек.

Изменение наклона высокочастотной части ЛАЧХ при ординатах, меньших —26 дБ, можно не принимать во внимание. Такие сопрягающие частоты создаются постоянными времени, которые относятся к малым параметрам и весьма слабо влияют на динамические свойства системы.

Таким образом, имеется четыре типа ЛАЧХ разомкнутой астатической системы (табл. 9.5).

Каждая типовая ЛАЧХ полностью определяется четырьмя параметрами: передаточным коэффициентом k разомкнутой цепи (добротностью по скорости) и сопрягающими частотами:

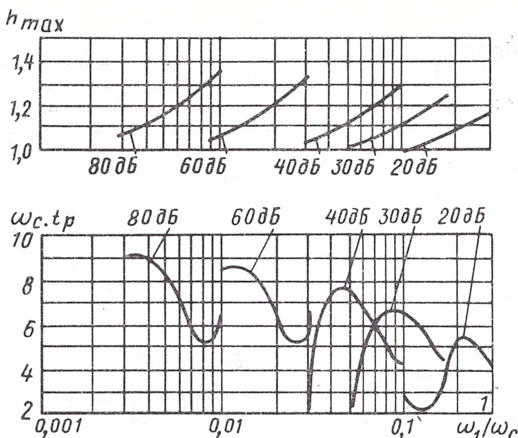
$$\omega_1 = \frac{1}{T_1}; \quad \omega_2 = \frac{1}{\tau_2} \text{ и } \omega_3 = \frac{1}{T_3}.$$

Таблица 9.5

Типовые логарифмические амплитудно-частотные характеристики

Тип ЛАЧХ	Наклон асимптот, дБ/дек				Передаточная функция
	низкочастотной	сопрягающей	среднечастотной	высокочастотной	
I	—20	—40	—20	—40	$W = \frac{k(\tau_2 s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_3 s + 1)}$; $T_1 > \tau_2 > T_3$
II	—20	—60	—20	—40	$W = \frac{k(\tau_2 s + 1)^2}{s(T_1 s + 1)^2(T_3 s + 1)}$; $T_1 > \tau_2 > T_3$
III	—20	—40	—20	—60	$W = \frac{k(\tau_2 s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_3 s + 1)^2}$; $T_1 > \tau_2 > T_3$
IV	—20	—60	—20	—60	$W = \frac{k(\tau_2 s + 1)^2}{s(T_1 s + 1)^2(T_3 s + 1)^2}$; $T_1 > \tau_2 > T_3$

Рис. 9.9. График зависимости h_m и $\omega_c t_p$ от ω_1/ω_c для системы с ЛАЧХ типа I



Однако более удобно пользоваться совокупностью следующих четырех параметров: ординаты L_1 ЛАЧХ при сопрягающей частоте ω_1, частоты среза ω_c и относительных значений сопрягающих частот $\frac{\omega_1}{\omega_c}$ и $\frac{\omega_3}{\omega_c}$. При этом сопрягающая частота ω_2 определяется соотношением

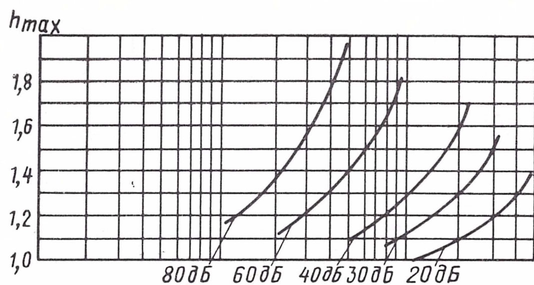
$$(a-1)\lg\frac{\omega_2}{\omega_c} = \frac{L_1}{20} + a\lg\frac{\omega_1}{\omega_c}, \qquad (9.43)$$

где $a = 2$ для ЛАЧХ типа I и III и $a = 3$ для ЛАЧХ типа II и IV.

Для типовых ЛАЧХ составлены номограммы [122], которые по параметрам L_1, ω_c, $\frac{\omega_1}{\omega_c}$ и $\frac{\omega_3}{\omega_c}$ позволяют определить основные характеристики замкнутой системы: время регулирования t_p, максимальное значение h_{max} переходной характеристики, время достижения этого максимума, частоту колебаний переходной характеристики, максимальное значение амплитудно-частотной характеристики и частоту, при которой достигается этот максимум. Номограммы дают зависимость этих характеристик от $\frac{\omega_1}{\omega_c}$ при $L_1 = 20$; 30; 40; 60 и 80 дБ и нескольких значениях $\frac{\omega_3}{\omega_c}$ (1, 2, 4, 8 и ∞ для ЛАЧХ типа I и II; 1, 2, 4 и 8 для ЛАЧХ типа III и 2, 4, 8 для ЛАЧХ типа IV). Эти номограммы приведены в работах [82, 86].

На рис. 9.9—9.12 показаны взятые из этих номограмм графики зависимостей $\omega_c t_p$ и h_{max} от $\frac{\omega_1}{\omega_c}$ при $\frac{\omega_3}{\omega_c} = 4$ и $L_1 = 20$; 30; 40; 60 и 80 дБ для каждого типа ЛАЧХ.

Номограммы, приведенные [84, 113], позволяют по параметрам L_1, ω_c, $\frac{\omega_1}{\omega_c}$ и $\frac{\omega_3}{\omega_c}$ типовых ЛАЧХ определять следующие характеристики замкнутой системы: перерегулирование и время регулирования переходной характеристики; запас устойчивости по фазе γ и коэффициенты ошибок C_1 и C_2. Номограммы дают зависимость этих характеристик от $\frac{\omega_1}{\omega_c}$ при $L_1 = 20$; 30; 40; 50; 60; 70 и 80 дБ и $\frac{\omega_3}{\omega_c} = 1$; 2; 4 и 8.



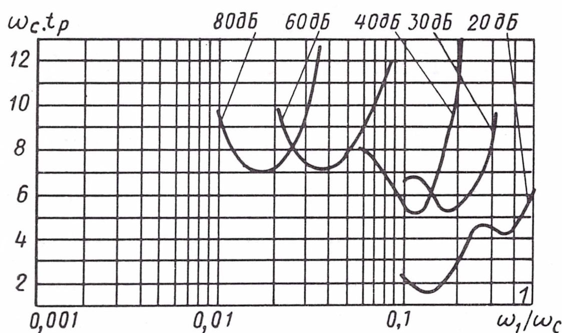
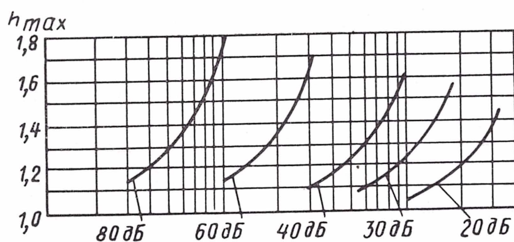


Рис. 9.10. График зависимости h_m и $\omega_c t_p$ от ω_1/ω_c для системы с ЛАЧХ типа II



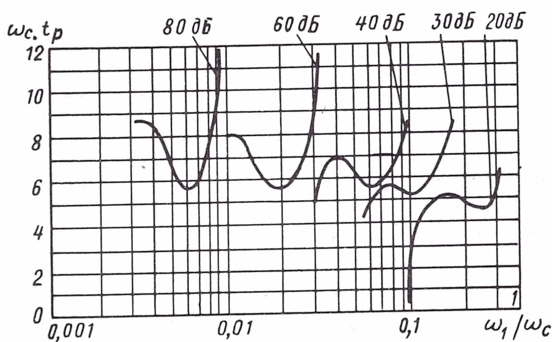


Рис. 9.11. График зависимости h_m и $\omega_c t_p$ от ω_1/ω_c для системы с ЛАЧХ типа III

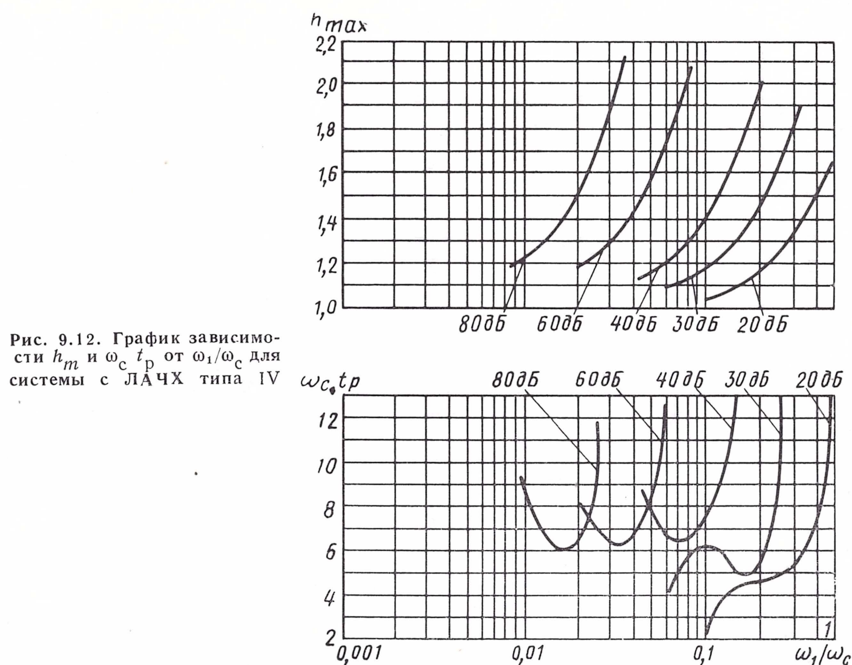


Рис. 9.12. График зависимости h_m и $\omega_c\ t_p$ от ω_1/ω_c для системы с ЛАЧХ типа IV

Формулы для вычисления C_1, C_2 и γ по параметрам типовых ЛАЧХ приведены в табл. 9.6.

Номограммы могут быть использованы прежде всего для определения показателей качества САР с типовыми ЛАЧХ разомкнутой цепи.

Некоторые ЛАЧХ можно привести к типовым путем замены двух близко расположенных сопрягающих частот ω_i и ω_{i+1}, одной ω_i, как показано на рис. 9. 13. Замена допустима, если ординаты приведенной ЛАЧХ отличаются от ординат исходной не более, чем на 2 дБ.

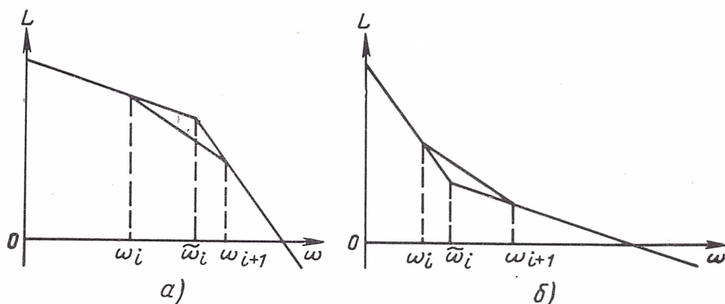


Рис. 9.13. Замена двух близко расположенных сопрягающих частот одной

Таблица 9.6

Формулы для вычисления C_1, C_2 и γ замкнутой системы по параметрам типовых логарифмических амплитудно-частотных характеристик

Тип ЛАЧХ	C_1	C_2	γ
I	$\frac{1}{\omega_1} 10^{-\frac{L_1}{20}}$	$2C_1\left(\frac{1}{\omega_1}+\frac{1}{\omega_3}-\frac{1}{\omega_2}-C_1\right)$	$\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{\omega_c}{\omega_1}+\operatorname{arctg}\frac{\omega_c}{\omega_2}-\operatorname{arctg}\frac{\omega_c}{\omega_3}$
II	$\frac{1}{\omega_1} 10^{-\frac{L_1}{20}}$	$2C_1\left(\frac{2}{\omega_1}+\frac{1}{\omega_3}-\frac{2}{\omega_2}-C_1\right)$	$\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arctg}\frac{\omega_c}{\omega_1}+2\operatorname{arctg}\frac{\omega_c}{\omega_2}-\operatorname{arctg}\frac{\omega_c}{\omega_3}$
III	$\frac{1}{\omega_1} 10^{-\frac{L_1}{20}}$	$2C_1\left(\frac{1}{\omega_1}+\frac{2}{\omega_3}-\frac{1}{\omega_2}-C_1\right)$	$\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{\omega_c}{\omega_1}+\operatorname{arctg}\frac{\omega_c}{\omega_2}-\operatorname{arctg}\frac{\omega_c}{\omega_3}$
IV	$\frac{1}{\omega_1} 10^{-\frac{L_1}{20}}$	$2C_1\left(\frac{2}{\omega_1}+\frac{2}{\omega_3}-\frac{2}{\omega_2}-C_1\right)$	$\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arctg}\frac{\omega_c}{\omega_1}+2\operatorname{arctg}\frac{\omega_c}{\omega_2}-2\operatorname{arctg}\frac{\omega_c}{\omega_3}$

На таком основании следующие передаточные функции могут приближенно соответствовать типовым ЛАЧХ:

$$W = \frac{k(\tau_3 s + 1)(\tau_4 s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_5 s + 1)} \approx \frac{k(\tilde{\tau}_2 s + 1)^2}{s(\tilde{T}_1 s + 1)(\tilde{T}_3 s + 1)}, \quad (9.44)$$

где

$$T_1 > T_2 > \tau_3 > \tau_4 > T_5, \quad \tilde{T}_1 = \sqrt{T_1 T_2}, \quad \tilde{\tau}_2 = \sqrt{\tau_3 \tau_4}, \quad \tilde{T}_3 = T_5;$$

$$W = \frac{k(\tau_2 s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_3 s + 1)(T_4 s + 1)} \approx \frac{k(\tilde{\tau}_2 s + 1)}{s(\tilde{T}_1 s + 1)(\tilde{T}_3 s + 1)}, \quad (9.45)$$

где

$$T_1 > \tau_2 > T_3 > T_4, \quad \tilde{T}_1 = T_1, \quad \tilde{\tau}_2 = \tau_2, \quad \tilde{T}_3 = \sqrt{T_3 T_4};$$

$$W = \frac{k(\tau_3 s + 1)(\tau_4 s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_5 s + 1)(T_6 s + 1)} \approx \frac{k(\tilde{\tau}_2 s + 1)^2}{s(\tilde{T}_1 s + 1)^2(\tilde{T}_3 s + 1)^2}, \quad (9.46)$$

где $T_1 > T_2 > \tau_3 > \tau_4 > T_5 > T_6$,

$$\tilde{T}_1 = \sqrt{T_1 T_2}, \quad \tilde{\tau}_2 = \sqrt{\tau_3 \tau_4}, \quad \tilde{T}_3 = \sqrt{T_5 T_6}.$$

Номограммы можно использовать и в тех случаях, когда вместо двух апериодических звеньев с одинаковыми постоянными времени имеется одно колебательное с достаточно большим коэффициентом демпфирования ξ. Ошибка тем меньше, чем меньше отличие ξ от единицы.

Номограммы используют также для приближенного определения показателей качества $t_р$ и σ статических систем и систем с астатизмом второго порядка. Это допустимо, если ЛАЧХ разомкнутой цепи такой системы совпадает с типовой ЛАЧХ в диапазоне частот, в котором

$$|L(\omega)| \leqslant 30 \text{ дБ}. \quad (9.47)$$

При этом по номограммам будут получены для статических систем несколько завышенные, а для систем с астатизмом второго порядка несколько заниженные значения перерегулирования и времени регулирования.

Кроме оценки качества номограммы успешно используют при синтезе САР для построения желаемой ЛАЧХ (см. пример 9.5). С помощью номограмм можно также несколько уменьшить отличие желаемой ЛАЧХ, построенной по В. В. Солодовникову, от ЛАЧХ неизменяемой части системы [84, 113].

Построение желаемой ЛАЧХ по Е. А. Санковскому — Г. Г. Сигалову [110, 100]. Для синтеза САР Е. А. Санковским и Г. Г. Сигаловым предложено рассматривать девять типов ЛАЧХ разомкнутой цепи. Форма типовых асимптотических ЛАЧХ и соответствующие им передаточные функции приведены в табл. 9.7. Там же

Таблица 9.7

Типовые логарифмические амплитудно-частотные характеристики по Е. А. Санковскому—Г. Г. Сигалову

Тип ЛАЧХ	Передаточная функция W	Асимптотическая логарифмическая амплитудно-частотная характеристика	Частота среза ω_c
1	$\frac{k}{(T_1 s+1)(T_3 s+1)}$	L; 0; -20 дБ/дек; ω_3; ω; ω_1; ω_c; -40 дБ/дек	$k\omega_1$
2	$\frac{k}{s(T_1 s+1)(T_3 s+1)}$	L; 0; -20 дБ/дек; ω_3; ω; $\omega_1=\omega_c$; -40 дБ/дек; -60 дБ/дек	k
3	$\frac{k(\tau_2 s+1)}{(T_1 s+1)^2(T_3 s+1)}$	L; 0; -40 дБ/дек; -20 дБ/дек; ω_3; ω; ω_1; ω_2; ω_c; -40 дБ/дек	$\frac{k\omega_1^2}{\omega_2}$
4	$\frac{k(\tau_2 s+1)}{s(T_1 s+1)(T_3 s+1)}$	L; -20 дБ/дек; -40 дБ/дек; -20 дБ/дек; 0; ω_1; ω_2; ω_c; ω_3; ω; -40 дБ/дек	$\frac{k\omega_1}{\omega_2}$
5	$\frac{k(\tau_2 s+1)}{s^2(T_3 s+1)}$	L; -40 дБ/дек; -20 дБ/дек; ω_3; ω; 0; ω_2; ω_c; -40 дБ/дек	$\frac{k}{\omega_2}$
6	$\frac{k(\tau_2 s+1)^2}{(T_1 s+1)^3(T_3 s+1)}$	L; 0; -60 дБ/дек; -20 дБ/дек; ω_3; ω; 0; ω_1; ω_2; ω_c; -40 дБ/дек	$\frac{k\omega_1^3}{\omega_2^2}$

Тип ЛАЧХ	Передаточная функция W	Асимптотическая логарифмическая амплитудно-частотная характеристика	Частота среза ω_c
7	$\dfrac{k(\tau_2 s+1)^2}{s(T_1 s+1)^2(T_3 s+1)}$	L; −20 дб/дек; −60 дб/дек; −20 дб/дек; ω_3; ω; 0; ω_1, ω_2; ω_c; −40 дб/дек	$\dfrac{k\omega_1^2}{\omega_2^2}$
8	$\dfrac{k(\tau_2 s+1)^2}{s^2(T_1 s+1)(T_3 s+1)}$	L; −40 дб/дек; −60 дб/дек; −20 дб/дек; ω_3; ω; 0; ω_1, ω_2; ω_c; −40 дб/дек	$\dfrac{k\omega_1}{\omega_2^2}$
9	$\dfrac{k(\tau_2 s+1)^2}{s^3(T_3 s+1)}$	L; −60 дб/дек; −20 дб/дек; ω_3; ω; 0; ω_2; ω_c; −40 дб/дек	$\dfrac{k}{\omega_2^2}$

указана связь частоты среза ω_c с передаточным коэффициентом k разомкнутой системы и сопрягающими частотами.

При выборе типа ЛАЧХ рекомендуется исходить из следующих соображений:

а) выбирать ЛАЧХ типа 1 или 2, если задающее воздействие изменяется с большим ускорением, а уровень помех мал;

б) выбирать ЛАЧХ типа 3, 4 или 5, если ускорение задающего воздействия невелико, но высокий уровень помех;

в) при больших ускорениях и высоком уровне помех выбирать ЛАЧХ типа 6, 7, 8 или 9.

Исходными данными для расчета желаемой ЛАЧХ могут быть следующие характеристики: $\dot{g}_{\max}$ и $\ddot{g}_{\max}$ — максимальные значения скорости и ускорения задающего воздействия; β — допустимая ошибка в установившемся режиме; σ и t_p — допустимые значения показателей качества переходной характеристики; γ — запас устойчивости по фазе.

Расчет можно вести и в том случае, когда задающее воздействие и помеха являются случайными функциями времени.

Предположим, что выбран тип ЛАЧХ и по требованиям к статической точности определены параметры ее низкочастотной части. Тогда остальную часть желаемой ЛАЧХ нужно построить так, чтобы удовлетворить требования к качеству переходной ха-

рактеристики и запасу устойчивости. При этом могут быть использованы данные табл. 9.7 и следующие соотношения:

$$t_р = \frac{c}{\omega_с}, \qquad (9.48)$$

где $c = 9$ при $\gamma = 30°$, $c = 8$ при $\gamma = 45°$ и $c = 7$ при $\gamma = 60°$;

$$\sigma = 73 - \gamma°. \qquad (9.49)$$

Формулы (9.48) и (9.49) дают погрешность не более 0,05—0,1 при $60° > \gamma > 30°$ [110].

Кроме того, при расчете могут быть использованы соотношения

$$\frac{\omega_2}{\omega_с} \approx \frac{a}{2(l-1)}, \qquad (9.50)$$

$$\omega_с \sum_{i=3}^{n} T_i = \frac{a}{2}, \qquad (9.51)$$

где $l = 2$ и 3 при наклоне сопрягающей асимптоты соответственно —40 и —60 дБ/дек;

$$a = \frac{\pi}{2} - \gamma.$$

Значение a (в рад.) определено в предположении, что $\omega_с T_i \ll 1$, $i = 3, 4, \ldots$, и $\frac{\omega_с}{\omega_1} \gg 1$. При наклоне сопрягающей асимптоты —20 дБ/дек можно выбирать

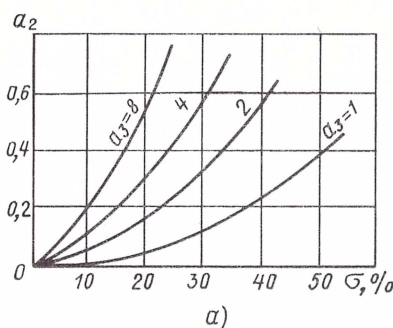
$$\omega_с = \omega_1 \text{ и } \omega_с \sum_{i=3}^{n} T_i = \frac{\pi}{4} - \gamma. \qquad (9.52)$$

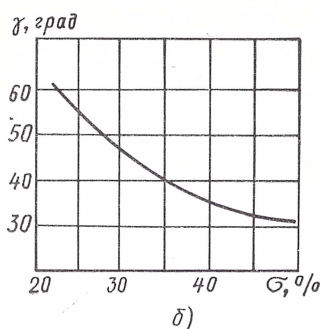
Построение желаемой ЛАЧХ изложенным методом выполнено в примере 9.6.

Упрощенное построение желаемой ЛАЧХ. Изложенные ранее методы построения желаемой ЛАЧХ содержат некоторые допущения. Например, метод В. В. Солодовникова предполагает, что вещественная частотная характеристика замкнутой системы будет иметь типичную форму. Кроме того, графические этапы расчета вносят неизбежные неточности. Поэтому расчет чаще всего дает лишь приближенные значения параметров регулятора. Однако они легко уточняются при испытании макета САР.

Указанные обстоятельства привели к тому, что предложен ряд упрощенных методов построения желаемой ЛАЧХ.

Например рекомендуется [21] выбирать частоту среза желаемой ЛАЧХ по номограмме рис. 7.5, строить среднечастотную асимптоту с наклоном —20 дБ/дек и ограничивать ее слева и справа частотами соответственно $\omega_2 = a_2\omega_с$ и $\omega_3 = a_3\omega_с$. Обычно значение $a_3 = 2 \div 4$ и значение a_2 выбирают по номограмме рис. 9.14, *а*. После сопряжения среднечастотной и низкочастотной асимптот проверяют избыток фазы при частоте ω_2. Он должен





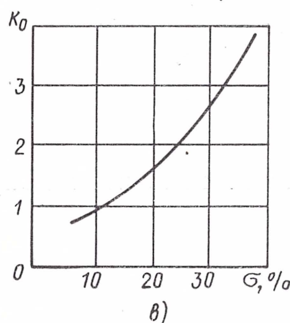


Рис. 9.14. Номограммы для приближенных методов построения желаемой ЛАЧХ

составлять не менее 40°. Затем по приближенной формуле (9.40) проверяют избыток фазы на участке от ω_2 до ω_c. Он должен соответствовать зависимости, показанной на рис. 9.14, *б*. После этого по формуле (9.42) проверяют избыток фазы при частоте ω_3 в предположении, что от этой частоты наклона асимптоты —40 дБ/дек до частоты $\omega_4 = (6 \div 8)\,\omega_c$. Далее идет высокочастотная часть, влияние которой не учитывают.

Частоту среза желаемой ЛАЧХ рекомендуют [37] выбирать по соотношению

$$\omega_c \approx k_0 \frac{\pi}{t_p},$$

где коэффициент k_0 определяют по графику (рис. 9.14, *в*). Частоты, ограничивающие среднечастотную асимптоту (имеющую наклон —20 дБ/дек) слева и справа, выбирают соответственно по соотношениям

$$\omega_2 \approx \omega_c^2/\omega_3 \text{ и } \omega_3 \approx (2 \div 4)\,\omega_c.$$

В системе, у которой ЛАЧХ разомкнутой цепи типа I (см. табл. 9.5), перерегулирование не превысит 20—30%, если удовлетворяются неравенства [86]:

$$\frac{\omega_3}{\omega_2} \approx 10 \text{ и } 2 < \frac{\omega_3}{\omega_c} < 4. \qquad (9.53)$$

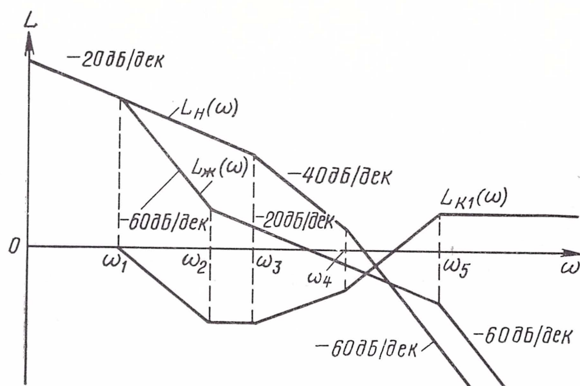


Рис. 9.15. Определение ЛАЧХ желаемого последовательного корректирующего устройства

При этом время регулирования с достаточной точностью определяют по частоте среза

$$t_р = \frac{\pi}{\omega_с}. \qquad (9.54)$$

Следовательно, заданное значение передаточного коэффициента k разомкнутой системы определяет положение низкочастотной асимптоты, а значение $t_р$ определяет положение среднечастотной асимптоты. Остается выбрать частоты ω_2 и ω_3 так, чтобы удовлетворялись неравенства (9.53).

При упрощенном построении желаемой ЛАЧХ предусматривают использование соотношений, указывающих допустимые пределы того или иного ее параметра. Поэтому целесообразно одновременно рассмотреть два—три варианта и выбрать тот, который обеспечивает наиболее приемлемые значения показателей качества при наиболее простом корректирующем устройстве.

Перечисленные рекомендации для построения желаемой ЛАЧХ часто весьма удобно использовать при предварительных расчетах.

Выбор корректирующих устройств. После построения ЛАЧХ $L_н(\omega)$ неизменяемой части системы и желаемой ЛАЧХ $L_ж(\omega)$ можно определить их разность (9.34), т. е. ЛАЧХ $L_{к1}(\omega)$ последовательного корректирующего устройства. Это удобно сделать графически: при каждой из сопрягающих частот характеристик $L_ж(\omega)$ и $L_н(\omega)$ вычислить разность их ординат, полученные точки нанести на график и соединить отрезками прямых (рис. 9.15).

На основании ЛАЧХ $L_{к1}(\omega)$ составляют передаточную функцию $W_{к1}$ необходимого последовательного корректирующего устройства. Его передаточный коэффициент определяют по ординате $L_{к1}(1)$ этой ЛАЧХ при частоте $\omega = 1$, так как

$$L_{к1}(1) = 20 \lg k_{к1}. \qquad (9.55)$$

Каждой сопрягающей частоте ω_i, при которой наклон ЛАЧХ $L_{к1}(\omega)$ увеличивается на $-\nu$ 20 дБ/дек, соответствует множитель $\left(\frac{1}{\omega_i}s+1\right)^\nu$ в знаменателе $W_{к1}$. Если при сопрягающей частоте ω_j наклон ЛАЧХ $L_{к1}(\omega)$ уменьшается на $+\eta$ 20 дБ/дек, то ей соответствует множитель $\left(\frac{1}{\omega_j}s+1\right)^\eta$ в числителе $W_{к1}$.

Например, ЛАЧХ $L_{к1}(\omega)$, изображенной на рис. 9.15, соответствует передаточная функция

$$W_{к1}=\frac{(\tau_2 s+1)^2(\tau_3 s+1)(\tau_4 s+1)}{(T_1 s+1)^2(T_5 s+1)^2},$$

где

$$T_1=\frac{1}{\omega_1};\quad \tau_2=\frac{1}{\omega_2};\quad \tau_3=\frac{1}{\omega_3};\quad \tau_4=\frac{1}{\omega_4}\ \text{ и }\ T_5=\frac{1}{\omega_5}.$$

Иногда желаемую ЛАЧХ не строят, а определяют ее параметры, по которым можно составить желаемую передаточную функцию $W_ж$ разомкнутой САР, тогда

$$W_{к1}=\frac{W_ж}{W_н}. \qquad (9.56)$$

Затем решают вопрос о том, какое корректирующее устройство целесообразно выполнить. Выбирают участок неизменяемой части системы, паралельно которому может быть включено корректирующее устройство, и по найденному значению $W_{к1}$ с помощью формул (8.38), (8.40) определяют необходимые значения $W_{к2}$ и $W_{к3}$.

Анализируя общие свойства последовательного, параллельного и прямого параллельного корректирующих устройств, а также сложность передаточных функций $W_{к1}$, $W_{к2}$ и $W_{к3}$ можно сделать выбор одного из них. В сложной системе может быть целесообразным введение двух корректирующих устройств. Для определения их передаточных функций следует воспользоваться формулами (8.42) — (8.44).

При выборе типа корректирующих устройств необходимо принимать во внимание, из каких элементов они могут быть выполнены. Весьма часто в качестве корректирующих устройств используют пассивные и активные четырехполюсники постоянного тока, а также дифференцирующие трансформаторы и тахогенераторы. Основные сведения об этих элементах приведены в п. 8.6.

В простейшем случае схему пассивного четырехполюсника с необходимой передаточной функцией удается подобрать по табл. 8.2. Если необходимо соединить последовательно два четырехполюсника, из числа указанных в табл. 8.2, то между ними необходим разделительный усилитель.

Схему четырехполюсника, соответствующего сложной передаточной функции корректирующего устройства, можно определить

методами, изложенными в приложении 4. Там же даны методы определения схемы двухполюсника по заданной передаточной функции. Выбор двухполюсников оказывается необходимым при выполнении корректирующего устройства в виде активного четырехполюсника постоянного тока.

После выбора схемы пассивного четырехполюсника определяют параметры его элементов. Необходимое значение выходного сопротивления зависит от последующего элемента (чаще всего усилителя). Значения остальных сопротивлений и емкостей вычисляют по соотношениям, которые определяют постоянные времени передаточной функции. Если таких соотношений меньше, чем вычисляемых параметров, то можно удовлетворить дополнительное требование (или требования), например, иметь минимальную емкость конденсаторов.

Не следует предусматривать пассивный четырехполюсник с передаточным коэффициентом $k < (0{,}1 \div 0{,}05)$. Не следует также в одной схеме иметь сопротивления (или емкости) на два-три порядка, отличающиеся одно от другого.

Заключительные этапы синтеза. Пассивные четырехполюсники уменьшают общий передаточный коэффициент цепи. Поэтому после их выбора нужно окончательно определить необходимое значение передаточного коэффициента усилителя.

В заключение должно быть проверено удовлетворение требований, на основании которых осуществлялся синтез САР. Для проверки показателей качества необходимо построить переходную характеристику методами, изложенными в гл. 4, или определить ее на электронной модели. Еще более точной будет переходная характеристика, полученная при сочетании электронной модели регулятора с объектом регулирования.

Пример 9.5. Передаточная функция неизменяемой части астатической следящей системы

$$W = \frac{30}{s\,(0{,}25s+1)\,(0{,}2s+1)}.$$

Выбрать корректирующее устройство, обеспечивающее при передаточном коэффициенте разомкнутой системы $k \geqslant 100$ с$^{-1}$ следующие показатели качества: $\sigma \leqslant 25\%$ и $t_р \leqslant 0{,}2$ с.

Для построения желаемой ЛАЧХ воспользуемся номограммами, изображенными на рис. 9.9—9.12.

Постоянные времени 0,25 и 0,2 с неизменяемой части системы мало отличаются одна от другой. Поэтому ее передаточную функцию можно заменить эквивалентной

$$W \approx \frac{30}{s\,(T_1 s+1)^2},$$

где

$$T_1 = \sqrt{0{,}25\cdot 0{,}2} = 0{,}224 \text{ с}.$$

Пусть

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1} = 4{,}46 \text{ с}^{-1}$$

и сопрягающая асимптота желаемой ЛАЧХ имеет наклон —60 дБ/дек. Тогда целесообразно строить желаемую ЛАЧХ типа IV (табл. 9.5). В этом случае необходимо последовательное корректирующее устройство с передаточной функцией

$$W_к = \frac{k}{30} \frac{(\tau_2 s + 1)^2}{(T_3 s + 1)^2},$$

реализация которой не вызовет затруднений.

Согласно рекомендации желаемую ЛАЧХ будем строить при $\frac{\omega_3}{\omega_c} = 4$. По номограмме (см. рис. 9.12) при $L_1 = 20$ дБ и $h_{max} = 1{,}25$ определим $\frac{\omega_1}{\omega_c} = 0{,}255$ и $\omega_c t_р = 4{,}8$.

Следовательно,

$$\omega_c = \frac{\omega_1}{0{,}255} = \frac{4{,}46}{0{,}255} = 17{,}5 \text{ и } t_р = \frac{4{,}8}{17{,}5} = 0{,}27 \text{ с}.$$

Время регулирования больше допустимого.

При $L_1 = 30$ дБ и $h_{max} = 1{,}25$ имеем $\frac{\omega_1}{\omega_c} = 0{,}125$ и $\omega_c t_р = 5{,}9$.

Тогда

$$\omega_c = \frac{4{,}46}{0{,}125} = 35{,}7 \text{ и } t_р = \frac{5{,}9}{35{,}7} = 0{,}17 \text{ с}.$$

Время регулирования не превышает допустимого значения и близко к нему. Поэтому принимаем, что желаемая ЛАЧХ относится к типу IV и имеет следующие значение основных параметров:

$$L_1 = 30 \text{ дБ}; \ \omega_1 = 4{,}46 \text{ с}^{-1}; \ \omega_c = 35{,}7 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_3 = 4\omega_c = 143 \text{ с}^{-1}.$$

Для построения желаемой ЛАЧХ (рис. 9.16) при частоте ω_1 откладываем ординату, равную 30 дБ. Из полученной точки проводим низкочастотную асимптоту с наклоном —20 дБ/дек и сопрягающую асимптоту с наклоном —60 дБ/дек. Затем наносим частоту среза и через нее проводим среднечастотную асимптоту с наклоном —20 дБ/дек. Справа среднечастотная асимптота ограничивается частотой ω_3. От этой частоты проводим высокочастотную асимптоту с наклоном —60 дБ/дек.

По точке пересечения среднечастотной и сопрягающей асимптот определим, что $\omega_2 = 8{,}9$ с$^{-1}$. Отношение

$$\frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{143}{8{,}9} = 16$$

свидетельствует о вполне достаточной протяженности среднечастотной асимптоты. Проверка значения ω_2 по формуле (9.43) дает положительный результат.

Ордината низкочастотной асимптоты при $\omega = 1$ с$^{-1}$ равна 43 дБ. Следовательно,

$$20 \lg k = 43; \ \lg k = 2{,}15; \ k = 141 \text{ с}^{-1},$$

т. е. значение k удовлетворяет требованиям.

Таким образом, построенная желаемая ЛАЧХ удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к синтезируемой САР. По желаемой ЛАЧХ составим

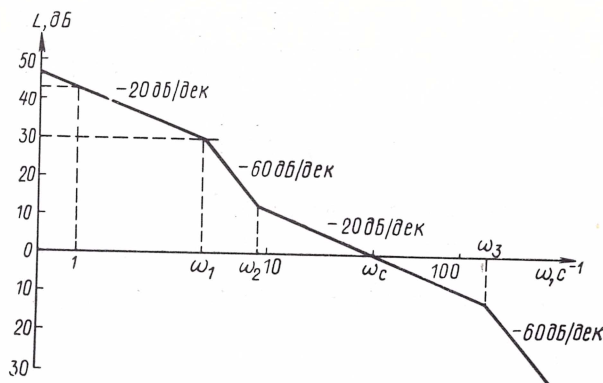


Рис. 9.16. Построение желаемой ЛАЧХ к примеру 9.5

передаточную функцию, учитывая, что сопрягающая частота ω_1 заменяет две действительные сопрягающие частоты:

$$W_{ж} = \frac{141\left(\frac{1}{8{,}9}s+1\right)^2}{s(0{,}25s+1)(0{,}2s+1)\left(\frac{1}{143}s+1\right)^2} =$$

$$= \frac{141(0{,}112s+1)^2}{s(0{,}25s+1)(0{,}2s+1)(0{,}007s+1)^2}.$$

Определим необходимую передаточную функцию последовательного корректирующего устройства:

$$W_{к\,1} = \frac{W_{ж}}{W_{н}} = \frac{4{,}7(0{,}112s+1)^2}{(0{,}007s+1)^2}.$$

Эта передаточная функция может быть реализована усилителем и двумя дифференцирующими четырехполюсниками, выполненными, например, по схеме № 5 табл. 8.2. Общая схема корректирующего устройства показана на рис. 9.17.

Значения сопротивлений R_2 и R_4 следует выбрать при расчете соответственно усилителя и исполнительного элемента. Для определения значений остальных элементов четырехполюсников на основании формул табл. 8.2. имеем следующие соотношения:

$$R_1C_1 = R_3C_2 = 0{,}112; \quad \frac{R_1R_2C_1}{R_1+R_2} = \frac{R_3R_4C_2}{R_3+R_4} = 0{,}007.$$

Следовательно, необходимо иметь:

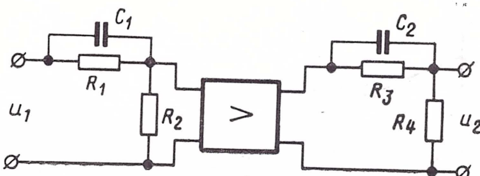
$$R_1 = 15R_2; \quad C_1 = \frac{0{,}00747}{R_2}; \quad R_3 = 15R_4; \quad C_2 = \frac{0{,}00747}{R_4}.$$

Передаточный коэффициент усилителя должен быть

$$k_{у} = \frac{4{,}7}{\frac{R_2}{R_1+R_2}\,\frac{R_4}{R_3+R_4}} = 1203.$$

Переходная характеристика синтезированной системы имеет следующие показатели качества: $\sigma = 25{,}8\%$ и $t_{р} = 0{,}166$ с. Требования, на основании которых осуществлялся синтез САР, удовлетворены с достаточной точностью.

Рис. 9.17. Электрическая схема последовательного корректирующего устройства к примеру 9.5



Пример 9.6. Передаточная функция неизменяемой части системы, состоящей из объекта регулирования исполнительного элемента и усилителя

$$W_{н} = \frac{50}{s\,(0{,}25s + 1)\,(0{,}005s + 1)}.$$

Выбрать корректирующее устройство, обеспечивающее следующие показатели качества: $\sigma \leqslant 25\%$ и $t_{р} \leqslant 0{,}4$ с. Система будет функционировать при медленно изменяющемся задающем воздействии с высоким уровнем помех.

В соответствии с рекомендациями Е. А. Санковского — Г. Г. Сигалова желаемую ЛАЧХ будем строить по схеме № 4 табл. 9.7.

Определим прежде всего необходимое значение запаса устойчивости по фазе, пользуясь формулой (9.49):

$$\gamma = 73 - \sigma = 73 - 25 = 48^\circ.$$

Теперь по формуле (9.48) можно определить частоту среза, принимая $c = 8$:

$$\omega_{с} = \frac{c}{t_{р}} = \frac{8}{0{,}4} = 20\ с^{-1}.$$

Принимаем, что сопрягающую частоту ω_1 создает постоянная времени 0,25 с неизменяемой части системы:

$$\omega_1 = \frac{1}{0{,}25} = 4\ с^{-1}.$$

Тогда по соотношению из табл. 9.7 определим

$$\omega_2 = \frac{k\omega_1}{\omega_{с}} = \frac{50\cdot 4}{20} = 10\ с^{-1}.$$

Вычислим постоянную

$$a = \frac{\pi}{2} - \gamma = \frac{\pi}{2} - \frac{48}{57{,}3} = 0{,}733.$$

Примем, что постоянная времени 0,005 с неизменяемой части системы создает сопрягающую частоту

$$\omega_4 = \frac{1}{0{,}005} = 200\ с^{-1}.$$

По формуле (9.51) определим сопрягающую частоту ω_3:

$$\frac{1}{\omega_3} = \frac{a}{2\omega_{с}} - \frac{1}{\omega_4} = \frac{0{,}733}{2\cdot 20} - \frac{1}{200} = 0{,}0133;$$

$$\omega_3 = 75{,}2\ с^{-1}.$$

Для проверки расчета составим левую и правую части приближенного равенства (9.50):

$$\frac{\omega_2}{\omega_{с}} = \frac{10}{20} = 0{,}5; \qquad \frac{a}{2\,(l-1)} = \frac{0{,}733}{2} = 0{,}367.$$

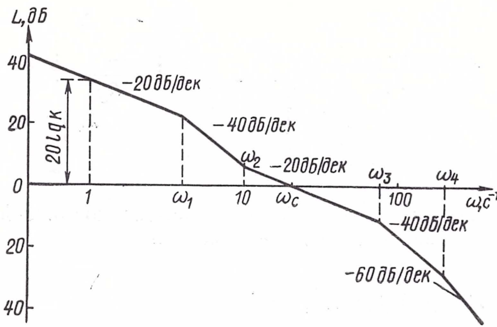


Рис. 9.18. Построение желаемой ЛАЧХ к примеру 9.6

Можно считать, что расчет выполнен правильно.

Построим желаемую ЛАЧХ (рис. 9.18) и составим по ней передаточную функцию

$$W_ж = \frac{k\left(\frac{1}{\omega_2}s+1\right)}{s\left(\frac{1}{\omega_1}s+1\right)\left(\frac{1}{\omega_3}s+1\right)\left(\frac{1}{\omega_4}s+1\right)} =$$

$$= \frac{50\,(0{,}1s+1)}{s\,(0{,}25s+1)\,(0{,}0133s+1)\,(0{,}005s+1)}.$$

Определим передаточную функцию последовательного корректирующего устройства, необходимого для обеспечения требуемых свойств системы:

$$W_{к\,1} = \frac{W_ж}{W_н} = \frac{0{,}1s+1}{0{,}0133s+1}.$$

Переходная характеристика скорректированной системы имеет следующие показатели качества: $\sigma = 18\%$ и $t_р = 0{,}258$ с. Требования, на основании которых осуществлялся синтез САР, удовлетворены.

9.6. СИНТЕЗ НА ОСНОВЕ ЧАСТОТНЫХ КРИТЕРИЕВ КАЧЕСТВА

Применение данного метода [14, 17, 18] объясняется тем, что построение желаемой ЛАЧХ значительно упрощается, если качество регулирования оценивать не по переходной характеристике САР, а непосредственно по ее частотным свойствам.

САР достаточно полно оценивают точностью в типовых режимах, быстродействием и запасом устойчивости. Одновременно с оценкой точности воспроизведения гармонического воздействия по частоте этого воздействия можно оценить и быстродействие системы. Таким образом, критерий точности и критерий быстродействия сливаются в один динамический критерий точности.

Необходимая динамическая точность определяет требования к низкочастотной части желаемой ЛАЧХ. В п. 9.2 были рассмотрены основные случаи ее построения.

Удобным частотным критерием оценки запаса устойчивости является показатель колебательности M (см. п. 7.5). Он характеризует склонность системы к колебаниям и, следовательно, ее удаление от границы устойчивости. Чем меньше M, тем больше удаление системы от границы устойчивости, т. е. тем больше запас устойчивости.

Показатель колебательности равен максимальному значению амплитудно-частотной характеристики замкнутой астатической системы, т. е. максимальному значению модуля ее частотной передаточной функции

$$M = \left| \frac{W(j\omega)}{1 + W(j\omega)} \right|_{\max}, \qquad (9.57)$$

где $W(j\omega)$ — частотная передаточная функция разомкнутой системы.

Показатель колебательности астатической системы равен отношению максимального значения АЧХ к ее начальному значению (при $\omega = 0$). В статических следящих системах обычно для исключения статической ошибки (см. п. 8.1) добиваются, чтобы коэффициент обратной связи $k_0 = \frac{k_п - 1}{k_п}$, где $k_п$ — передаточный коэффициент прямой цепи. Тогда начальное значение АЧХ равно единице.

Если в статической системе единичная обратная связь, то начальное значение АЧХ равно $\frac{k}{1+k}$. В подавляющем большинстве случаев передаточный коэффициент разомкнутой системы $k \gg 1$. Следовательно, и в этом случае начальное значение АЧХ можно с достаточной степенью точности считать равным единице.

В хорошо демпфированных следящих системах с весьма малым перерегулированием показатель колебательности $M = 1{,}1 \div 1{,}3$. Обычно достаточно иметь $M = 1{,}3 \div 1{,}5$. В ряде случаев допускается $M = 1{,}6 \div 1{,}8$.

Необходимым и достаточным условием того, что показатель колебательности устойчивой системы будет не больше заданного, является расположение амплитудно-фазовой (см. рис. 7.9) или логарифмической фазовой (см. рис. 7.10) характеристики вне запретной зоны. В минимально-фазовых системах это условие может быть выдержано соответствующим построением ЛАЧХ.

Рассмотрим принципы построения типовых ЛАЧХ при заданном показателе колебательности и порядок построения желаемой ЛАЧХ при синтезе САР данным методом.

Система с астатизмом второго порядка. Простейшая симметричная ЛАЧХ разомкнутой цепи такой системы показана на рис. 9.19, *а*. Ей соответствует передаточная функция

$$W = \frac{k(\tau s + 1)}{s^2 (T_2 s + 1)}, \qquad (9.58)$$

где k — передаточный коэффициент (добротность по ускорению).

Положение ЛАЧХ может быть задано значением базовой частоты

$$\omega_0 = \sqrt{k}, \qquad (9.59)$$

при которой продолжение низкочастотной асимптоты пересекает ось абсцисс.

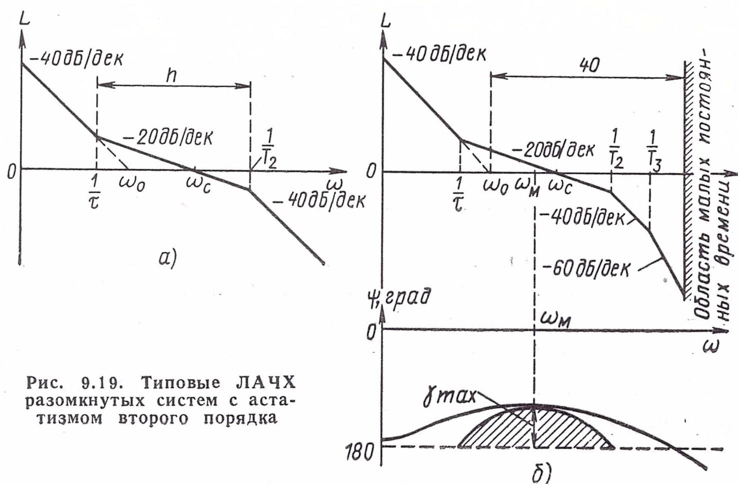


Рис. 9.19. Типовые ЛАЧХ разомкнутых систем с астатизмом второго порядка

Протяженность второй асимптоты (с наклоном —20 дБ/дек), т. е. отношение частот ее конечных точек (большей к меньшей), равна

$$h = \frac{\tau}{T_2}. \qquad (9.60)$$

Избыток фазы

$$\gamma = \psi(\omega) + 180^\circ = \operatorname{arctg} \omega\tau - \operatorname{arctg} \omega T_2 = \operatorname{arctg} \frac{(h_1 - 1)\,\omega T_2}{1 + h\omega^2 T_2^2}. \qquad (9.61)$$

Максимальный избыток фазы

$$\gamma_{\max} = \operatorname{arctg} \frac{h-1}{2\sqrt{h}} \qquad (9.62)$$

имеет место при частоте

$$\omega_м = \frac{1}{T_2\sqrt{h}}. \qquad (9.63)$$

При оптимальном соотношении параметров — при совпадении максимального избытка фазы с максимумом запретной зоны (рис. 9.19, *б*):

$$h = \frac{M+1}{M-1} \text{ и } M = \frac{h+1}{h-1}. \qquad (9.64)$$

Эти формулы определяют, какое минимальное значение может иметь показатель колебательности при заданном значении h и какую минимальную протяженность должна иметь асимптота с наклоном —20 дБ/дек для обеспечения заданного значения M. Чем меньше h, тем легче физически реализовать ЛАЧХ.

Для получения заданного показателя колебательности M замкнутой системы необходимо иметь следующие постоянные времени в передаточной функции (9.58) ее разомкнутой цепи:

$$\tau = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{M}{M-1}}; \qquad (9.65)$$

$$T_2 = \frac{1}{\omega_0} \frac{\sqrt{M(M-1)}}{M+1}. \qquad (9.66)$$

Положение ЛАЧХ (рис. 9.19, *а* и *б*) можно фиксировать не базовой частотой ω_0, а частотой среза ω_c. Тогда для определения постоянных τ и T нужно пользоваться следующими соотношениями:

$$\tau \gg \frac{1}{\omega_c} \frac{M}{M-1}; \qquad (9.67)$$

$$T_2 \leqslant \frac{1}{\omega_c} \frac{M}{M+1}. \qquad (9.68)$$

Если неравенства (9.67) и (9.68) удовлетворяются, то показатель колебательности меньше заданного значения M. Создается некоторый дополнительный запас устойчивости. Такой же эффект имеет место, если постоянная T_2 меньше значения, определяемого равенством (9.66). Увеличивать постоянную τ по сравнению со значением, определяемым равенством (9.65), не следует. Это в некоторых случаях может уменьшить запас устойчивости.

В более общем случае передаточная функция разомкнутой системы с астатизмом второго порядка

$$W = \frac{k(\tau s + 1)\,e^{-\theta s}}{s^2 (T_2 s^2 + 1)(T_3 s + 1) \ldots (T^2 s^2 + 2\xi T s + 1)}, \qquad (9.69)$$

т. е. в системе может быть несколько апериодических звеньев, колебательное звено и звенья чистого (постоянного) запаздывания с суммарным временем запаздывания θ. Тогда постоянную времени τ следует определить по формуле (9.65), а вместо формулы (9.66) нужно использовать выражение

$$\sum T_i \leqslant \frac{1}{\omega_0} \left(\frac{\sqrt{M(M-1)}}{M+1} - 0{,}1 \right). \qquad (9.70)$$

Сумма в левой части этого выражения должна включать в в себя все постоянные времени T_i апериодических звеньев, удовлетворяющие условию $T_i > \frac{1}{40\omega_0}$. Для приближенного учета влияния колебательного звена и чистого запаздывания в эту сумму включают слагаемые $2\xi T$ и θ. Наличие звеньев с малыми постоянными времени $\left(\text{меньше } \frac{1}{40\omega_0}\right)$ учитывается уменьшением правой части выражения (9.70) на $\frac{0{,}1}{\omega_0}$.

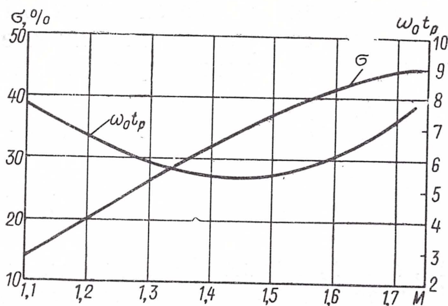


Рис. 9.20. Номограмма для определения показателей качества системы с астатизмом второго порядка

Наличие колебательного звена допустимо лишь при условии, что его постоянная времени

$$T \ll \frac{1}{\omega_0}. \qquad (9.71)$$

Кроме того, должно выполняться неравенство

$$\left| W\left(j\frac{1}{T}\right)\right| < \frac{M}{M+1}, \qquad (9.72)$$

чтобы не появилось второй запретной зоны в районе пика ЛАЧХ.

В предельном случае, если $\sum T = 0$, показатель колебательности не превысит заданного значения при выполнении неравенства

$$\tau \geqslant \frac{1}{\omega_0}\sqrt{2\frac{M^2 - M\sqrt{M^2-1}}{M^2-1}} \qquad (9.73)$$

или

$$\tau \geqslant \frac{2}{\omega_c}\frac{M^2 - M\sqrt{M^2-1}}{M^2-1}. \qquad (9.74)$$

Расчетные соотношения для системы, содержащей колебательное звено с постоянной времени $T > \frac{1}{\omega_0}$ и различные неустойчивые звенья, приведены в работе [17].

Если система имеет ЛАЧХ разомкнутой цепи, изображенную на рис. 9.19, *а*, и показатель колебательности M имеет минимальное значение, определяемое выражением (9.64), то переходные процессы в некотором смысле оптимальны. Переходная характеристика замкнутой системы максимально приближается к экспоненте с постоянной времени $T_э = \frac{1}{\omega_0 h^2}$. Чем больше h, тем меньше M и тем лучше переходные процессы. Зависимости показателей качества переходной характеристики: перерегулирования σ и относительного времени регулирования $\omega_0 t_р$, от значения M показателя колебательности показаны на рис. 9.20.

Эти зависимости с достаточной степенью точности справедливы и для систем, у которых ЛАЧХ разомкнутой цепи имеет форму, показанную на рис. 9.19, *б*, т. е. когда по обе стороны от частоты среза довольно протяженные участки асимптоты с наклоном —20 дБ/дек.

Построение желаемой ЛАЧХ системы начинают с нанесения низкочастотной асимптоты, при этом должны быть удовлетворены требования к точности (см. п. 9.1).

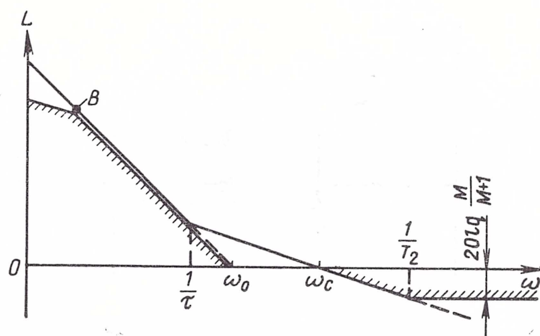


Рис. 9.21. Построение желаемой ЛАЧХ системы с астатизмом второго порядка

Для демпфирования системы низкочастотную асимптоту следует сдвигать влево: она должна проходить через контрольную точку B с координатами $[\omega_к, L_к]$, значения которых определяют по формулам (9.12) или (9.14). В последнем случае низкочастотная асимптота сливается с правой границей запретной области (см. рис. 9.1, *б*) и базовая частота

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\ddot{g}_{max}}{\beta}}. \qquad (9.75)$$

Затем наносят среднечастотную асимптоту (рис. 9.21) с наклоном —20 дБ/дек между сопрягающими частотами $\frac{1}{\tau}$ и $\frac{1}{T_2}$. Значения τ и T_2 определяют по формулам (9.65) и (9.66).

Высокочастотная часть ЛАЧХ может иметь произвольный вид. Она лишь ограничивается сверху прямой с ординатой

$$L_в = 20 \lg \frac{M}{M+1}, \qquad (9.76)$$

начинающейся от среднечастотной асимптоты (см. рис. 9.21).

Реализовать желаемую ЛАЧХ будет легче, если ее высокочастотная часть будет иметь изломы при сопрягающих частотах, соответствующих тем постоянным времени апериодических звеньев неизменяемой части системы, которые меньше T_2, и тем постоянным времени колебательных звеньев, которые значительно меньше $\frac{1}{\omega_0}$. Если имеются постоянные времени, не удовлетворяющие этим условиям, то высокочастотная часть желаемой ЛАЧХ должна все же иметь соответствующее число изломов на произвольно выбранных частотах, удовлетворяющих условиям.

ЛАЧХ последовательного корректирующего устройства определяют вычитанием ЛАЧХ неизменяемой части из желаемой ЛАЧХ. Можно по желаемой ЛАЧХ составить передаточную функцию $W_ж$, тогда передаточную функцию последовательного корректирующего устройства можно определить делением $W_ж$ на передаточную функцию $W_н$ неизменяемой части системы.

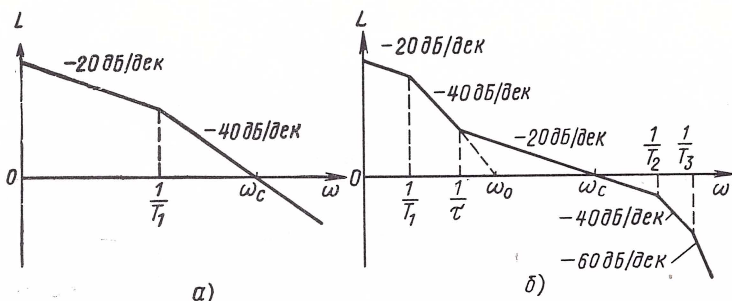


Рис. 9.22. Типовые ЛАЧХ разомкнутых систем с астатизмом первого порядка

Система с астатизмом первого порядка. Простейшая ЛАЧХ разомкнутой цепи такой системы показана на рис. 9.22, *а*. Ей соответствует передаточная функция

$$W = \frac{k}{s\,(T_1 s + 1)}. \tag{9.77}$$

Показатель колебательности не превысит допустимого значения M при выполнении неравенства

$$kT_1 \leqslant \frac{M^2 + M\sqrt{M^2 - 1}}{2}. \tag{9.78}$$

В более общем случае передаточная функция разомкнутой системы

$$W = \frac{k\mathrm{e}^{-\theta s}}{s\,(T_1 s + 1)\,(T_2 s + 1)\ldots}, \tag{9.79}$$

где θ — суммарное время чистого запаздывания.

Тогда при $M \leqslant 1{,}3$ можно пользоваться приближенной формулой

$$k\,(T_1 + T_2 + \ldots + \theta) \leqslant \frac{M^2 + M\sqrt{M^2 - 1}}{2}. \tag{9.80}$$

Она является точной при $M = 1$ и дает достаточно точные результаты при небольших значениях M ($M \leqslant 1{,}3$).

Система с простейшей ЛАЧХ, тем более при нескольких апериодических звеньях, может удовлетворить лишь невысокие требования к точности и запасу устойчивости.

ЛАЧХ разомкнутой цепи более совершенных систем с астатизмом первого порядка (рис. 9.22, *б*) пересекает ось абсцисс асимптотой с наклоном — 20 дБ/дек. Этой ЛАЧХ соответствует передаточная функция

$$W = \frac{k\,(\tau s + 1)}{s\,(T_1 s + 1)\,(T_2 s + 1)\,(T_3 s + 1)\ldots}, \tag{9.81}$$

где

$$T_1 > \tau > T_2 > T_3\ldots.$$

Такая ЛАЧХ отличается от ЛАЧХ систем с астатизмом второго порядка (см. рис. 9.19, *а*) лишь наличием низкочастотной асимптоты с наклоном —20 дБ/дек и изломом при частоте $\frac{1}{T_1}$. Пусть $\frac{1}{T_1} \gg \omega_м$, где $\omega_м$ — частота, определяемая формулой (9.63). При этой частоте требуется максимальный избыток фазы. Тогда расчет с большой степенью точности можно вести по формулам для системы с астатизмом второго порядка с симметричной ЛАЧХ (см. рис. 9.19, *а*).

Положение ЛАЧХ (см. рис. 9.22, *б*) фиксируется частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{T_1}} \tag{9.82}$$

или частотой среза ω_c.

Показатель колебательности не превышает допустимого значения M, если удовлетворяются соотношения

$$\tau = \frac{1}{\omega_0}\sqrt{\frac{M}{M-1}} \text{ и } T_2 + T_3 + \ldots \leqslant \frac{1}{\omega_c}\frac{\sqrt{M(M-1)}}{M+1} \tag{9.83}$$

или

$$\tau \geqslant \frac{1}{\omega_c}\frac{M}{M-1} \text{ и } T_2 + T_3 + \ldots \leqslant \frac{1}{\omega_0}\frac{M}{M+1}. \tag{9.84}$$

При расчете системы с колебательными звеньями и со звеньями чистого запаздывания действительны указания, сделанные для системы с астатизмом второго порядка. Для определения показателей качества σ и $t_р$ переходной характеристики можно пользоваться зависимостями, приведенными на рис. 9.20.

Построение желаемой ЛАЧХ начинают с ее низкочастотной части, положение которой должно удовлетворять требованиям к точности (см. пункт 4 в п. 9.1.) Возможны различные варианты выбора постоянной времени T_1 и соответственно расположения низкочастотной части желаемой ЛАЧХ относительно запретной зоны (см. рис. 9.2).

Пусть $\frac{1}{T_1} \geqslant (2 \div 3)\,\omega_к$, где $\omega_к$ — частота, определяющая точку B запретной зоны. Тогда низкочастотную асимптоту желаемой ЛАЧХ можно совместить с первой асимптотой запретной зоны (рис. 9.23, *а*). При этом передаточный коэффициент будет иметь минимальное значение, определяемое формулой (9.15):

$$k = \frac{\dot{g}_{max}}{\beta}.$$

Однако при этом значение ω_0 велико, поэтому вся ЛАЧХ сдвигается в область высоких частот и затрудняется демпфирование системы.

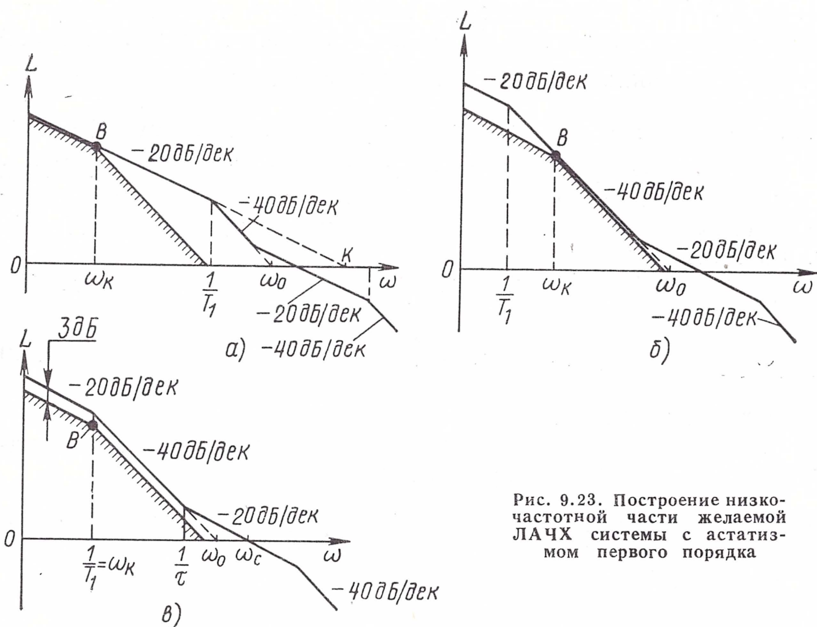


Рис. 9.23. Построение низкочастотной части желаемой ЛАЧХ системы с астатизмом первого порядка

Если выбрать $\frac{1}{T_1} \leqslant (2 \div 3)\,\omega_к$, то вторую асимптоту желаемой ЛАЧХ можно совместить со второй асимптотой запретной зоны (рис. 9.23, *б*). Тогда частота ω_0 минимальная. В соответствии с формулой (9.16)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\ddot{g}_{\max}}{\beta}}.$$

Передаточный коэффициент k (добротность по скорости) в этом случае будет в 2—3 раза превышать минимально необходимое значение, что увеличит влияние помех.

Если ни один из указанных вариантов не имеет преимуществ, то выбирают

$$\frac{1}{T_1} = \omega_к. \tag{9.85}$$

Тогда асимптоты низкочастотной части желаемой ЛАЧХ располагаются на 3 дБ выше запретной зоны (рис. 9.23, *в*), чтобы в эту зону не попала действительная ЛАЧХ.

В этом случае

$$\left.\begin{aligned} k &= \sqrt{2}\,\frac{\dot{g}_{\max}}{\beta} \\ \text{и}\qquad \omega_0 &= \sqrt{\sqrt{2}\,\frac{\ddot{g}_{\max}}{\beta}}. \end{aligned}\right\} \tag{9.86}$$

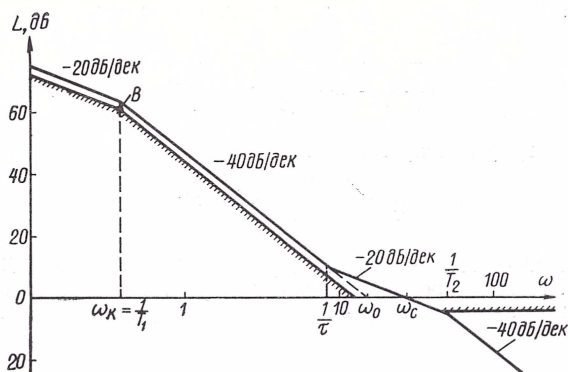


Рис. 9.24. Построение желаемой ЛАЧХ к примеру 9.7

Среднечастотную и высокочастотную части желаемой ЛАЧХ формируют так же, как и при синтезе системы с астатизмом второго порядка.

Пример 9.7. Передаточная функция неизменяемой части системы с астатизмом первого порядка

$$W_{\text{н}} = \frac{8}{s\,(0{,}15s+1)\,(0{,}02s+1)}.$$

Выбрать последовательное корректирующее устройство, обеспечивающее удовлетворение следующих требований: погрешность $\beta \leqslant 0{,}02$ град при изменении задающего воздействия с максимальной скоростью $\dot{g}_{\max}=8$ град/с и максимальным ускорением $\ddot{g}_{\max} = 3$ град/с²; показатель колебательности $M \leqslant 1{,}5$.

Определим координаты контрольной точки B, пользуясь формулами (9.14):

$$\omega_{\text{к}} = \frac{\ddot{g}_{\max}}{\dot{g}_{\max}} = \frac{3}{8} = 0{,}375 \text{ с}^{-1};$$

$$L_{\text{к}} = 20 \lg \frac{\dot{g}^2_{\max}}{\ddot{g}_{\max}\beta} = 20 \lg \frac{8^2}{3 \cdot 0{,}02} = 60{,}6 \text{ дБ}.$$

Нанесем контрольную точку B (рис. 9.24) и проведем через нее асимптоты, ограничивающие запретную зону.

Примем $T_1 = \dfrac{1}{\omega_{\text{к}}} = \dfrac{1}{0{,}375} = 2{,}67$ с и построим низкочастотную часть желаемой ЛАЧХ так, чтобы ее асимптоты были на 3 дБ выше границы запретной зоны.

По формулам (9.86) определим необходимое значение передаточного коэффициента k (добротности по скорости) и значение базовой частоты ω_0:

$$k = \sqrt{2}\,\frac{\dot{g}_{\max}}{\beta} = \sqrt{2}\,\frac{8}{0{,}02} = 566 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_0 = \sqrt{\sqrt{2}\,\frac{\ddot{g}_{\max}}{\beta}} = \sqrt{\sqrt{2}\,\frac{3}{0{,}02}} = 14{,}6 \text{ с}^{-1}.$$

Определим необходимое значение постоянной времени τ, пользуясь формулой (9.83):

$$\tau = \frac{1}{\omega_0}\sqrt{\frac{M}{M-1}} = \frac{1}{14{,}6}\sqrt{\frac{1{,}5}{1{,}5-1}} = 0{,}119 \text{ с}.$$

Нанесем на график сопрягающую частоту

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{0{,}119} = 8{,}4 \text{ с}^{-1}$$

и построим от этой частоты среднечастотную асимптоту желаемой ЛАЧХ.

По формуле (9.76) определим ординату $L_в$ прямой, которая ограничивает справа среднечастотную асимптоту и ограничивает сверху высокочастотную часть желаемой ЛАЧХ:

$$L_в = 20 \lg \frac{M}{M+1} = 20\lg \frac{1{,}5}{1{,}5+1} = -4{,}4 \text{ дБ}.$$

Нанеся эту прямую на график, определим, что среднечастотная асимптота может быть ограничена частотой 45,7 $с^{-1}$. Следовательно, сопрягающая частота

$$\frac{1}{0{,}02} = 50 \text{ с}^{-1},$$

создаваемая постоянной времени 0,02 с неизменяемой части системы, допустима для желаемой ЛАЧХ. Примем, что $T_2 = 0{,}02$ с, и от значения частоты $\frac{1}{T_2} = 50$ $с^{-1}$ построим высокочастотную асимптоту желаемой ЛАЧХ.

Сопрягающая частота $\frac{1}{0{,}15} = 6{,}67$ $с^{-1}$, соответствующая постоянной времени 0,15 с неизменяемой части системы, недопустима для желаемой ЛАЧХ. Для обеспечения физической реализуемости корректирующего устройства полагаем, что желаемая ЛАЧХ имеет еще одну сопрягающую частоту $\frac{1}{T_3} \gg 50$ $с^{-1}$.

Тогда желаемая передаточная функция

$$W_ж = \frac{566\,(0{,}119s+1)}{s\,(2{,}67s+1)\,(0{,}02s+1)\,(T_3s+1)},$$

а необходимая передаточная функция последовательного корректирующего устройства

$$W_к = \frac{W_ж}{W_н} = \frac{70{,}7\,(0{,}119s+1)\,(0{,}15s+1)}{(2{,}67s+1)\,(T_3s+1)}.$$

При физической реализации корректирующего устройства необходимо выбрать значение постоянной времени $T_3 \ll 0{,}02$ с.

Пусть $T_3 = 0{,}001$ с, тогда передаточная функция замкнутой системы

$$W_g = \frac{0{,}119s+1}{9{,}93\cdot10^{-8}s^4 + 9{,}91\cdot10^{-5}s^3 + 4{,}75\cdot10^{-3}s^2 + 0{,}121s+1}.$$

Показатели качества переходной характеристики: $\sigma = 32{,}7\%$ и $t_р = 0{,}24$ с.

Статическая система. Простейшая ЛАЧХ разомкнутой статической системы показана на рис. 9.25, *а*. Ей соответствует передаточная функция

$$W = \frac{k}{(T_0s+1)\,(T_1s+1)\,(T_2s+1)}. \tag{9.87}$$

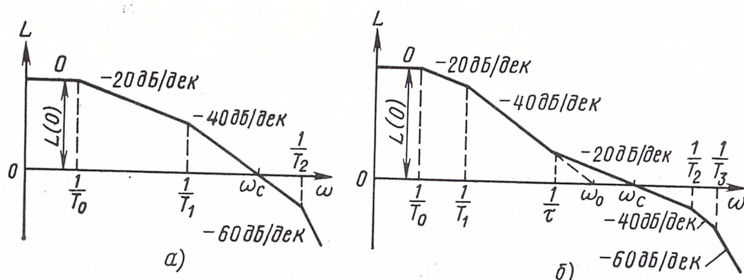


Рис. 9.25. Типовые ЛАЧХ разомкнутой статической системы

Если $\frac{1}{T_1} < \omega_c < \frac{1}{T_2}$, то при $M \leqslant 1{,}3$ достаточную точность дает приближенная формула

$$\frac{k\,(T_1 + T_2 + \cdots)}{T_0} \leqslant \frac{M^2 + M\sqrt{M^2 - 1}}{2}. \tag{9.88}$$

Из формулы следует, что постоянная времени T_0 увеличивает запас устойчивости. При увеличении передаточного коэффициента k или суммы постоянных времени $T_1 + T_2 + \ldots$ для сохранения заданного значения M показателя колебательности нужно увеличивать наибольшую постоянную времени T_0.

При повышенных требованиях к точности статическая система должна иметь ЛАЧХ, изображенную на рис. 9.25, *б*. Ей соответствует передаточная функция

$$W = \frac{k\,(\tau s + 1)}{(T_0 s + 1)\,(T_1 s + 1)\,(T_2 s + 1)\ldots}, \tag{9.89}$$

где

$$T_0 > T_1 > \tau > T_2 > \ldots$$

Такую систему с достаточной степенью точности можно рассчитывать как систему с астатизмом второго порядка, имеющую симметричную ЛАЧХ (см. рис. 9.19).

Базовую частоту определяют приближенно по формуле

$$\omega_0 \approx \sqrt{\frac{k}{T_0 T_1}}. \tag{9.90}$$

Показатель колебательности не превышает заданного значения M при удовлетворении следующих соотношений:

$$\tau = \frac{1}{\omega_0}\sqrt{\frac{M}{M-1}} = \frac{1}{\omega_c}\,\frac{M}{M-1}$$

и

$$T_2 + T_3 + \cdots \leqslant \frac{1}{\omega_0}\,\frac{\sqrt{M\,(M-1)}}{M+1} = \frac{1}{\omega_c}\,\frac{M}{M+1}. \tag{9.91}$$

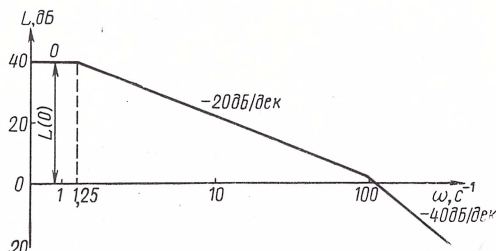


Рис. 9.26. Построение желаемой ЛАЧХ к примеру 9.8

Отклонение симметричной ЛАЧХ статической системы (рис. 9.25, *б*) в области низких частот от ЛАЧХ системы с астатизмом второго порядка (см. рис. 9.19, *а*) является причиной дополнительного запаса устойчивости. Его можно учесть, если пользоваться формулой

$$T_2 + T_3 + \cdots \leqslant \frac{1}{\omega_0}\left[\frac{\sqrt{M(M-1)}}{M+1} + \left(\frac{1}{\omega_0 T_0} + \frac{1}{\omega_0 T_1}\right)\frac{M}{M+1}\right]. \tag{9.92}$$

При расчете статической системы с симметричной ЛАЧХ, имеющей колебательное звено, звенья чистого запаздывания и неустойчивые, следует поступать так же, как при расчете системы с астатизмом второго порядка. Зависимость показателей качества переходной характеристики σ и $t_р$ от M можно определять по рис. 9.20.

Низкочастотную асимптоту желаемой ЛАЧХ строят по значению передаточного коэффициента k разомкнутой системы, при котором обеспечивается необходимая точность:

$$L(0) = 20\lg k. \tag{9.93}$$

Затем нужно проверить возможность получения необходимого значения M показателя колебательности при простейшей форме ЛАЧХ (рис. 9.25, *а*). Если это невозможно, то нужно формировать среднечастотную и высокочастотную части желаемой ЛАЧХ в соответствии с рис. 9.25, *б*.

Пример 9.8. Передаточная функция разомкнутой цепи статической следящей системы

$$W = \frac{100}{(0{,}8s + 1)(0{,}01s + 1)(Ts + 1)}.$$

Выяснить, при каком максимальном значении постоянной времени T показатель колебательности M не превышает 1,3.

Строим низкочастотную часть ЛАЧХ разомкнутой системы (рис. 9.26):

$$L(0) = 20\lg 100 = 40 \text{ дБ}; \quad \frac{1}{T_0} = \frac{1}{0{,}8} = 1{,}25 \text{ с}^{-1};$$

$$\frac{1}{T_1} = \frac{1}{0{,}01} = 100 \text{ с}^{-1}.$$

ЛАЧХ системы является типовой (см. рис. 9.25, *а*). Для приближенного определения максимального значения T можно воспользоваться соотношением

(9.88), рассматривая его как равенство. Подставив известные величины, получаем

$$\frac{100\,(0{,}01+T)}{0{,}8}=\frac{1{,}3^2+1{,}3\sqrt{1{,}3^2-1}}{2},$$

$$T=0{,}00108\ \text{с}.$$

Итак, при найденном значении T показатель колебательности системы $M\approx 1{,}3$.

9.7. СИНТЕЗ САР СРАВНЕНИЕМ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ И ПО КРИТЕРИЮ СБЛИЖЕНИЯ

Иногда необходимое корректирующее устройство удобно определить непосредственным сравнением желаемой передаточной функции с передаточной функцией основной части системы.

К таким случаям относят выбор корректирующего устройства по преобладающей паре комплексно-сопряженных полюсов передаточной функции замкнутой системы. Ранее в п. 9.5 эту задачу решали с использованием корневого годографа. Однако ее можно решить и без графических построений.

Предположим, что заданы необходимое значение передаточного коэффициента k разомкнутой статической системы, а также допустимые значения перерегулирования σ и времени регулирования $t_р$. По номограмме, изображенной на рис. 9.5, определяют необходимые значения коэффициента демпфирования ξ и постоянной времени T. Тогда желаемая передаточная функция замкнутой системы относительно задающего воздействия

$$W_g=\frac{k}{(k+1)\,(T^2s^2+2\xi Ts+1)}, \tag{9.94}$$

а желаемая передаточная функция разомкнутой системы

$$W_ж=\frac{W_g}{1-W_g}=\frac{k}{(k+1)\,(T^2s^2+2\xi Ts)+1}. \tag{9.95}$$

При

$$\xi^2>\frac{1}{1+k}$$

$$W_ж=\frac{k}{(T_1s+1)\,(T_2s+1)}, \tag{9.96}$$

где

$$T_{1,2}=(1+k)\,T\left(\xi\pm\sqrt{\left(\xi^2-\frac{1}{1+k}\right)}\right);$$

при

$$\xi^2=\frac{1}{1+k}$$

$$W_ж=\frac{k}{(T_1s+1)^2}, \tag{9.97}$$

где

$$T_1 = (1 + k)\,\xi T,$$

и при

$$\xi^2 < \frac{1}{1+k}$$

$$W_ж = \frac{k}{T_1^2 s^2 + 2\xi_1 T_1 s + 1}, \qquad (9.98)$$

где

$$T_1 = \sqrt{1+k}\,T; \quad \xi_1 = \xi\sqrt{1+k}.$$

Передаточная функция необходимого последовательного корректирующего устройства по формуле (9.56)

$$W_{к1} = \frac{W_ж}{W_н},$$

где $W_н$ — передаточная функция неизменяемой части системы.

Формулы (8.38) и (8.40) позволяют вычислить значения передаточных функций эквивалентных параллельного и прямого параллельного корректирующих устройств. Затем можно выбрать наиболее приемлемое из них.

Значения k, σ и $t_р$ целесообразно варьировать в допустимых пределах, так, чтобы T_1 или T_2 совпали с одной из постоянных времени неизменяемой части системы.

Если задано максимально допустимое значение ускорения регулируемой координаты w_{max} при начальном рассогласовании x_0, то постоянную времени T нужно выбирать по значению $t_{р0}$ времени регулирования, которое удовлетворяет неравенству

$$t_{р\,min} \leqslant t_{р0} \leqslant t_р, \qquad (9.99)$$

где $t_р$ — допустимое время регулирования; $t_{р\,min}$ — минимально допустимое время регулирования, определяемое по формуле

$$t_{р\,min} = 2\sqrt{\frac{x_0}{w_{max}}}. \qquad (9.100)$$

Во всех случаях можно иметь лишь $t_{р0} \geqslant t_{р\,min}$.

Если синтезируют астатическую систему при заданном значении k, то желаемая передаточная функция замкнутой системы должна содержать еще диполь:

$$W_g = \frac{T_а s + 1}{(T^2 s^2 + 2\xi T s + 1)(T_б s + 1)}, \qquad (9.101)$$

где

$$T_а \approx T_б.$$

В этом случае желаемая передаточная функция разомкнутой системы

$$W_ж = \frac{k(T_а s + 1)}{(a_0 s^2 + a_1 s + 1)s}. \qquad (9.102)$$

Здесь

$$k = \frac{1}{2\xi T + (T_б - T_а)}; \quad a_0 = kT_бT^2; \quad a_1 = kT(T + 2\xi T_б). \qquad (9.103)$$

Из первой формулы (9.103) следует, что разность постоянных времени диполя зависит от заданного значения k, а также от значений ξ и T, определенных по заданным значениям σ и $t_р$:

$$T_б - T_а = \frac{1}{k} - 2\xi T. \qquad (9.104)$$

При

$$4T_б/k < (T + 2\xi T_б)^2$$

имеем

$$W_ж = \frac{k(T_а s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, \qquad (9.105)$$

где

$$T_{1,2} = \frac{kT}{2}\left[(T + 2\xi T_б) \pm \sqrt{(T + 2\xi T_б)^2 - 4\frac{T_б}{k}}\right].$$

При

$$4T_б/k > (T + 2\xi T_б)^2$$

имеем

$$W_ж = \frac{k(T_а s + 1)}{s(T_1^2 s^2 + 2\xi_1 T_1 s + 1)}, \qquad (9.106)$$

где

$$T_1 = T\sqrt{kT_б} \text{ и } \xi_1 = \frac{(T + 2\xi T_б)}{2}\sqrt{\frac{k}{T_б}}.$$

При составлении желаемой передаточной функции $W_ж$ следует стремиться к возможно большему совпадению ее с передаточной функцией неизменяемой части системы $W_н$. Дополнительная возможность получить такой результат — соответствующий выбор постоянной времени $T_б$ диполя.

Необходимо иметь в виду, что переходная характеристика замкнутой системы будет действительно зависеть только от определяющей пары полюсов лишь при $T_а \approx T_б$. Поэтому после выбора корректирующего устройства совершенно необходима проверка качества переходной характеристики замкнутой системы.

Пример 9.9. Передаточная функция неизменяемой части системы (включая усилитель)

$$W_н = \frac{100}{s(0{,}8s + 1)(0{,}25s + 1)}.$$

Выбрать передаточную функцию $W_{к1}$ последовательного корректирующего устройства, обеспечивающего при $k = 100$ с$^{-1}$ перерегулирование $\sigma \leqslant 20\%$ и время регулирования $t_р < 0{,}4$ с.

По номограмме, изображенной на рис. 9.5, определим, что при $\sigma = 20\%$ $\xi = 0{,}44$ и $\frac{t_р}{T} = 7$. Следовательно,

$$T = \frac{t_р}{7} = \frac{0{,}4}{7} = 0{,}057 \text{ с}.$$

По формуле (9.104) определим разность между постоянными времени $T_б$ и $T_а$, при которых передаточный коэффициент разомкнутой системы k имеет необходимое значение:

$$T_б - T_а = \frac{1}{100} - 2 \cdot 0{,}44 \cdot 0{,}057 = -0{,}0402 \text{ с}.$$

Выберем $T_б = 0{,}8$ с, тогда

$$T_а = T_б + 0{,}0402 = 0{,}84 \text{ с};$$

$$\frac{4T_б}{k} = 0{,}032 < (T + 2\xi T_б)^2 = 0{,}579;$$

по формуле (9.105) составим желаемую передаточную функцию разомкнутой системы

$$W_ж = \frac{100\,(0{,}84s + 1)}{s\,(4{,}28s + 1)\,(0{,}0608s + 1)}.$$

При соответствующем выполнении корректирующего устройства передаточная функция системы относительно задающего воздействия

$$W_g = \frac{0{,}84s + 1}{(0{,}057^2 s^2 + 2 \cdot 0{,}44 \cdot 0{,}057s + 1)\,(0{,}8s + 1)}.$$

Используя формулы № 62 табл 4.1 составим аналитическое выражение переходной характеристики:

$$h\,(t) = 1 - 1{,}172\mathrm{e}^{-7{,}72t} \sin\,(15{,}75t + 1{,}118) + 0{,}053\mathrm{e}^{-1{,}25t}.$$

Ее показатели качества: $\sigma = 28\%$ и $t_р = 0{,}33$ с.

Значения показателей качества несколько отличаются от требуемых вследствие того, что относительное значение разности между постоянными времени диполя

$$\frac{T_а - T_б}{T_б} = \frac{0{,}84 - 0{,}8}{0{,}8} = 0{,}05.$$

Чтобы необходимая разность между $T_а$ и $T_б$ имела меньшее относительное значение, нужно увеличивать $T_б$ и соответственно увеличивать $T_а$. Однако при этом увеличивается сложность корректирующего устройства.

Поэтому выясним может ли быть в желаемой передаточной функции $W_ж$ как и в передаточной функции $W_н$ неизменяемой части системы постоянная времени, равная 0,8 с. При этом потребуется значительно более простое корректирующее устройство, чем в ранее рассмотренном случае.

Пользуясь равенствами (9.103), составим систему уравнений для определения T_2 и $T_б$:

$$0{,}8T_2 = 100 \cdot 0{,}057^2 T_б;$$

$$0{,}8 + T_2 = 100 \cdot 0{,}057\,(0{,}057 + 2 \cdot 0{,}44 \cdot T_б).$$

Решение этой системы уравнений: $T_2 = 0{,}0418$ с и $T_б = 0{,}103$ с.

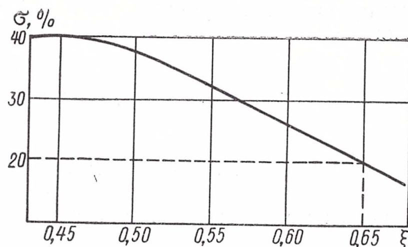


Рис. 9.27. График зависимости σ от ξ к примеру 9.9

Следовательно, нужно иметь:

$$T_а = 0,143 \text{ с}; \quad W_ж = \frac{100\,(0,143s + 1)}{s\,(0,8s + 1)\,(0,0418s + 1)};$$

$$W_{к1} = \frac{(0,143s + 1)\,(0,25s + 1)}{0,0418s + 1}.$$

Реализация передаточной функции необходимого корректирующего устройства не вызовет затруднений. Однако относительная разность

$$\frac{T_а - T_б}{T_б} = \frac{0,04}{0,103} \approx 0,4,$$

резко увеличилась. Поэтому переходная характеристика замкнутой системы имеет значительно худшие показатели качества: $\sigma = 40\%$ и $t_р = 0,43$ с.

Зададимся для расчета меньшими показателями качества: $\sigma = 15\%$ и $t_р = 0,36$ с. Тогда показатели качества переходной характеристики синтезированной системы: $\sigma = 37\%$ и $t_р = 0,33$ с.

Повторим расчет при еще меньшем значении перерегулирования $\sigma = 10\%$ и несколько большем значении времени регулирования $t_р = 0,4$ с. В этом случае показатели качества переходной характеристики синтезированной системы $\sigma = 28\%$ и $t_р = 0,37$ с.

По результатам трех последних вариантов расчета можно построить график зависимости σ от ξ (рис. 9.27) при $T_1 = 0,8$ с. Продолжая эту кривую определим, что $\sigma = 20\%$ при $\xi = 0,65$.

Пользуясь номограммой, определим: при $\xi = 0,65$ $\frac{t_р}{T} = 4,5$.

Следовательно, $T = \frac{0,4}{4,5} = 0,0889$ с;

$$T_б - T_а = \frac{1}{100} - 2 \cdot 0,65 \cdot 0,0889 = -0,1056 \text{ с}.$$

Система уравнений для определения T_2 и $T_б$ при $T_1 = 0,8$ с:

$$0,8T_2 = 100 \cdot 0,0889^2 T_б;$$

$$0,8 + T_2 = 100 \cdot 0,0889\,(0,0889 + 2 \cdot 0,65T_б).$$

Решение этой системы уравнений: $T_б = 0,000946$ с и $T_2 = 0,000934$ с. Следовательно,

$$T_а = 0,000946 + 0,1056 = 0,1065 \text{ с};$$

$$W_ж = \frac{100\,(0,1065s + 1)}{s\,(0,8s + 1)\,(0,000934s + 1)};$$

$$W_{к1} = \frac{W_ж}{W_н} = \frac{(0,1065s + 1)\,(0,25s + 1)}{0,000934s + 1}.$$

Передаточную функцию необходимого корректирующего устройства можно реализовать с помощью активного четырехполюсника постоянного тока. При

этом передаточная функция замкнутой системы относительно задающего воздействия

$$W_g = \frac{100\,(0{,}1065s + 1)}{s^2\,(0{,}8s + 1)\,(0{,}000934s + 1) + 100\,(0{,}1065s + 1)} =$$

$$= \frac{0{,}1065s + 1}{(0{,}0889^2 s^2 + 2\cdot 0{,}65\cdot 0{,}0889s + 1)\,(0{,}000946s + 1)}$$

и аналитическое выражение переходной характеристики

$$h\,(t) = 1 - 1{,}241\mathrm{e}^{-7{,}312t}\sin\,(8{,}548t + 2{,}187) + 0{,}013\mathrm{e}^{-1000t}.$$

Показатели качества переходной характеристики: $\sigma = 20\%$ и $t_{\text{р}} = 0{,}39$ с, удовлетворяют требованиям.

Рассмотренный пример показывает возможность использования номограммы (см. рис. 9.5) для синтеза системы, передаточная функция которой, кроме пары комплексно-сопряженных полюсов, имеет близкий к ним нуль (или полюс).

Параметры синтезируемой САР (в частности, параметры ее корректирующего устройства) можно определить по критерию сближения [124].

Сущность метода заключается в следующем. Пусть по требованиям к качеству выбрана передаточная функция $\Phi_{\text{ж}} = \frac{R_{\text{ж}}}{G_{\text{ж}}}$ замкнутой системы. Известны также в общем виде действительная передаточная функция $\Phi = \frac{R}{G}$ замкнутой системы, состоящей из неизменяемой части и корректирующего устройства. Здесь $R_{\text{ж}}$, $G_{\text{ж}}$, R и G — полиномы от s.

Передаточным функциям $\Phi_{\text{ж}}$ и Φ соответствуют весовые функции (см. п. 2.4) $w_{\text{ж}} = w_{\text{ж}}\,(t)$ и $w = w\,(t)$.

Задача заключается в выборе параметров передаточной функции Φ, при которых весовая функция w минимально отличается от $w_{\text{ж}}$.

Сближение весовых функций можно оценивать текущим критерием

$$\delta = w - w_{\text{ж}}, \tag{9.107}$$

интегральным квадратичным критерием

$$J = \int_0^\infty (w - w_{\text{ж}})^2\,dt, \tag{9.108}$$

а также более сложными интегральными квадратичными критериями.

Изображение по Лапласу текущего критерия сближения

$$\Delta\,(s) = \Phi - \Phi_{\text{ж}} = \frac{R}{G} - \frac{R_{\text{ж}}}{G_{\text{ж}}} = \frac{RG_{\text{ж}} - GR_{\text{ж}}}{GG_{\text{ж}}}. \tag{9.109}$$

Доказано, что по модулю комплексной функции $\Delta(j\omega)$ можно найти действительную часть комплексной функции $S(j\omega)$ [124]:

$$2\,\mathrm{Re}\{S(j\omega)\} = |\Delta(j\omega)|^2, \qquad (9.110)$$

а по мнимой части этой комплексной функции определяют интегральный квадратичный критерий сближения:

$$J = -\lim_{\omega\to\infty}[\omega\,\mathrm{Jm}\{S(j\omega)\}]. \qquad (9.111)$$

Таким образом, после определения $\Delta(j\omega)$ следует выбрать комплексную функцию $S(j\omega)$ так, чтобы у этих функций были одинаковые знаменатели и равные степени числителей. Тогда можно приравнять коэффициенты при одинаковых степенях ω числителей левой и правой части равенства (9.110). Полученная система алгебраических уравнений позволяет определить коэффициенты числителя функции $S(j\omega)$. Затем можно отыскать значение J по формуле (9.111).

Выражение для J будет содержать выбираемые параметры α, β, ... передаточной функции Φ. Их значения должны быть определены по минимуму J (см. п. 9.2) и при этом будет достигнуто возможное приближение весовой функции w к $w_ж$. В случае недостаточного сближения следует изменить вид передаточной функции Φ или число ее выбираемых параметров. Расчет можно проводить на ЦВМ [11].

Пример 9.10. Передаточная функция замкнутой системы

$$\Phi = \frac{\tau s + 1}{0{,}01s^2 + (\tau + 0{,}02)\,s + 1}.$$

Выбрать параметр τ так, чтобы весовая функция, соответствующая этой передаточной функции, максимально приближалась к весовой функции, соответствующей передаточной функции $\Phi_ж = \dfrac{1}{0{,}2s + 1}$.

Прежде всего, пользуясь формулой (9.109), определим изображение по Лапласу текущего критерия сближения

$$\Delta(s) = \frac{\tau s + 1}{0{,}01s^2 + (\tau + 0{,}02)\,s + 1} - \frac{1}{0{,}2s + 1} = \frac{b_0 s^2 + b_1 s}{a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + 1},$$

где

$$b_0 = 0{,}2\,(\tau - 0{,}05);\; b_1 = 0{,}18;$$

$$a_0 = 0{,}002;\; a_1 = 0{,}2\,(\tau + 0{,}07);\; a_2 = \tau + 0{,}22.$$

Следовательно,

$$\Delta(j\omega) = \frac{-b_0\omega^2 + jb_1\omega}{(1 - a_1\omega^2) + j\omega\,(a_2 - a_0\omega^2)}.$$

Выберем

$$S(j\omega) = \frac{c_0\omega^2 + jc_1\omega}{(1 - a_1\omega^2) + j\omega\,(a_2 - a_0\omega^2)}$$

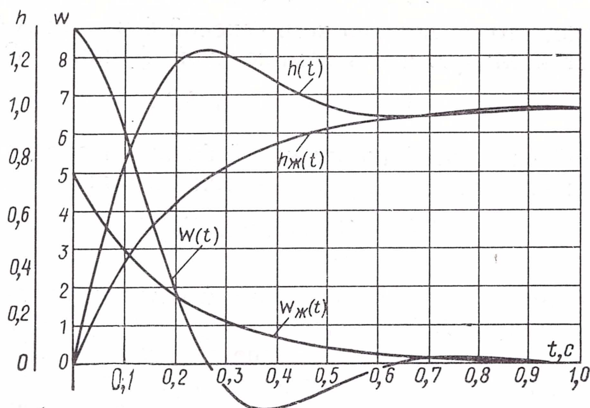


Рис. 9.28. Весовые функции и переходные характеристики к примеру 9.10

и составим равенство (9.110):

$$2\frac{c_0\omega^2(1-a_1\omega^2)+c_1\omega^2(a_2-a_0\omega^2)}{(1-a_1\omega^2)^2+\omega^2(a_2-a_0\omega^2)^2}=\frac{b_0^2\omega^4+b_1^2\omega^2}{(1-a_1\omega^2)^2+\omega^2(a_2-a_0\omega^2)^2}.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ω числителей левой и правой части составленного равенства:

при ω^2 имеем $2(c_0+a_2c_1)=b_1^2$;

при ω^4 имеем $-2(a_1c_0+a_0c_1)=b_0^2$.

Решая полученную систему уравнений, определим

$$c_1=\frac{b_0^2+a_1b_1^2}{2(a_1a_2-a_0)};\quad c_0=\frac{-(a_2b_0^2+a_0b_1^2)}{2(a_1a_2-a_0)}.$$

Далее составим выражение для квадратичного интегрального критерия сближения по формуле (9.111):

$$J=-\lim_{\omega\to\infty}\left[\omega\frac{c_1\omega(1-a_1\omega^2)-c_0\omega^3(a_2-a_0\omega^2)}{(1-a_1\omega^2)^2+\omega^2(a_2-a_0\omega^2)^2}\right]=\frac{-c_0}{a_0}=$$

$$=\frac{a_2b_0^2+a_0b_1^2}{2a_0(a_1a_2-a_0)}=\frac{(\tau+0,22)\,0,04\,(\tau-0,05)^2+0,002\cdot 0,18^2}{2\cdot 0,002\,[0,2\,(\tau+0,07)\,(\tau+0,22)-0,002]}=$$

$$=50\frac{\tau^3+0,12\tau^2-0,0195\tau+0,00217}{\tau^2+0,29\tau+0,0054}.$$

Определим условие минимума J:

$$\frac{dJ}{d\tau}=50\left[\frac{3\tau^2+2\cdot 0,12\tau-0,0195}{\tau^2+0,29\tau+0,0054}-\right.$$

$$\left.-\frac{(\tau^3+0,12\tau^2-0,0195+0,00217)(2\tau+0,29)}{(\tau^2+0,29\tau+0,0054)^2}\right]=0;$$

$$(3\tau^2+0,24\tau-0,0195)(\tau^2+0,29\tau+0,0054)-$$

$$-(\tau^3+0,12\tau^2-0,0195\tau+0,00217)(2\tau+0,29)=0;$$

$$\tau^4+0,58\tau^3+0,0705\tau^2-0,003044\tau-0,0007346=0.$$

Полученное уравнение имеет следующие корни:

$$\tau_1 = 0{,}08805;\quad \tau_2 = -0{,}393 \text{ и } \tau_{3,\,4} = -0{,}1375 \pm j0{,}0481.$$

Постоянная времени τ форсирующего звена есть положительная величина. Следовательно, $\tau = 0{,}08805$.

Проверим, что при этом значении τ квадратичный интегральный критерий сближения действительно имеет минимум:

при $\tau = 0{,}05$ $J = 5{,}85$;

при $\tau = 0{,}08805$ $J = 2{,}67$;

при $\tau = 0{,}1$ $J = 2{,}725$.

Итак, весовая функция $w(t)$, соответствующая передаточной функции

$$\Phi = \frac{0{,}0881s + 1}{0{,}01s^2 + 0{,}108s + 1} = \frac{0{,}0881s + 1}{0{,}1^2 s^2 + 2\cdot 0{,}54\cdot 0{,}1s + 1},$$

максимально приближается (судя по минимуму квадратичного интегрального критерия сближения) к весовой функции $w_ж(t)$, соответствующей передаточной функции

$$\Phi = \frac{1}{0{,}2s + 1}.$$

Графики $w(t)$ и $w_ж(t)$ показаны на рис. 9.28. Там же показаны графики $h(t)$ и $h_ж(t)$ переходных характеристик.

Заметное различие между $w(t)$ и $w_ж(t)$, а также между $h(t)$ и $h_ж(t)$ при $t < 0{,}5$ с объясняется прежде всего значительным отличием структуры передаточной функции Φ от структуры $\Phi_ж$. Кроме того, играет роль свойство квадратичной интегральной оценки, использованной при расчете. Лучшие результаты можно получить, используя улучшенную квадратичную интегральную оценку.

Приложение 1

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА И ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Преобразование Лапласа

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,dt, \qquad (\text{П}1.1)$$

где $s=c+j\omega$, c и ω — постоянные, $j=\sqrt{-1}$; определяет соответствие между функцией времени $f(t)$ и комплексной функцией $F(s)$. Функцию $f(t)$ называют оригиналом, а функцию $F(s)$ изображением. Операцию перехода от оригинала к изображению символически записывают так:

$$F(s)=\mathscr{L}\{f(t)\} \text{ или } f(t)\doteqdot F(s).$$

Оригиналом может быть любая однозначная функция времени $f(t)$, если

$$f(t)=0 \text{ при } t<0; \qquad (\text{П}1.2)$$

интеграл

$$\int_0^\infty |f(t)|\,\mathrm{e}^{-ct}\,dt<\infty \qquad (\text{П}1.3)$$

существует при всех $c>c_0$, где число c_0 — абсцисса абсолютной сходимости функции $f(t)$.

Операциям над оригиналами соответствуют некоторые операции над изображениями. Теоремы, приведенные в табл. П1.1, устанавливают соответствие этих операций. Эти теоремы составляют основу операционного исчисления.

Многим соотношениям и операциям над оригиналами соответствуют более простые соотношения и операции над изображениями. Этим объясняется использование операционного исчисления при инженерных расчетах, в частности для решения линейных дифференциальных уравнений.

Сначала дифференциальное уравнение (или систему дифференциальных уравнений) преобразуют по Лапласу и получают

Таблица П1.1

Основные теоремы операционного исчисления (a, b, c, n — различные постоянные)

Наименование	Оригинал	Изображение
Свойство линейности	$cf(t)$ $f_1(t)+f_2(t)$	$cF(s)$ $F_1(s)+F_2(s)$
Дифференцирование оригинала	$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s)-s^{n-1}f(0)-$ $-s^{n-2}f'(0)-\dots-$ $-f^{(n-1)}(0)$
Интегрирование оригинала	$\int f(t)\,dt$	$\frac{1}{s}F(s)$
Теорема подобия	$f(at),\ a>0$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
Теорема запаздывания	$f(t-b),\ b>0$	$e^{-bs}F(s)$
Теорема смещения	$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
Дифференцирование изображения	$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
Интегрирование изображения	$\frac{f(t)}{t}$	$\int\limits_s^{\infty} F(z)\,dz$
Теорема свертывания (умножения изображений)	$\int\limits_0^t f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau$	$F_1(s)\,F_2(s)$
Теорема о конечном значении	$f(\infty)$	$\lim\limits_{s\to 0} sF(s)$
Теорема о начальном значении	$f(0)$	$\lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$

Таблица П1.2

Изображения некоторых функций
(a, λ, γ, n — различные постоянные)

Оригинал ($t > 0$)	Изображение	Оригинал ($t > 0$)	Изображение
$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$t \sin \lambda t$	$\frac{2\lambda s}{(s^2+\lambda^2)^2}$
$\delta(t)$	1	$t \cos \lambda t$	$\frac{s^2-\lambda^2}{(s^2+\lambda^2)^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$e^{-\gamma t} \sin \lambda t$	$\frac{\lambda}{(s+\gamma)^2+\lambda^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$e^{-\gamma t} \cos \lambda t$	$\frac{s+\gamma}{(s+\gamma)^2+\lambda^2}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$te^{-\gamma t} \sin \lambda t$	$\frac{2\lambda(s+\gamma)}{[(s+\gamma)^2+\lambda^2]^2}$
$t^2 e^{-at}$	$\frac{2}{(s+a)^3}$	$te^{-\gamma t} \cos \lambda t$	$\frac{(s+\gamma)^2-\lambda^2}{[(s+\gamma)^2+\lambda^2]^2}$
$1-e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\operatorname{sh} \gamma t$	$\frac{\gamma}{s^2-\gamma^2}$
$\sin \lambda t$	$\frac{\lambda}{s^2+\lambda^2}$	$\operatorname{ch} \gamma t$	$\frac{s}{s^2-\gamma^2}$
$\cos \lambda t$	$\frac{s}{s^2+\lambda^2}$		

алгебраическое уравнение (или систему алгебраических уравнений) относительно изображений. Интеграл (П1.1) для большого числа функций вычислен, поэтому преобразование обычно сводится к использованию таблиц. Изображения некоторых функций времени при нулевых начальных условиях даны в табл. П1.2.

Из алгебраического уравнения (или системы уравнений) определяют изображение искомой переменной и затем оригинал, т. е. функцию времени, являющуюся искомой переменной.

Оригинал $f(t)$, соответствующий изображению $F(s)$, отыскивают путем обратного преобразования Лапласа:

$$f(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(s)\, e^{st}\, ds. \qquad (\text{П}1.4)$$

Вместо вычисления интеграла (П1.4) удобнее, конечно, отыскивать оригинал по таблице преобразований различных функций.

Если изображение $F(s)$ представляет собой дробно-рациональную функцию, то оригинал $f(t)$ можно определить с помощью одной из теорем разложения Хевисайда.

Пусть изображение Лапласа функции $f(t)$ есть

$$F(s) = \frac{R(s)}{G(s)}, \tag{П1.5}$$

где $G(s)$ — полином от s степени k, не имеющий нулевых и кратных корней; $R(s)$ — полином от s степени $m < k$.

Тогда

$$f(t) = \sum_{i=1}^{k} \frac{R(s_i)}{G'(s_i)} e^{s_i t}, \tag{П1.6}$$

где s_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ — корни полинома $G(s)$,

$$G'(s_i) = \left[\frac{dG(s)}{ds}\right]_{s=s_i}.$$

Изображение $F(s)$, знаменатель которого имеет нулевой корень, следует представить в таком виде:

$$F(s) = \frac{R(s)}{sQ(s)}, \tag{П1.7}$$

где $Q(s)$ — полином от s степени n, не имеющий нулевых и кратных корней; $R(s)$ — полином от s степени $m \leqslant n$.

В этом случае

$$f(t) = \frac{R(0)}{Q(0)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{R(s_i)}{s_i Q'(s_i)} e^{s_i t}, \tag{П1.8}$$

где s_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ — корни полинома $Q(s)$,

$$Q'(s_i) = \left[\frac{dQ(s)}{ds}\right]_{s=s_i}.$$

При определении оригинала по дробно-рациональному изображению $F(s)$ используют также следующий прием. Изображение разделяют на сумму простых дробей и для каждой из них отыскивают оригинал по таблице преобразований Лапласа или с помощью теоремы разложения. На основании свойства линейности оригинал, соответствующий изображению $F(s)$, равен сумме оригиналов, соответствующих этим простым дробям.

Иногда при инженерных расчетах достаточно рассматривать приближенное значение оригинала, определяемое по коэффициентам ошибки (см. п. 7.2).

Приложение 2

РАЗЛОЖЕНИЕ ПОЛИНОМОВ С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НА МНОЖИТЕЛИ

При вычислении переходных характеристик и построении логарифмических частотных характеристик возникает необходимость в разложении полиномов от s на множители, т. е. в вычислении корней этих полиномов. Корни полиномов третьей и четвертой степеней можно вычислить по точным формулам [66], однако расчет достаточно сложен. Корни полиномов более высоких степеней можно вычислить только приближенно и для этого используют ряд методов [38, 67 и др.]. Существуют также специфические методы, предложенные для использования при анализе систем автоматического регулирования. Ниже рассмотрим применение некоторых из этих методов для разложения полиномов на элементарные множители вида $T_i s + 1$ и $T_j^2 s^2 + 2\xi T_j s + 1$, $\xi < 1$.

Они обеспечивают точность, вполне достаточную для инженерных расчетов, и позволяют вести вычисления с помощью ЭЦВМ. Графоаналитический метод [62, 63] предполагает весьма простые вычисления, но результаты могут иметь существенные погрешности поэтому он может быть использован лишь для ориентировочных оценок.

Применение метода Лина

Этот весьма простой метод позволяет вычислять действительные и комплексные корни полиномов выше третьей степени [62, 63]. Применим его для разложения на элементарные множители полинома вида

$$G(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + 1 \qquad (П2.1)$$

и будем последовательно выделять трехчлены вида

$$b_0 s^2 + b_1 s + 1. \qquad (П2.2)$$

В качестве первого приближения можно принять, что

$$b_{01} = \frac{a_0}{a_2} \text{ и } b_{11} = \frac{a_1}{a_2}.$$

Затем полином (П2.1) нужно делить на трехчлен (П2.2), начиная с младших членов:

$$1 + a_{n-1}s + \cdots + a_1 s^{n-1} + a_0 s^n \left| \frac{1 + b_{11}s + b_{01}s^2}{1 + r_{n-3}s + \cdots + r_0 s^{n-2}} \right.$$

. . . .

$$\begin{array}{r} -\dfrac{r_0 s^{n-2} + (a_1 - r_1 b_{01}) s^{n-1} + a_0 s^n}{r_0 s^{n-2} + r_0 b_{11} s^{n-1} + r_0 b_{01} s^n} \\ (a_1 - r_1 b_{01} - r_0 b_{11}) s^{n-1} + (a_0 - r_0 b_{01}) s^n. \end{array} \qquad (П2.3)$$

Если разности $a_1 - r_1 b_{01} - r_0 b_{11}$ и $a_0 - r_0 b_{01}$ не являются пренебрежимо малыми по сравнению соответственно с a_1 и a_0, то нужно определить второе приближение коэффициентов полинома (П2.2):

$$b_{02} = \frac{a_0}{r_0} \text{ и } b_{12} = \frac{a_1 - r_1 b_{01}}{r_0},$$

где r_0 и r_1 — коэффициенты старших членов частного в (П2.3).

Затем полином (П2.1) делить на $1 + b_{12}s + b_{02}s^2$ и исследовать разности $a_1 - r_1 b_{02} - r_0 b_{12}$ и $a_0 - r_0 b_{02}$. Вычисления нужно продолжать, пока не окажется, что разности $a_1 - r_1 b_{0l} - r_0 b_{1l}$ и $a_0 - r_0 b_{0l}$ при $l \geqslant 2$ пренебрежимо малы (по сравнению соответственно с a_1 и a_0). Тогда можно принять

$$b_0 = b_{0l}, \quad b_1 = b_{1l}$$

и тем же путем выделить трехчлен из полинома

$$r_0 s^{n-2} + \cdots + r_{n-3}s + 1,$$

если $n - 2 > 2$.

Каждый из трехчленов вида (П2.2) нужно разложить, если возможно, на двучлены или преобразовать:

при $b_1 > 2\sqrt{b_0}$

$$b_0 s^2 + b_1 s + 1 = (T_1 s + 1)(T_2 s + 1), \text{ где } T_{1,2} = \frac{b_1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4b_0}{b_1^2}}\right);$$

при $b_1 = 2\sqrt{b_0}$

$$b_0 s^2 + b_1 s + 1 = (Ts + 1)^2, \text{ где } T = \frac{b_1}{2} = \sqrt{b_0};$$

при $b_1 < 2\sqrt{b_0}$

$$b_0 s^2 + b_1 s + 1 = T^2 s^2 + 2\xi T s + 1, \text{ где } T = \sqrt{b_0} \text{ и } \xi = \frac{b_1}{2\sqrt{b_0}}.$$

Изложенный процесс определения коэффициентов b_0 и b_1 сходится лишь при условии, что два старших по модулю корня полинома (П2.1) действительные или комплексные сопряженные.

Если это условие не выполняется и процесс определения коэффициентов b_0 и b_1 расходится, то из полинома (П2.1) следует выделить двучлен

$$cs + 1. \qquad (\text{П2.4})$$

В качестве первого приближения нужно принять

$$c_1 = \frac{a_0}{a_1}$$

и затем действовать так же, как и при выделении трехчлена (П2.2).

На основании изложенного можно составить итерационные формулы для определения коэффициентов b_0 и b_1 трехчлена (П2.2) или коэффициента c двучлена (П2.4). Эти формулы заметно упрощают расчет, так как исключают необходимость в операциях деления (П2.3).

Ниже приведены формулы для разложения полиномов третьей, четвертой, пятой и шестой степеней. Даны два варианта формул: первый для случая, когда два старших по модулю корня действительные или комплексные сопряженные; второй — для случая, когда это условие не выполняется. Распределение корней, как правило, заранее неизвестно и поэтому расчет можно начинать по любому из двух вариантов формул. Если же процесс определения коэффициентов расходится, то использовать другой вариант формул. Расчет удобнее сводить в таблицу.

Полином третьей степени

$$G(s) = a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + 1.$$

1-й вариант

Итерационные формулы:

$$\left.\begin{aligned} &b_{01} = \frac{a_0}{a_2}; \quad b_{11} = \frac{a_1}{a_2};\\ &r_i = a_2 - b_{1,\,i-1}; \quad p_i = a_1 - b_{0.\,i-1}; \quad b_{0i} = \frac{a_0}{r_i};\\ &b_{1i} = \frac{p_i}{r_i}, \quad i = 2, 3, \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (\text{П2.5})$$

Разложение полинома:

$$G(s) = (b_0 s^2 + b_1 s + 1)(rs + 1). \qquad (\text{П2.6})$$

2-й вариант

Итерационные формулы:

$$\left.\begin{aligned} &c_1 = \frac{a_0}{a_1};\\ &q_{1i} = a_2 - c_{i-1}; \quad q_{0i} = a_1 - q_{1i} c_{i-1}; \quad c_i = \frac{a_0}{q_{0i}},\\ &i = 2, 3, \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (\text{П2.7})$$

Разложение полинома

$$G(s) = (cs + 1)(q_0 s^2 + q_1 s + 1). \qquad (П2.8)$$

Пример П2.1. Разложить на элементарные множители полином

$$G_1(s) = 5s^3 + 6s^2 + 6s + 1.$$

Попытаемся воспользоваться 1-м вариантом формул, т. е. формулами (П2.5), а расчет сведем в таблицу:

№ приближения	r_i	p_i	b_{0i}	b_{1i}
1	—	—	0,833	1,000
2	5,000	5,167	1,000	1,033
3	4,967	5,000	1,007	1,007
4	4,993	4,993	1,001	1,000

Можно принять, что $b_0 = b_1 = 1$ и $r = 6 - 1 = 5$. Тогда по формуле (П2.6)

$$G_1(s) = \left(s^2 + s + 1\right)(5s + 1) = \left(T_1^2 s^2 + 2\xi T_1 s + 1\right)(T_2 s + 1),$$

где $T_1 = 1$ с; $\xi = 0,5$; $T_2 = 5$ с.

Полином четвертой степени

$$G(s) = a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + 1.$$

1-й вариант

Итерационные формулы:

$$\left.\begin{array}{c} b_{01} = \dfrac{a_0}{a_2}; \quad b_{11} = \dfrac{a_1}{a_2}; \\ r_{1i} = a_3 - b_{1,\,i-1}; \quad r_{0i} = a_2 - b_{0,\,i-1} - r_{1i} b_{1i}; \\ p_i = a_1 - r_{1i} b_{0,\,i-1}; \\ b_{0i} = \dfrac{a_0}{r_{0i}}; \quad b_{1i} = \dfrac{p_i}{r_{0i}}, \quad i = 2, 3, \ldots \end{array}\right\} \qquad (П2.9)$$

Разложение полинома:

$$G(s) = (b_0 s^2 + b_1 s + 1)(r_0 s^2 + r_1 s + 1). \qquad (П2.10)$$

2-й вариант

Итерационные формулы

$$\left.\begin{array}{c} c_1 = \dfrac{a_0}{a_1}; \\ q_{2i} = a_3 - c_{i-1}; \quad q_{1i} = a_2 - q_{2i} c_{i-1}; \quad q_{0i} = a_1 - q_{1i} c_{i-1}; \\ c_i = \dfrac{a_0}{q_{0i}}, \quad i = 2, 3, \ldots \end{array}\right\} \qquad (П2.11)$$

Разложение полинома:

$$G(s) = (cs + 1)(q_0 s^3 + q_1 s^2 + q_2 s + 1). \qquad (П2.12)$$

Пример П2.2. Разложить на элементарные множители полином

$$G_2(s) = 0{,}5s^4 + 5{,}6s^3 + 6{,}6s^2 + 6{,}1s + 1.$$

Предположим, что справедлив 1-й вариант соотношения корней полинома, т. е. будем пользоваться формулами (П2.9). Расчет сводим в таблицу:

№ приближения	r_{1i}	r_{0i}	p_i	b_{0i}	b_{1i}
1	—	—	—	0,076	0,848
2	5,252	2,070	5,202	0,242	2,513
3	3,587	—2,656	4,732	—0,188	—1,784

Процесс определения коэффициентов b_0 и b_1 не сходится. Следовательно, нужно воспользоваться формулами (П2.11):

№ приближения	q_{2i}	q_{1i}	q_{0i}	c_i
1	—	—	—	0,0893
2	6,0107	6,063	5,059	0,0988
3	6,0012	6,007	5,007	0,0999

Можно принять $c = 0{,}1$ и, следовательно, $q_2 = q_1 = 6$; $q_0 = 5$. Тогда по формуле (П2.12):

$$G_2(s) = (0{,}1s + 1)(5s^3 + 6s^2 + 6s + 1).$$

Входящий в выражение $G_2(s)$ полином третьей степени рассматривался в примере П2.1. Поэтому окончательно

$$G_2(s) = \left(T_1^2 s^2 + 2\xi T_1 s + 1\right)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1),$$

где $T_1 = 1$ с; $\xi = 0{,}5$; $T_2 = 5$ и $T_3 = 0{,}1$ с.

Полином пятой степени

$$G(s) = a_0 s^5 + a_1 s^4 + a_2 s^3 + a_3 s^2 + a_4 s + 1.$$

1-й вариант

Итерационные формулы:

$$\left.\begin{aligned} & b_{01} = \frac{a_0}{a_2}; \quad b_{11} = \frac{a_1}{a_2}; \\ & r_{2i} = a_4 - b_{1,\,i-1}; \quad r_{1i} = a_3 - b_{0,\,i-1} - r_{2i} b_{1,\,i-1}; \quad r_{0i} = \\ & = a_2 - r_{2i} b_{0,\,i-1} - r_{1i} b_{1,\,i-1}; \quad p_i = a_1 - r_{1i} b_{0,\,i-1}; \\ & b_{0i} = \frac{a_0}{r_{0i}}; \quad b_{1i} = \frac{p_i}{r_{0i}}, \quad i = 2, 3, \ldots . \end{aligned}\right\} \quad (\text{П}2.13)$$

Разложение полинома:

$$G(s) = (b_0 s^2 + b_1 s + 1)(r_0 s^3 + r_1 s^2 + r_2 s + 1). \qquad (\Pi 2.14)$$

2-й вариант

Итерационные формулы:

$$\left.\begin{aligned} & c_1 = \frac{a_0}{a_1}; \\ & q_{3i} = a_4 - c_{i-1}; \quad q_{2i} = a_3 - q_{3i} c_{i-1}; \quad q_{1i} = a_2 - q_{2i} c_{i-1}; \\ & q_{0i} = a_1 - q_{1i} c_{i-1}; \quad c_i = \frac{a_0}{q_{0i}}, \quad i = 2, 3, \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (\Pi 2.15)$$

Разложение полинома:

$$G(s) = (cs + 1)(q_0 s^4 + q_1 s^3 + q_2 s^2 + q_3 s + 1). \qquad (\Pi 2.16)$$

Пример П2.3. Разложим на элементарные множители полином

$$G_3(s) = 0{,}006 s^5 + 0{,}116 s^4 + 0{,}716 s^3 + 1{,}71 s^2 + 1{,}6 s + 1.$$

Предполагаем 1-й вариант распределения корней и пользуемся формулами (П2.13):

i	r_{2i}	r_{1i}	r_{0i}	p_i	b_{0i}	b_{1i}
1	—	—	—	—	0,00823	0,1620
2	1,4380	1,4687	0,4660	0,1037	0,01288	0,2225
3	1,3775	1,3906	0,3890	0,0981	0,01542	0,2522
4	1,3478	1,3547	0,3536	0,0951	0,01697	0,2689
5	1,3311	1,3350	0,3344	0,0933	0,01794	0,2790
6	1,3210	1,3235	0,3230	0,0923	0,01858	0,2858
7	1,3142	1,3158	0,3155	0,0916	0,01901	0,2903
8	1,3097	1,3108	0,3106	0,0911	0,01932	0,2933
9	1,3067	1,3074	0,3075	0,0907	0,01951	0,2950
10	1,3050	1,3055	0,3054	0,0905	0,01965	0,2963
11	1,3037	1,3041	0,3039	0,0904	0,01974	0,2975

Можно принять $r_2 = r_1 = 1{,}3$; $r_0 = 0{,}3$ и $p = 0{,}09$. Следовательно, $b_0 = 0{,}02$ и $b_1 = 0{,}3$. По формуле (П2.14)

$$G_3(s) = (0{,}02 s^2 + 0{,}3 s + 1)(0{,}3 s^3 + 1{,}3 s^2 + 1{,}3 s + 1).$$

Процесс отыскания значений b_0 и b_1, вообще говоря, можно было ускорить. Для этого следовало по трем-четырем приближениям построить кривые $b_0(i)$ и $b_1(i)$ и экстраполировать их. Были бы получены значения b_0 и b_1, приближающиеся к действительным, и потребовалось бы одно-два приближения для их уточнения.

Теперь разложим полином

$$G_{31}(s) = 0{,}3 s^3 + 1{,}3 s^2 + 1{,}3 s + 1,$$

воспользовавшись формулами (П2.5):

i	r_i	p_i	b_{0i}	b_{1i}
1	—	—	0,231	1,000
2	0,300	1,069	1,000	3,563
3	—2,263	0,300	—0,133	—0,133

Процесс расходится и поэтому нужно воспользоваться формулами (П2.7):

i	q_i	q_{0i}	c_i
1	—	—	0,231
2	1,069	1,053	0,285
3	1,015	1,011	0,297
4	1,003	1,002	0,300

Итак, $c = 0{,}3$; $q_1 = q_0 = 1$ и по формуле (П2.8)

$$G_{31}(s) = (0{,}3s + 1)(s^2 + s + 1).$$

Следовательно,

$$G_{31}(s) = (0{,}02s^2 + 0{,}3s + 1)(0{,}3s + 1)(s^2 + s + 1).$$

После исследования трехчленов, входящих в $G_{31}(s)$, получим

$$G_3(s) = (T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)\left(T_4^2 s^2 + 2\xi T_4 s + 1\right),$$

где $T_1 = 0{,}1$; $T_2 = 0{,}2$; $T_3 = 0{,}3$; $T_4 = 1{,}0$ с; $\xi = 0{,}5$.

Полином шестой степени

$$G(s) = a_0 s^6 + a_1 s^5 + a_2 s^4 + a_3 s^3 + a_4 s^2 + a_5 s + 1.$$

1-й вариант

Итерационные формулы:

$$\left.\begin{gathered} b_{01} = \frac{a_0}{a_2}; \quad b_{11} = \frac{a_1}{a_2}; \\ r_{3i} = a_5 - b_{1,\,i-1}; \quad r_{2i} = a_4 - b_{0,\,i-1} - r_{3i} b_{1,\,i-1}; \\ r_{1i} = a_3 - r_{3i} b_{0,\,i-1} - r_{2i} b_{1,\,i-1}; \\ r_{0i} = a_2 - r_{2i} b_{0,\,i-1} - r_{1i} b_{1,\,i-1}; \quad p_i = a_1 - r_{1i} b_{0,\,i-1}; \\ b_{0i} = \frac{a_0}{r_{0i}}; \quad b_{1i} = \frac{p_i}{r_{0i}}, \quad i = 2, 3, \ldots . \end{gathered}\right\} \quad (П2.17)$$

Разложение полинома:

$$G(s) = (b_0 s^2 + b_1 s + 1)(r_0 s^4 + r_1 s^3 + r_2 s^2 + r_3 s + 1). \quad (П2.18)$$

2-й вариант

Итерационные формулы:

$$\left.\begin{aligned} &c_1 = \frac{a_0}{a_1};\\ &q_{4i} = a_5 - c_{i-1}; \quad q_{3i} = a_4 - q_{4i}c_{i-1}; \quad q_{2i} = a_3 - q_{3i}c_{i-1};\\ &q_{1i} = a_2 - q_{2i}c_{i-1}; \quad q_{0i} = a_1 - q_{1i}c_{i-1}; \quad c_i = \frac{a_0}{q_{0i}},\\ &i = 2, 3, \ldots \end{aligned}\right\} \quad (\text{П}2.19)$$

Разложение полинома:

$$G(s) = (cs + 1)(q_0 s^5 + q_1 s^4 + q_2 s^3 + q_3 s^2 + q_4 s + 1). \quad (\text{П}2.20)$$

Применение итерационного метода О. М. Крыжановского

Полиномы, рассматриваемые при анализе САР, чаще всего не имеют корней с положительной вещественной частью, а кратность действительных корней не более двух. Эти особенности учтены итерационным методом, предложенным О. М. Крыжановским [61]. Ниже рассмотрено его применение для разложения на множители полиномов 3, 4, 5 и 6-й степеней.

Для каждого из полиномов приведены два варианта разложения на множители. Первый справедлив, когда младший по модулю корень действительный, а далее следуют комплексные сопряженные. Второй — когда два младших по модулю корня комплексные сопряженные или оба действительные.

Во всех случаях должны быть определены некоторые вспомогательные постоянные путем последовательного приближения к их истинным значениям. По приведенным формулам вычисляют сначала первое, а затем последующие приближения. Искомой постоянной является то приближение, которое с необходимой точностью равно предыдущему.

После определения вспомогательных постоянных полином по соответствующим формулам разлагают на множители. В полиномах 4, 5 и 6-й степеней один из сомножителей должен быть разложен на сомножители меньшей степени.

Чаще всего сведения о младших по модулю корнях рассматриваемого полинома отсутствуют и расчет следует вести по первому варианту. Если процесс вычисления вспомогательных постоянных расходится, то необходимо перейти ко второму варианту.

Полином третьей степени

$$G(s) = a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + 1.$$

1. Младший по модулю корень действительный.

Первое приближение вспомогательных постоянных

$$\alpha_1 = \frac{1}{a_2}; \quad \beta_1 = \alpha_1 (a_1 - a_0 \alpha_1); \quad (\text{П}2.21\text{а})$$

последующие приближения

$$\alpha_i = \frac{1}{a_2 - \beta_{i-1}}; \quad \beta_i = \alpha_i (a_1 - a_0\alpha_i), \quad i = 2,\ 3,\ \ldots \qquad (П2.21б)$$

Разложение полинома на множители:

$$G(s) = (Ts + 1)\, R(s), \qquad (П2.22)$$

где

$$T = \frac{1}{\alpha} = a_2 - \beta.$$

При $\beta < 2\sqrt{a_0\alpha}$

$$R(s) = T_1^2 s^2 + 2\xi T_1 s + 1, \text{ где } T_1 = \sqrt{a_0\alpha}; \quad \xi = \frac{\beta}{2\sqrt{a_0\alpha}};$$

при $\beta = 2\sqrt{a_0\alpha}$

$$R(s) = (T_1 s + 1)^2, \text{ где } T_1 = \sqrt{a_0\alpha} = \frac{\beta}{2};$$

при $\beta > 2\sqrt{a_0\alpha}$

$$R(s) = (T_1 s + 1)(T_2 s + 1), \text{ где } T_{1,2} = \frac{\beta}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4a_0\alpha}{\beta^2}}\right).$$

2. Два младших по модулю корня комплексные сопряженные. Первое приближение вспомогательной постоянной

$$\alpha_1 = \frac{a_2}{a_1} - \frac{a_0}{a_1^2}; \qquad (П2.23а)$$

последующие приближения

$$\alpha_i = \frac{a_2}{a_1 - a_0\alpha_{i-1}} - \frac{a_0}{(a_1 - a_0\alpha_{i-1})^2}, \quad i = 2, 3, \ldots \qquad (П2.23б)$$

Разложение полинома на множители:

$$G(s) = (Ts + 1)\left(T_1^2 s^2 + 2\xi T_1 s + 1\right), \qquad (П2.24)$$

где

$$T = \frac{a_0}{r}; \quad T_1 = \sqrt{r}; \quad \xi = \frac{\alpha\sqrt{r}}{2}; \quad r = a_1 - a_0\alpha.$$

Пример П2.4. Разложить на элементарные множители полином

$$G_4(s) = s^3 + 2s^2 + 2s + 1.$$

Предположим, что младший по модулю корень действительный и вспомогательные постоянные будем вычислять по формулам (П2.21).
Получим:

$\alpha_1 = 0{,}5$; $\beta_1 = 0{,}75$; $\alpha_2 = 0{,}80$; $\beta_2 = 0{,}96$; $\alpha_3 = 0{,}96$; $\beta_3 = 1{,}00$; $\alpha_4 = 1{,}00$.

Итак, $\alpha = \beta = 1{,}00$ и $\beta < 2\sqrt{a_0\alpha} = 2$. Тогда по формуле (П2.22)

$$G_4(s) = (Ts + 1)(T_1^2 s^2 + 2\xi T_1 s + 1),$$

где $T = 1$; $T_1 = 1$ с; $\xi = 0{,}5$.

Процесс вычисления α и β может оказаться длительным, чтобы его сократить, нужно после вычисления l приближений построить график $\alpha_i(i)$, $i = 1, 2, \ldots, l$. Затем по графику определить приблизительно предел α_0, к которому стремится α_i, и вычислить $\beta_l = \alpha_0(a_1 - a_0\alpha_0)$. Последующие приближения уточнят сделанное предположение о предельном значении α.

Полином четвертой степени

$$G(s) = a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + 1.$$

1. Младший по модулю корень действительный.
Первое приближение вспомогательных постоянных

$$\left.\alpha_1 = \frac{1}{a_3};\quad \beta_1 = \alpha_1(a_1 - a_0\alpha_1);\quad \gamma_1 = \alpha_1(a_2 - \beta_1);\right\} \qquad (\text{П2.25а})$$

последующие приближения

$$\left.\begin{gathered}\alpha_i = \frac{1}{a_3 - \gamma_{i-1}};\quad \beta_i = \alpha_i(a_1 - a_0\alpha_i);\quad \gamma_i = \alpha_i(a_2 - \beta_i),\\ i = 2, 3, \ldots .\end{gathered}\right\} \qquad (\text{П2.25б})$$

Разложение полинома на множители:

$$G(s) = (Ts + 1)(a_0\alpha s^3 + \beta s^2 + \gamma s + 1), \qquad (\text{П2.26})$$

где

$$T = \frac{1}{\alpha} = a_3 - \gamma.$$

2. Два младших по модулю корня комплексные сопряженные или действительные.
Первое приближение вспомогательных постоянных

$$\left.\alpha_1 = \frac{a_3}{a_2} - \frac{a_1}{a_2^2};\quad \beta_1 = \alpha_1(a_1 - a_0\alpha_1) + \frac{a_0}{a_2};\right\} \qquad (\text{П2.27а})$$

последующие приближения

$$\left.\begin{gathered}\alpha_i = \frac{a_3}{a_2 - \beta_{i-1}} - \frac{a_1 - a_0\alpha_{i-1}}{(a_2 - \beta_{i-1})^2};\quad \beta_i = \alpha_i(a_1 - a_0\alpha_i) + \\ + \frac{a_0}{a_2 - \beta_{i-1}};\quad i = 2, 3, \ldots .\end{gathered}\right\} \qquad (\text{П2.27б})$$

Разложение полинома на множители:

$$G(s) = R_1(s)\,R_2(s). \qquad (\Pi 2.28)$$

При $r_1 < 2\sqrt{a_0 r_2}$, где $r_1 = a_1 - a_0\alpha$ и $r_2 = a_2 - \beta$,

$$R_1(s) = T_1^2 s^2 + 2\xi_1 T_1 s + 1, \text{ где } T_1 = \sqrt{\frac{a_0}{r_2}}; \quad \xi_1 = \frac{r_1}{2\sqrt{a_0 r_2}};$$

при $r_1 = 2\sqrt{a_0 r_2}$

$$R_1(s) = (T_1 s + 1)^2, \text{ где } T_1 = \sqrt{\frac{a_0}{r_2}};$$

при $r_1 > 2\sqrt{a_0 r_2}$

$$R_1(s) = (T_1 s + 1)(T_3 s + 1), \text{ где } T_{1,3} = \frac{r_1}{2r_2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4a_0 r_2}{r_1^2}}\right);$$

при $\alpha\sqrt{r_2} < 2$

$$R_2(s) = T_2^2 s^2 + 2\xi_2 T_2 s + 1, \text{ где } T_2 = \sqrt{r_2}; \quad \xi_2 = \frac{\alpha\sqrt{r_2}}{2};$$

при $\alpha\sqrt{r_2} = 2$

$$R_2(s) = (T_2 s + 1)^2, \text{ где } T_2 = \sqrt{r_2} = \frac{2}{\alpha};$$

при $\alpha\sqrt{r_2} > 2$

$$R_2(s) = (T_2 s + 1)(T_4 s + 1), \text{ где } T_{2,4} = \frac{\alpha r_2}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{\alpha^2 r_2}}\right).$$

Полином пятой степени

$$G(s) = a_0 s^5 + a_1 s^4 + a_2 s^3 + a_3 s^2 + a_4 s + 1.$$

1. Младший по модулю корень действительный: первое приближение вспомогательных постоянных

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 = \frac{1}{a_4}; \quad \beta_1 = \alpha_1(a_1 - a_0\alpha_1); \quad \gamma_1 = \alpha_1(a_2 - \beta_1); \\ \mu_1 = \alpha_1(a_3 - \gamma_1); \end{aligned}\right\} \qquad (\Pi 2.29а)$$

последующие приближения

$$\left.\begin{aligned} \alpha_i = \frac{1}{a_4 - \mu_{i-1}}; \quad \beta_i = \alpha_i(a_1 - a_0\alpha_i); \quad \gamma_i = \alpha_i(a_2 - \beta_i); \\ \mu_i = \alpha_i(a_3 - \gamma_i), \quad i = 2, 3, \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (\Pi 2.29б)$$

Разложение полинома на множители:

$$G(s) = (Ts + 1)(a_0\alpha s^4 + \beta s^3 + \gamma s^2 + \mu s + 1), \qquad (\Pi 2.30)$$

где

$$T = \frac{1}{\alpha} = a_4 - \mu.$$

2. Два младших по модулю корня комплексные сопряженные или действительные:

первое приближение вспомогательных постоянных

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 = \frac{a_4}{a_3} - \frac{a_2}{a_3^2}\ ; \quad \beta_1 = \alpha_1 (a_1 - a_0\alpha_1) + \frac{a_0}{a_3}\ ; \\ \gamma_1 = \alpha_1 (a_2 - \beta_1) + \frac{a_1 - a_0\alpha_1}{a_3}\ ; \end{aligned}\right\} \quad (\text{П2.31а})$$

последующие приближения

$$\left.\begin{aligned} \alpha_i = \frac{a_4}{a_3 - \gamma_{i-1}} - \frac{a_2 - \beta_{i-1}}{(a_3 - \gamma_{i-1})^2}\ ; \quad \beta_i = \alpha_i (a_1 - a_0\alpha_i) + \frac{a_0}{a_3 - \gamma_{i-1}}\ ; \\ \gamma_i = a_i (a_2 - \beta_i) + \frac{a_1 - a_0\alpha_i}{a_3 - \gamma_{i-1}}, \quad i = 2,\ 3,\ \ldots . \end{aligned}\right\}$$

(П2.31б)

Разложение полинома на множители:

$$G(s) = \left(\frac{a_0}{r_3} s^3 + \frac{r_1}{r_3} s^2 + \frac{r_2}{r_3} s + 1\right) R(s), \quad (\text{П2.32})$$

где $r_1 = a_1 - a_0\alpha$; $r_2 = a_2 - \beta$; $r_3 = a_3 - \gamma$.

При $\alpha \sqrt{r_3} < 2$

$$R(s) = T_1^2 s^2 + 2\xi T_1 s + 1, \text{ где } T_1 = \sqrt{r_3}; \quad \xi = \frac{\alpha \sqrt{r_3}}{2};$$

при $\alpha \sqrt{r_3} = 2$

$$R(s) = (T_1 s + 1)^2, \quad \text{где } T_1 = \sqrt{r_3} = \frac{2}{\alpha};$$

при $\alpha \sqrt{r_3} > 2$

$$R(s) = (T_1 s + 1)(T_2 s + 1), \text{ где } T_{1,2} \frac{\alpha r_3}{2} = \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{\alpha^2 r_3}}\right).$$

Полином шестой степени

$$G(s) = a_0 s^6 + a_1 s^5 + a_2 s^4 + a_3 s^3 + a_4 s^2 + a_5 s + 1.$$

1. Младший по модулю корень действительный: первое приближение вспомогательных постоянных

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 = \frac{1}{a_5}; \quad \beta_1 = \alpha_1 (a_1 - a_0\alpha_1); \quad \gamma_1 = \alpha_1 (a_2 - \beta_1); \\ &\mu_1 = \alpha_1 (a_3 - \gamma_1); \quad \eta_1 = \alpha_1 (a_4 - \mu_1); \end{aligned}\right\} \quad (\text{П}2.33\text{а})$$

последующие приближения

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_i = \frac{1}{a_5 - \eta_{i-1}}; \quad \beta_i = \alpha_i (a_1 - a_0\alpha_i); \quad \gamma_i = \alpha_i (a_2 - \beta_i); \\ &\mu_i = \alpha_i (\alpha_3 - \gamma_i); \quad \eta_i = \alpha_i (a_4 - \mu_i); \quad i = 2,\ 3,\ \ldots \end{aligned}\right\} \quad (\text{П}2.33\text{б})$$

Разложение полинома на множители:

$$G(s) = (Ts + 1)(a_0\alpha s^5 + \beta s^4 + \gamma s^3 + \mu s^2 + \eta s + 1), \quad (\text{П}2.34)$$

где

$$T = \frac{1}{\alpha} = a_5 - \eta.$$

2. Два младших по модулю корня комплексные сопряженные или действительные:

первое приближение вспомогательных постоянных

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 = \frac{a_5}{a_4} - \frac{a_3}{a_4^2}; \quad \beta_1 = \alpha_1 (a_1 - a_0\alpha_1) + \frac{a_0}{a_4}; \\ &\gamma_1 = \alpha_1 (a_2 - \beta_1) + \frac{a_1 - a_0\alpha_1}{a_4}; \quad \mu_1 = \alpha_1 (a_3 - \gamma_1) + \frac{a_2 - \beta_1}{a_4}; \end{aligned}\right\} \quad (\text{П}2.35\text{а})$$

последующие приближения

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_i = \frac{a_5}{a_4 - \mu_{i-1}} - \frac{a_3 - \gamma_{i-1}}{(a_4 - \mu_{i-1})^2}; \quad \beta_i = \alpha_i (a_1 - a_0\alpha_i) + \frac{a_0}{a_4 - \mu_{i-1}}; \\ &\gamma_i = \alpha_i (a_2 - \beta_i) + \frac{a_1 - a_0\alpha_i}{a_4 - \mu_{i-1}}; \quad \mu_i = \alpha_i (a_3 - \gamma_i) + \frac{a_2 - \beta_i}{a_4 - \mu_{i-1}}. \end{aligned}\right\} \quad (\text{П}2.35\text{б})$$

Разложение полинома на множители:

$$G(s) = \left(\frac{a_0}{r_4} s^4 + \frac{r_1}{r_4} s^3 + \frac{r_2}{r_4} s^2 + \frac{r_3}{r_4} s + 1\right) R(s), \quad (\text{П}2.36)$$

где

$$r_1 = a_1 - a_0\alpha;\ r_2 = a_2 - \beta;\ r_3 = a_3 - \gamma;$$

$$r_4 = a_4 - \mu.$$

При $\alpha\sqrt{r_4}<2$

$$R(s)=T_1^2s^2+2\xi T_1s+1, \text{ где } T_1=\sqrt{r_4}; \quad \xi=\frac{\alpha\sqrt{r_4}}{2};$$

при $\alpha\sqrt{r_4}=2$

$$R(s)=(T_1s+1)^2, \text{ где } T_1=\sqrt{r_4}=\frac{2}{\alpha};$$

при $\alpha\sqrt{r_4}>2$

$$R(s)=(T_1s+1)(T_2s+1), \text{ где } T_{1,2}=\frac{\alpha r_4}{2}\left(1\pm\sqrt{1-\frac{4}{\alpha^2 r_4}}\right).$$

Пример П2.5. Разложить на множители полином

$$G_5(s)=8s^6+24s^5+36s^4+33s^3+18s^2+6s+1.$$

Предположим, что младший по модулю корень действительный, воспользуемся формулами (П2.33). Расчет сведем в таблицу:

№ приближения	α_i	β_i	γ_i	μ_i	η_i
1	0,167	3,78	55,47	—37,52	92,71
2	—0,012	—0,29	—0,43	—0,40	—0,22

Процесс вычисления вспомогательных постоянных явно не сходится. Следовательно, два младших по модулю корня действительные или комплексные сопряженные и нужно применять формулы (П2.35). Выполняем расчет:

i	α_i	β_i	γ_i	μ_i
1	0,23	5,54	8,24	7,38
2	0,35	8,17	11,74	10,06
3	0,42	9,68	13,65	11,45
4	0,47	10,73	14,97	12,34
5	0,50	11,41	15,83	12,88
6	0,51	11,72	16,27	13,29
7	0,52	12,02	16,68	13,58
8	0,52	12,13	16,83	13,80
9	0,51	12,06	16,95	13,88
10	0,51	12,10	17,02	13,95
11	0,50	11,98	16,95	13,99

Принимаем $\alpha=0,5$; $\beta=12$; $\gamma=17$; $\mu=14$, тогда $r_1=20$; $r_2=24$; $r_3=16$; $r_4=4$ и рассматриваемый полином разлагается на множители следующим образом:

$$G_5(s)=(2s^4+5s^3+6s^2+4s+1)(T_1^2s^2+2\xi_1T_1s+1),$$

где $T_1=2$ с и $\xi_1=0,5$.

Теперь будем разлагать на множители полином четвертой степени $G_{51}(s)$, входящий в $G_5(s)$. Предположим, что младший по модулю корень действительный, воспользуемся формулами (П2.25):

i	α_i	β_i	γ_i
1	0,25	1,13	2,44
2	0,64	2,38	2,32
3	0,60	2,28	2,23
4	0,57	2,20	2,17
5	0,55	2,15	2,12
6	0,53	2,09	2,07
7	0,518	2,053	2,045
8	0,512	2,032	2,028
9	0,506	2,018	2,017
10	0,504	2,012	2,007

Полагаем $\alpha = 0{,}5$ и $\beta = \gamma = 2$, тогда

$$G_{51}(s) = (T_2 s + 1)(s^3 + 2s^2 + 2s + 1), \quad \text{где } T_2 = 2c.$$

Второй сомножитель в полученном выражении рассматривался в примере П2.4. Поэтому окончательно

$$G_5(s) = (T_1^2 s^2 + 2\xi_1 T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)(T_4^2 s^2 + 2\xi_4 T_4 s + 1),$$

где $T_1 = 2$ с; $\xi_1 = 0{,}5$; $T_2 = 2$; $T_3 = 1$; $T_4 = 1$ с и $\xi_4 = 0{,}5$.

Приложение 3

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯХ [66]

Определитель n-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hline a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (П3.1)$$

содержит n строк и n столбцов, каждый из которых имеет n элементов. Всего элементов n^2. Первая цифра в индексе элемента указывает номер строки и вторая — номер столбца.

Основными свойствами определителей являются следующие.

1. Определитель не меняется при транспонировании, т. е. при таком преобразовании, когда его строки становятся столбцами с тем же самым номером:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hline a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \hline a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (П3.2)$$

Отсюда следует, что строки и столбцы равноправны. Свойства сформулированные для строк, справедливы и для столбцов.

2. Определитель равен нулю, если он имеет: а) строку, состоящую из нулей; б) две одинаковые строки; в) две пропорциональные строки; г) строку, являющуюся линейной комбинацией других строк.

3. При перестановке двух строк определитель меняет знак.

4. Общий множитель всех элементов одной строки можно вынести за знак определителя.

5. Определитель не меняется, если к элементам одной строки прибавить соответствующие элементы другой, умноженные на одно и то же число (положительное или отрицательное).

Для вычисления определителя n-го порядка используют его разложение по i-й строке:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, \qquad (П3.3)$$

т. е. определитель Δ равен сумме произведений всех элементов произвольной его строки на их алгебраические дополнения.

Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} есть

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}, \qquad (\text{П}3.4)$$

где M_{ij} — минор элемента a_{ij}, т. е. определитель $(n-1)$-го порядка, который получается из определителя Δ вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

В результате разложения (П3.3) вычисление определителя n-го порядка заменяется вычислением определителей $(n-1)$-го порядка. Последние, в свою очередь, могут быть разложены по формуле (П3.3) и их вычисление сведется к вычислению определителей $(n-2)$-го порядка. Повторяя эту процедуру, вычисление определителя n-го порядка можно свести к вычислению определителей 2-го порядка, которое выполняют по следующему правилу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (\text{П}3.5)$$

Перед разложением определителя по i-й строке удобно, пользуясь свойством 5, сделать нулями часть элементов этой строки и даже все, кроме одного. Тогда число слагаемых в разложении (П3.3) соответственно уменьшится.

Пример П3.1. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 7 & 6 & 6 \\ 2 & 6 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 7 & 4 \\ 1 & 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Сначала умножим элементы четвертого столбца на —0,5 и прибавим их к соответствующим элементам первого столбца:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 4 \\ 3 & 8 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Теперь разложим определитель по элементам первого столбца:

$$\Delta = 1\begin{vmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 7 & 6 & 6 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Каждый из определителей третьего порядка разложим по элементам первого столбца:

$$\Delta = 6\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} + 3\left\{7\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\right\}.$$

Вычислив определители второго порядка, получим

$$\Delta = 6\,(7\cdot2 - 4\cdot4) - 8\,(3\cdot2 - 4\cdot4) + 5\,(3\cdot4 - 4\cdot7) + 3\,[7\,(3\cdot2 - 4\cdot4) - \\ - 6\,(6\cdot2 - 6\cdot4) + 5\,(6\cdot4 - 6\cdot3)] = 108.$$

Приложение 4

СИНТЕЗ ПАССИВНЫХ ДВУХПОЛЮСНИКОВ И ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

При синтезе корректирующих устройств САР возникает задача реализации их передаточных функций пассивными или активными четырехполюсниками постоянного тока. Последние содержат пассивные двухполюсники. Пассивные двухполюсники и четырехполюсники постоянного тока — это электрические цепи из резисторов, конденсаторов и индуктивностей. В большинстве случаев индуктивности не используют, так как частота сигналов САР низкая и возникает необходимость в больших индуктивностях.

Рассмотрим методы определения электрических схем и параметров двухполюсников и четырехполюсников, состоящих из активных резисторов и конденсаторов, по передаточным функциям, которые они должны иметь [63, 85, 123]. Любая передаточная функция может быть реализована пассивным двухполюсником или четырехполюсником из резисторов и конденсаторов с точностью до постоянного множителя. Причем в каждом случае число вариантов схемы практически неограничено. Имеет смысл рассматривать и сравнивать лишь схемы с минимальным числом элементов.

Разложение передаточной функции активного четырехполюсника

Для синтеза двухполюсников активного четырехполюсника (см. рис. 8.21) передаточную функцию $W_а$, которую он должен иметь, нужно представить в соответствии с формулой (8.57) в виде отношения

$$W_а = \frac{Z_о}{Z_п} = \frac{Y_п}{Y_о},$$

где $Z_п = Z_п(s)$ и $Y_п = Y_п(s)$ — операторные выражения полного сопротивления и полной проводимости двухполюсника прямой цепи; $Z_о = Z_о(s)$ и $Y_о = Y_о(s)$ — операторные выражения полного сопротивления и полной проводимости двухполюсника обратной связи.

Полное сопротивление $Z = Z(s)$ может быть реализовано в виде RC-двухполюсника, только если оно удовлетворяет следующим условиям:

а) функция $Z(s)$ представляет собой рациональную дробь, у которой степень числителя равна или на единицу меньше степени знаменателя;

б) полюсы (корни полинома знаменателя) и нули (корни полинома числителя) функции $Z(s)$ — простые, действительные отрицательные и перемежаются между собой, т. е. между двумя соседними полюсами находиться нуль и наоборот;

в) наименьшим по абсолютной величине является полюс и он может равняться нулю;

г) наибольшим по абсолютной величине является нуль. Он конечен, если степень числителя функции $Z(s)$ равна степени знаменателя, и бесконечен, если степень числителя меньше степени знаменателя.

Полная проводимость обратна полному сопротивлению $Y(s) = \frac{1}{Z(s)}$ и это соотношение определяет условия, которым должна удовлетворять полная проводимость, реализуемая RC-двухполюсником.

В ряде случаев реализуемые значения $Z_о$ и $Z_п$ удается составить только по формулам

$$Z_о = \frac{M}{Q} \text{ и } Z_п = \frac{N}{Q}, \qquad (П4.1)$$

где $M = M(s)$ и $N = N(s)$ — полиномы соответственно числителя и знаменателя функции $W_а$;

полином $Q = Q(s)$ выбирают так, чтобы $Z_о$ и $Z_п$ удовлетворяли условиям реализуемости. Он может содержать, в частности, двучлены из полиномов M и N.

Синтез двухполюсника

Схему и параметры двухполюсника RC, имеющего заданные Z или Y, можно найти различными способами. К RC-схемам с наименьшим числом элементов приводят следующие способы.

Разложение Z на простые дроби (1-й способ). Полное сопротивление Z, удовлетворяющее перечисленным условиям, можно разложить на простые дроби:

$$Z = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s + \lambda_1} + \frac{A_2}{s + \lambda_2} + \cdots + A. \qquad (П4.2)$$

Здесь

$$A_i = [Z(s)(s + \lambda_i)]_{s=-\lambda_i}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (П4.3)$$

где $\lambda_0 = 0$,
и

$$A = Z(\infty). \qquad (П4.4)$$

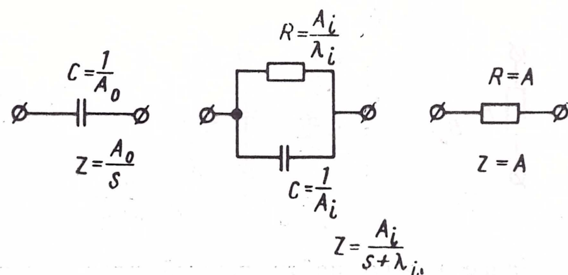


Рис. П4.1. *RC*-схемы, реализующие простейшие полные сопротивления

Каждый член разложения (П4.2) можно реализовать простым *RC*-двухполюсником из числа представленных на рис. П4.1. Последовательное соединение таких двухполюсников образует *RC*-двухполюсник, реализующий заданное полное сопротивление Z.

Разложение Y на простые дроби (2-й способ). Если полная проводимость Y удовлетворяет условиям реализуемости, то она может быть представлена следующим образом:

$$Y = B_0 + \frac{B_1 s}{s+\rho_1} + \frac{B_2 s}{s+\rho_2} + \cdots Bs. \qquad \text{(П4.5)}$$

Здесь

$$B_j = [Y^*(s)(s+\rho_j)]_{s=-\rho_j}, \quad j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \qquad \text{(П4.6)}$$

где

$$Y^*(s) = \frac{Y(s)}{s} \text{ и } \rho_0 = 0;$$

$$B = Y^*(\infty). \qquad \text{(П4.7)}$$

Члены правой части равенства (П4.5) можно рассматривать как полные проводимости простых *RC*-схем из числа приведенных на рис. П4.2. Параллельное соединение таких простых *RC*-схем образует двухполюсник, который реализует заданное значение Y.

Разложение Z в непрерывную дробь (3-й способ). Члены полиномов числителя и знаменателя функции $Z(s)$ нужно расположить по убывающим степеням s и затем разлагать ее в непрерывную дробь.

Пусть степени числителя и знаменателя одинаковы и равны m. Тогда нужно определить первый член частного и результат записать так:

$$Z(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = R_1 + \frac{1}{\dfrac{A(s)}{B_1(s)}}.$$

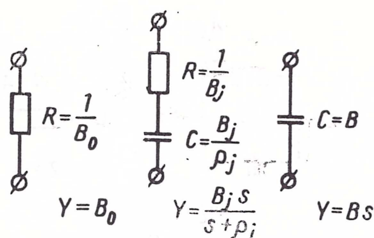


Рис. П4.2. RC-схемы, реализующие простейшие полные проводимости

Далее нужно найти первый член частного $\frac{A(s)}{B_1(s)}$, который будет содержать s, так как степень $A(s)$ на единицу выше степени $B_1(s)$, т. е.

$$Z(s) = R_1 + \cfrac{1}{C_1 s + \cfrac{B_1(s)}{A_1(s)}}.$$

Продолжение этого процесса приводит к искомому разложению:

$$Z(s) = R_1 + \cfrac{1}{C_1 s + \cfrac{1}{R_2 + \cfrac{1}{C_2 s + \cdots \cfrac{1}{C_m s + \cfrac{1}{R_{m+1}}}}}} \qquad (\text{П}4.8)$$

Если полное сопротивление Z удовлетворяет ранее изложенным условиям, то величины R_1, C_1, R_2, C_2, ..., C_{m-1}, R_m положительные. Из разложения (П4.8) следует, что Z есть полное сопротивление RC-схемы, изображенной на рис. П4.3, *а*.

Пусть степень числителя Z на единицу меньше степени m знаменателя. Тогда Z нужно представить в виде

$$Z(s) = \cfrac{1}{\cfrac{A(s)}{B(s)}}.$$

и затем начинать разложение его в непрерывную дробь. В результате получим:

$$Z(s) = \cfrac{1}{C_1 s + \cfrac{1}{R_1 + \cfrac{1}{C_2 s + \cdots \cfrac{1}{C_m s + \cfrac{1}{R_m}}}}}. \qquad (\text{П}4.9)$$

По разложению (П4.9) Z есть полное сопротивление RC-схемы, представленной на рис. П4.3, *б*.

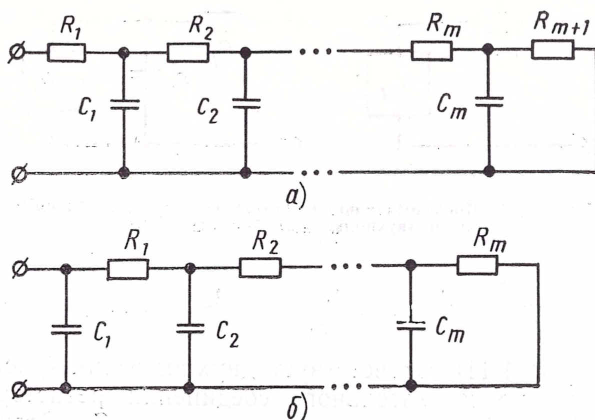


Рис. П4.3. Схема лестничного *RC*-двухполюсника, соответствующего: *а* — непрерывной дроби (П4.8); *б* — непрерывной дроби (П4.9)

Разложение Y в непрерывную дробь (4-й способ). Члены полиномов числителя и знаменателя функции $Y(s)$ должны быть расположены по возрастающим степеням s и затем она может быть разложена, как указано выше, в непрерывную дробь:

$$Y(s) = \frac{1}{R_1} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{C_1 s} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R_2} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{C_2 s} \cdots}}} \cdots \tag{П4.10}$$

Этой непрерывной дроби соответствует лестничный двухполюсник, изображенный на рис. П4.4, *а*, если числитель и знаменатель Y имеют степень m, и лестничный двухполюсник на рис. П4.4, *б*, если степень m числителя на единицу больше степени знаменателя.

Постепенное удаление составляющих функций $Z(s)$ и $Y(s)$ (5-й способ). По разложению (П4.2) на простые дроби для Z может быть составлено такое равенство:

$$Z = A + Z_a, \tag{П4.11}$$

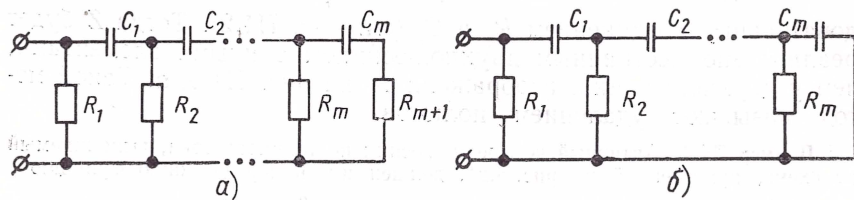


Рис. П4.4. Схемы лестничных *RC*-двухполюсников, соответствующих непрерывной дроби (П4.10)

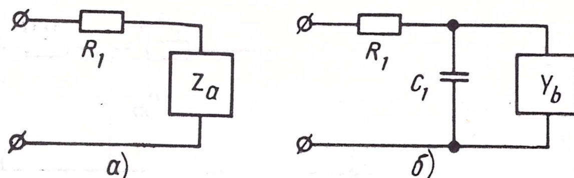


Рис. П4.5. Последовательные этапы составления лестничного двухполюсника 5-м способом

где

$$Z_a = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s+\lambda_1} + \frac{A_2}{s+\lambda_2} + \ldots.$$

Равенству (П4.11) соответствует двухполюсник (рис. П4.5, *а*), состоящий из последовательного соединения резистора сопротивлением $R_1 = A$ и полного сопротивления Z_a. Вторая часть двухполюсника имеет полную проводимость $Y_a = \frac{1}{Z_a}$. Ее можно разложить на простые дроби по формуле (П4.5) и составить равенство,

$$Y_a = Bs + Y_b, \qquad (П4.12)$$

где

$$Y_b = B_0 + \frac{B_1 s}{s+\rho_1} + \frac{B_2 s}{s+\rho_2} + \ldots.$$

По равенству (П4.12) полную проводимость Y_b можно заменить двумя параллельными ветвями (рис. П4.5, *б*) с проводимостями $Bs + Y_b$. Первая ветвь есть емкость $C_1 = B$, а вторая ветвь имеет полное сопротивление $Z_b = \frac{1}{Y_b}$. Его можно разложить на простые дроби по формуле (П4.2) и в результате определить сопротивления R_2 лестничного двухполюсника (см. рис. П4.3, *а*). Продолжение процесса приведет к синтезу всего лестничного двухполюсника.

После разложения Z_k на простые дроби можно выделить его составляющую $\frac{A_{ki}}{s+\lambda_{ki}}$ и реализовать ее параллельным соединением резистора сопротивлением R_i и конденсатора емкостью C_i (см. рис. П4.1). Аналогично при разложении на простые дроби Y_l можно выделить его составляющую $\frac{B_{lj}s}{s+\rho_{lj}}$ и реализовать ее последовательным соединением R_j и C_j (см. рис. П4.2). Тогда Z будет реализовано лестничным двухполюсником с иными элементами, чем у двухполюсника, изображенного на рис. П4.3, *а*. Такой метод называют удалением полюсов.

Пример П4.1. Активный четырехполюсник постоянного тока, выполняемый по схеме, приведенной на рис. 8.21, должен иметь передаточную функцию

$$W_{\text{а}} = -\frac{(0{,}1s+1)(0{,}02s+1)(0{,}01s+1)}{(0{,}05s+1)(0{,}04s+1)(0{,}005s+1)}.$$

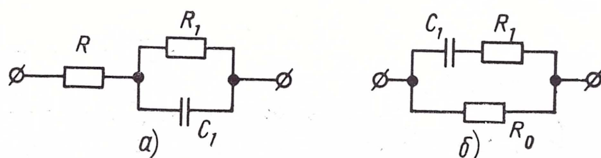


Рис. П4.6. Возможные схемы RC-двухполюсника обратной связи к примеру П4.1

Выяснить, как должны быть выполнены двухполюсники $Z_о$ и $Z_п$. Преобразуем выражение требуемой передаточной функции

$$W_а = -\frac{2(s+10)(s+50)(s+100)}{(s+20)(s+25)(s+200)}.$$

Ориентируясь на формулу (8.57), выберем передаточные функции двухполюсников так, чтобы они удовлетворяли условиям реализуемости:

$$Z_0 = \frac{2(s+100)}{s+25}; \quad Z_п = \frac{(s+20)(s+200)}{(s+10)(s+50)}.$$

Ищем схему и параметры двухполюсника обратной связи 1-м способом. По формулам (П4.2)—(П4.4):

$$A = Z_0(\infty) = 2; \quad A_1 = [2(s+100)]_{s=-25} = 150;$$

$$Z_о = \frac{150}{s+25} + 2.$$

В соответствии с полученным разложением $Z_о$ с помощью рис. П4.1 определим, что двухполюсник может быть выполнен по схеме, показанной на рис. П4.6, *а*, со следующими элементами:

$$R = 2 \text{ МОм}; \quad R_1 = \frac{150}{25} = 6 \text{ МОм}; \quad C_1 = \frac{1}{150} \approx 0{,}0667 \text{ мкФ}.$$

Полная проводимость двухполюсника обратной связи

$$Y_о = \frac{1}{Z_о} = \frac{0{,}5(s+25)}{s+100}.$$

Ищем схему и параметры двухполюсника 2-м способом. По формулам (П4.5) и (П4.6).

$$B_о = \left[\frac{0{,}5(s+25)}{s+100}\right]_{s=0} = 0{,}125;$$

$$B_1 = \left[\frac{0{,}5(s+25)}{s}\right]_{s=-100} = 0{,}375;$$

$$Y_о = 0{,}125 + \frac{0{,}375s}{s+100}.$$

В соответствии с полученными результатами с помощью рис. П4.2 определим второй вариант двухполюсника обратной связи. Его схема показана на рис. П4.6, *б*.

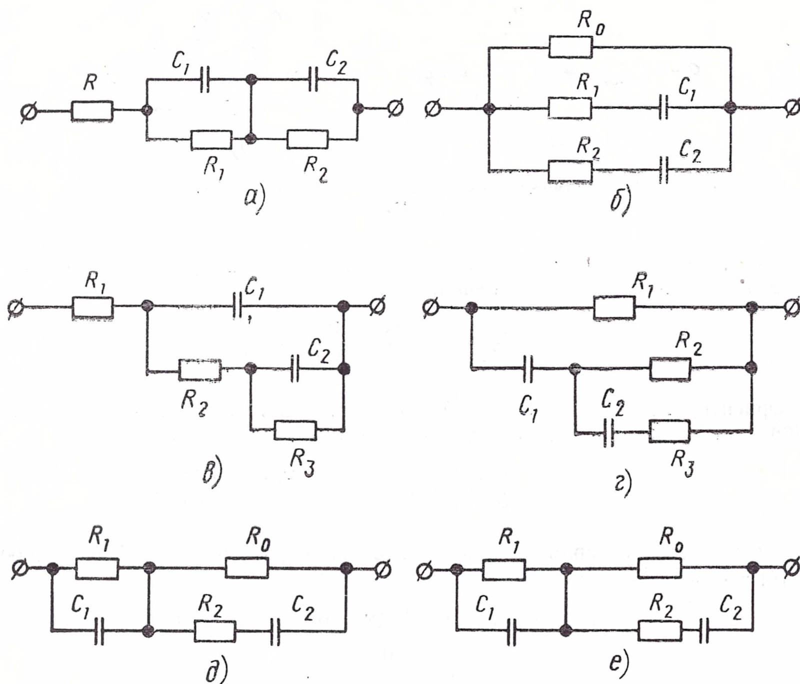


Рис. П4.7 Возможные схемы RC-двухполюсника прямой цепи к примеру П4.1

Здесь

$$R_0 = \frac{1}{0{,}125} = 8 \text{ МОм}; \quad R_1 = \frac{1}{0{,}375} = 2{,}67 \text{ МОм};$$

$$C_1 = \frac{0{,}375}{100} = 0{,}00375 \text{ мкФ}.$$

Итак, двухполюсник обратной связи можно выполнить по одной их схем, показанных на рис. П4.6.

Ищем схему и параметры двухполюсника прямой цепи. Сначала воспользуемся 1-м способом. По формулам (П4.2)—(П4.4) определим:

$$A = Z_п(\infty) = 1; \quad A_1 = \left[\frac{(s+20)(s+200)}{s+50}\right]_{s=-10} = 47{,}5;$$

$$A_2 = \left[\frac{(s+20)\ (s+200)}{s+10}\right]_{s=-50} = 112{,}5;$$

$$Z_п = \frac{47{,}5}{s+10} + \frac{112{,}5}{s+50} + 1.$$

По полученному разложению $Z_п$ с помощью рис. П4.1, составим схему двухполюсника (рис. П4.7, *а*) и определим значения ее элементов:

$$R_1 = \frac{47{,}5}{10} = 4{,}75 \text{ МОм}; \quad C_1 = \frac{1}{47{,}5} \approx 0{,}0211 \text{ мкФ};$$

$$R_2 = \frac{112{,}5}{50} = 2{,}25 \text{ МОм}; \quad C_2 = \frac{1}{112{,}5} \approx 0{,}0089 \text{ мкФ}; \ R = 1 \text{ МОм}.$$

Теперь воспользуемся 2-м способом.

Полная проводимость двухполюсника прямой цепи

$$Y_п = \frac{1}{Z_п} = \frac{(s+10)(s+50)}{(s+20)(s+200)}.$$

По формулам (П4.5) и (П4.6)

$$B_0 = \left[\frac{(s+10)(s+50)}{(s+20)(s+200)}\right]_{s=0} = 0{,}125;$$

$$B_1 = \left[\frac{s+10)(s+50)}{s(s+200)}\right]_{s=-20} = \frac{1}{12} \approx 0{,}083;$$

$$B_2 = \left[\frac{(s+10)(s+50)}{s(s+20)}\right]_{s=-200} = \frac{19}{24} \approx 0{,}792;$$

$$Y_п = 0{,}125 + \frac{0{,}083s}{s+20} + \frac{0{,}792}{s+200}.$$

По этому разложению $Y_п$ и рис. П4.2 составим схему двухполюсника (рис. П4.7, *б*) и определим значения ее элементов:

$$R_0 = \frac{1}{0{,}125} = 8 \text{ МОм}; \quad R_1 = \frac{1}{0{,}083} = 12 \text{ МОм}; \quad C_1 = \frac{0{,}083}{20} = 0{,}00415 \text{ мкФ};$$

$$R_2 = \frac{1}{0{,}792} = 1{,}26 \text{ МОм}; \quad C_2 = \frac{0{,}792}{200} = 0{,}00396 \text{ мкФ}.$$

Для получения третьего варианта схемы двухполюсника разложим $Z_п$ в непрерывную дробь:

$$Z_п = 1 + \cfrac{1}{0{,}00625s + \cfrac{1}{4{,}20 + \cfrac{1}{0{,}0272s + \cfrac{1}{2{,}80}}}}.$$

Сопоставляя эту непрерывную дробь с формулой (П4.8) и рис. П4.3, *а*, составим схему двухполюсника (рис. П4.7, *в*) по 3-му способу, где $R_1 = 1$, $R_2 = 4{,}2$, $R_3 = 2{,}8$ Мом, $C_1 = 0{,}00625$, $C_2 = 0{,}0272$ мкФ.

Еще одну схему двухполюсника можно получить 4-м способом, разложив $Y_п$ в непрерывную дробь:

$$Y_п = \frac{1}{8} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{0{,}00813s} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{3{,}93} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{0{,}00486s} + \cfrac{1}{1{,}61}}}}.$$

Сопоставляя эту непрерывную дробь с формулой (П4.10) и рис. П4.4, *а*, получим схему, показанную на рис. П4.7, *г*. Здесь $R_1 = 8$, $R_2 = 3{,}93$, $R_3 = 1{,}61$ Мом, $C_1 = 0{,}00813$, $C_2 = 0{,}00486$ мкФ.

Воспользуемся еще 5-м способом. Из разложения $Z_п$ на простые дроби, найденного ранее, в соответствии с формулой (П4.11) выделим одно слагаемое, но не A, как в этой формуле, а

$$Z_п = \frac{47{,}5}{s+10} + Z_a,$$

где

$$Z_a = \frac{112{,}5}{s+50} + 1.$$

Первое слагаемое полученного выражения есть полное сопротивление (см. рис. П4.1) параллельного соединения активного сопротивления $R_1 = \frac{47{,}5}{10} = 4{,}75$ МОм и емкости $C_1 = \frac{1}{47{,}5} \approx 0{,}0211$ мкФ. Последовательно с этим полным сопротивлением должен быть включен второй участок с полным сопротивлением Z_a. Определим полную проводимость второго участка:

$$Y_a = \frac{1}{Z_a} = \frac{s+50}{s+162{,}5}.$$

По 2-му способу ищем RC-схему с полной проводимостью Y_a:

$$B_0 = \left[\frac{s+50}{s+162{,}5}\right]_{s=0} = 0{,}308; \quad B_1 = \left[\frac{s+50}{s}\right]_{s=-162{,}5} =$$

$$= \frac{112{,}5}{162{,}5} \approx 0{,}692;$$

$$Y_a = 0{,}308 + \frac{0{,}692s}{s+162{,}5}.$$

Следовательно, второй участок двухполюсника состоит из двух параллельных ветвей. Первая ветвь (см. рис. П4.2) является сопротивлением $R_0 = \frac{1}{0{,}308} = 3{,}25$ МОм, а вторая последовательным соединением резистора сопротивлением $R_2 = \frac{1}{0{,}692} \approx 1{,}45$ МОм и конденсатора емкостью $C_2 = \frac{0{,}692}{162{,}5} \approx 0{,}00426$ мкФ.

Схема всего двухполюсника показана на рис. П4.7, *д*.

Из разложения $Z_п$ на простые дроби можно выделить сначала второе слагаемое. Тогда

$$Z_п = \frac{112{,}5}{s+50} + Z_a,$$

где

$$Z_a = \frac{47{,}5}{s+10} + 1.$$

Первое слагаемое полученного выражения есть полное сопротивление (см. рис. П4.1) параллельного соединения резистора сопротивлением $R_1 = \frac{112{,}5}{50} = 2{,}25$ МОм и конденсатора емкостью $C_1 = \frac{1}{112{,}5} \approx 0{,}0089$ мкФ. Полная проводимость второго участка

$$Y_a = \frac{1}{Z_a} = \frac{s+10}{s+57{,}5}.$$

Ищем RC-схему с Y_a по 2-му способу:

$$B_0 = \left[\frac{s+10}{s+57,5}\right]_{s=0} = 0,174; \quad B_1 = \left[\frac{s+10}{s}\right]_{s=-57,5} = 0,826;$$

$$Y_a = 0,174 + \frac{0,826s}{s+57,5}.$$

Второй участок двухполюсника состоит из двух параллельных ветвей. Первая (см. рис. П4.2) — сопротивление $R_0 = \frac{1}{0,174} \approx 5,75$ МОм, вторая — сопротивление $R_2 = \frac{1}{0,826} \approx 1,21$ МОм и емкость $C_2 = \frac{0,826}{57,5} \approx 0,0144$ мкФ.

Схема всего двухполюсника приведена на рис. П4.7, *е*.

Итак, составлено шесть схем, по которым может быть выполнен RC-двухполюсник прямой цепи рассматриваемого активного четырехполюсника постоянного тока. Из них может быть выбрана наиболее удобная схема для физической реализации.

Синтез ненагруженного четырехполюсника

Лестничным RC-четырехплюсником может быть реализована (с точностью до постоянного множителя) только передаточная функция

$$W = \frac{M}{N}, \qquad (П4.13)$$

где $M = M(s)$ и $N = N(s)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) степень числителя не выше степени знаменателя;

2) все полюсы простые, действительные, отрицательные и отличные от нуля;

3) все нули действительные и отрицательные, могут быть кратные и равные нулю.

При физическом осуществлении RC-четырехполюсника следует иметь в виду, что его передаточная функция остается неизменной (с точностью до постоянного множителя) при увеличении всех активных сопротивлений в α раз и одновременном уменьшении всех емкостей также в α раз.

Г-*образный четырехполюсник* (рис. П4.8) является простейшим лестничным четырехполюсником. Его передаточная функция при отсутствии нагрузки

$$W_г = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}, \qquad (П4.14)$$

где $Z_1 = Z_1(s)$ и $Z_2 = Z_2(s)$ — операторные выражения полных сопротивлений соответственно последовательной и параллельной ветвей.

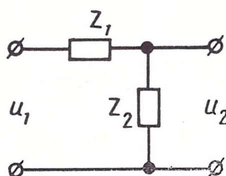


Рис. П4.8. Схема Г-образного четырехполюсника

Для того, чтобы Г-образный четырехполюсник имел передаточную функцию (П4.13), его полные сопротивления должны быть выполнены по равенствам

$$Z_1 = \frac{N - M}{Q} \text{ и } Z_2 = \frac{M}{Q}. \tag{П4.15}$$

Здесь полином Q выбран так, чтобы Z_1 и Z_2 удовлетворяли условиям реализуемости.

Если Г-образной схемой нельзя реализовать передаточную функцию (П4.13), то следует выяснить возможность реализации ее с измененным передаточным коэффициентом:

$$W = \mu \frac{M}{N}, \tag{П4.16}$$

где $\mu = \text{const}$.

В этом случае

$$Z_1 = \frac{N - \mu M}{Q} \text{ и } Z_2 = \frac{\mu M}{Q}. \tag{П4.17}$$

Изменение передаточного коэффициента четырехполюсника должно быть скомпенсировано усилителем.

Пример П4.2. Выбрать схему и параметры элементов Г-образного RC-четырехполюсника с тем, чтобы при отсутствии нагрузки его передаточная функция

$$W = \frac{(0{,}1s + 1)(0{,}0125s + 1)}{(0{,}02s + 1)(0{,}005s + 1)}.$$

В данном случае

$$M = 0{,}00125s^2 + 0{,}1125s + 1;$$

$$N = 0{,}0001s^2 + 0{,}025s + 1$$

и

$$N - M = -0{,}00115s^2 - 0{,}0875s.$$

Следовательно, заданную передаточную функцию можно реализовать только при уменьшенном передаточном коэффициенте.

Выберем $\mu = 0{,}08$, тогда по формулам (П4.17):

$$Z_1 = \frac{0{,}0001s^2 + 0{,}025s + 1 - 0{,}08(0{,}00125s^2 + 0{,}1125s + 1)}{Q} =$$

$$= \frac{0{,}016s + 0{,}92}{Q} = \frac{0{,}016(s + 57{,}5)}{Q};$$

$$Z_2 = \frac{0{,}08(0{,}00125s^2 + 0{,}1125s + 1)}{Q} = \frac{0{,}0001(s + 10)(s + 80)}{Q}.$$

Выберем $Q = 0{,}001s(s + 75)$, при этом

$$Z_1 = \frac{16(s + 57{,}5)}{s(s + 75)}, \quad Z_2 = \frac{0{,}1(s + 10)(s + 80)}{s(s + 75)},$$

и двухполюсники могут быть реализованы RC-схемами.

Определим схему и параметры элементов двухполюсника Z_1, пользуясь 1-м способом. По формулам (П4.2)—(П4.4):

$$A_0 = \left[\frac{16(s+57{,}5)}{s+75}\right]_{s=0} = \frac{184}{15} \approx 12{,}27;$$

$$A_1 = \left[\frac{16(s+57{,}5)}{s}\right]_{s=-75} = \frac{56}{15} \simeq 3{,}73;$$

$$A = 0;$$

$$Z_1 = \frac{12{,}27}{s} + \frac{3{,}73}{s+75}.$$

На основании этого разложения и рис. П4.1 составим схему двухполюсника Z_1 (рис. П4.9) и определим значения его элементов:

$$C_1 = \frac{1}{12{,}27} \approx 0{,}0815 \text{ мкФ}; \quad C_2 = \frac{1}{3{,}73} \approx 0{,}268 \text{ мкФ};$$

$$R_1 = \frac{3{,}73}{75} \approx 0{,}0498 \text{ МОм}.$$

Определим схему и параметры четырехполюсника Z_2, также пользуясь 1-м способом. По формулам (П4.2)—(П4.4).

$$A_0 = \left[\frac{(s+10)(s+80)}{10(s+75)}\right]_{s=0} = \frac{16}{15} \approx 1{,}067;$$

$$A_1 = \left[\frac{(s+10)(s+80)}{10s}\right]_{s=-75} = \frac{13}{30} \approx 0{,}433;$$

$$A = \left[\frac{(s+10)(s+80)}{10s(s+75)}\right]_{s=\infty} = 0{,}1;$$

$$Z_2 = \frac{1{,}067}{s} + \frac{0{,}433}{s+75} + 0{,}1.$$

В соответствии с полученным разложением и рис. П4.1 составим схему двухполюсника Z_2 (см. рис. П4.9) и определим значения его элементов:

$$C_3 = \frac{1}{1{,}067} \approx 0{,}938 \text{ мкФ}; \quad C_4 = \frac{1}{0{,}433} \approx 2{,}31 \text{ мкФ};$$

$$R_2 = \frac{0{,}433}{75} \approx 0{,}00578 \text{ МОм}; \quad R_3 = 0{,}1 \text{ МОм}.$$

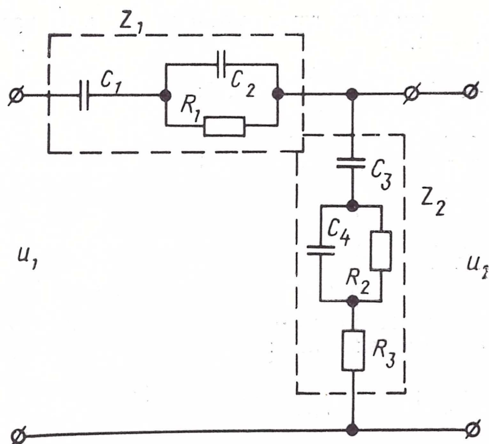
Для проверки определим передаточную функцию синтезированного четырехполюсника:

$$W = \frac{\dfrac{1}{0{,}938s} + \dfrac{1}{\dfrac{1}{0{,}00578} + 2{,}31s} + 0{,}1}{\dfrac{1}{0{,}0815s} + \dfrac{1}{\dfrac{1}{0{,}0498} + 0{,}268s} + \dfrac{1}{0{,}938s} + \dfrac{1}{\dfrac{1}{0{,}00578} + 2{,}31s} + 0{,}1} =$$

$$= \frac{0{,}08(0{,}1s+1)(0{,}0125s+1)}{(0{,}02s+1)(0{,}005s+1)}.$$

Составленная схема четырехполюсника может оказаться неудобной для физической реализации. Тогда следует составить и рассмотреть другие ва-

Рис. П4.9. Схема четырехполюсника к примеру П4.2



рианты, пользуясь ранее изложенными способами.

В общем случае для построения *лестничного RC-четырехполюсника* нужно составить

$$Z = \frac{N}{Q}. \qquad (\text{П4.18})$$

Здесь N — полином знаменателя реализуемой передаточной функции W, определяемой равенством (П4.13); полином $Q = Q(s)$ выбирают так, чтобы Z удовлетворяло условиям физической реализуемости. Степень полинома Q должна быть равна степени полинома N. Полином может содержать нули реализуемой передаточной функции.

Затем нужно реализовать Z так, чтобы кроме полюсов передаточной функции W, т. е. нулей Z, были реализованы и нули передаточной функции W. Вместе с тем полюсы Z, не являющиеся нулями передаточной функции W, не должны быть реализованы.

Требуемой реализации Z достигают путем частичного удаления его полюсов. При этом нули оставшейся части Z сдвигаются и можно один из них сделать равным нулю передаточной функции W. При последующем удалении такого нуля реализуется равный ему нуль передаточной функции W.

Частичного удаления полюса Z достигают введением в схему четырехполюсника активного сопротивления R. При этом нули оставшейся части Z увеличиваются по модулю. Частичного удаления нулевого полюса достигают введением емкости C и при этом нули уменьшаются по модулю.

Значение R или $\frac{1}{C\rho_j}$ определяют путем подстановки в Z $s = \rho_j$, где ρ_j — значение того нуля функции W, который намечено получить в оставшейся части Z.

Среди полюсов Z может оказаться один из нулей функции W. Тогда сначала нужно реализовать этот полюс Z, и затем, действуя указанным образом, реализовать остальные нули функции W.

Изложенный метод обеспечивает реализацию передаточной функции W с точностью до постоянного множителя.

Пример П4.3. Выбрать схему и параметры лестничного четырехполюсника так, чтобы при отсутствии нагрузки его передаточная функция

$$W = \frac{(0{,}1s + 1)(0{,}5s + 1)}{(0{,}2s + 1)(0{,}4s + 1)}.$$

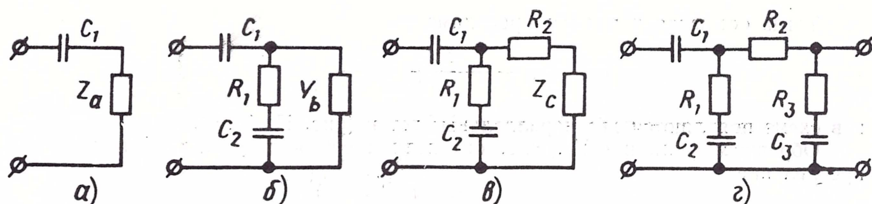


Рис. П4.10. Первый вариант реализации передаточной функции примера П4.3

Сначала преобразуем передаточную функцию

$$W = \frac{(s+10)(s+2)}{1{,}6\,(s+5)(s+2{,}5)}.$$

Выберем $Q = s(s+4)$, тогда по формуле (П4.18)

$$Z = \frac{1{,}6\,(s+5)(s+2{,}5)}{s(s+4)}.$$

Эта функция удовлетворяет условиям реализуемости.

Первым будем реализовать нуль $\rho_1 = -10$ передаточной функции W. Определим, какое сопротивление R_1 нужно включить в схему, чтобы среди нулей Z оказался нуль, равный -10:

$$R_1 = Z(-10) = \frac{1{,}6\,(-5)(-7{,}5)}{(-10)(-6)} = 1 \text{ МОм}.$$

Оставшаяся часть

$$Z_a = Z - R_1 = \frac{1{,}6\,(s^2+7{,}5s+12{,}5)}{s(s+4)} - 1 =$$

$$= \frac{0{,}6s^2+8s+20}{s(s+4)} = \frac{0{,}6\,(s+10)(s+10/3)}{s(s+4)}.$$

Сопротивление R_1, удаленное из Z, реализуем последовательной ветвью (рис. П4.10, *а*).

Обращаем функцию Z_a, т. е. определяем соответствующую ей полную проводимость

$$\frac{1}{Z_a} = Y_a = \frac{5s(s+4)}{3(s+10)(s+10/3)}.$$

Разлагаем Y_a на простые дроби, пользуясь формулами (П4.5) и (П4.6):

$$B_1 = \left[\frac{5(s+4)}{3(s+10/3)}\right]_{s=-10} = \frac{5(-6)}{3(-20/3)} = \frac{3}{2};$$

$$B_2 = \left[\frac{5(s+4)}{3(s+10)}\right]_{s=-10/3} = \frac{5(2/3)}{3(20/3)} = \frac{1}{6};$$

$$Y_a = \frac{3s/2}{s+10} + \frac{s/6}{s+20/3}.$$

Реализуем первое слагаемое разложения последовательным соединением резистора сопротивлением R_2 и конденсатора емкостью C_1 в соответствии с рис. П4.2:

$$R_2 = \frac{1}{B_1} = \frac{2}{3} \text{ МОм}; \quad C_1 = \frac{B_1}{10} = \frac{3}{20} \text{ мкФ},$$

Тогда оставшаяся полная проводимость

$$Y_b = Y_a - \frac{3s/2}{s+10} = \frac{s/6}{s+10/3}$$

и в схеме появляются две параллельные ветви (рис. П4.10, *б*).

Обращаем функцию Y_b, т. е. определяем соответствующее ей полное сопротивление

$$\frac{1}{Y_b} = Z_b = \frac{6\,(s+10/3)}{s}\,.$$

Теперь нужно реализовать нуль $\rho_2 = -2$ передаточной функции W. Для того, чтобы в Z_b появился нуль -2, необходимо включить емкость C_1, определяемую равенством:

$$\left[\frac{1}{C_2 s}\right]_{s=-2} = Z_b(-2) = \frac{6\,(4/3)}{-2} = -4;$$

$$C_2 = \frac{1}{8}\ \text{мкФ},$$

Включим C_2 в виде последовательной ветви и определим оставшуюся часть полного сопротивления

$$Z_c = Z_b - \frac{1}{C_2 s} = \frac{6\,(s+10/3)}{s} - \frac{8}{s} = \frac{6s+12}{s} = \frac{6\,(s+2)}{s}\,.$$

Схема показана на рис. П4.10, *в*.

В заключение обращаем функцию Z_c:

$$\frac{1}{Z_c} = Y_c = \frac{s/6}{s+2}\,,$$

и реализуем эту полную проводимость в соответствии с рис. П4.2 последовательным соединением резистора сопротивлением R_3 и конденсатора емкостью C_3:

$$R_3 = 6\ \text{МОм};\quad C_3 = \frac{1}{12}\ \text{мкФ}.$$

Оставшаяся полная проводимость равна нулю, что соответствует бесконечно большому сопротивлению нагрузки на выходе четырехполюсника.

Полная схема четырехполюсника представлена на рис. П4.10, *г*.

Для проверки расчета составим передаточную функцию четырехполюсника по схеме, пользуясь формулой № 4 табл. 8.1:

$$W = \frac{Z_3 Z_4}{(Z_1+Z_3)(Z_2+Z_4) + Z_1 Z_3}\,.$$

В данном случае

$$Z_1 = R_1 = 1;\quad Z_2 = \frac{1}{C_2 s} = \frac{8}{s};$$

$$Z_3 = R_2 + \frac{1}{C_1 s} = \frac{2}{3} + \frac{20}{3s} = \frac{2\,(s+10)}{3s};$$

$$Z_4 = R_3 + \frac{1}{C_3 s} = 6 + \frac{12}{s} = \frac{6\,(s+2)}{s}\,.$$

Подставив значения Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 в выражение, определяющее W, и упростив его, получим

$$W = \frac{0{,}6\,(0{,}1s+1)(0{,}5s+1)}{(0{,}2s+1)(0{,}4s+1)}\,.$$

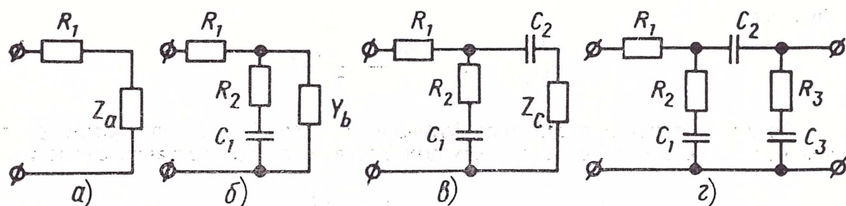


Рис. П4.11. Второй вариант реализации передаточной функции примера П4.3

Следовательно, заданная передаточная функция реализована с точностью до постоянного множителя, равного 0,6.

Составим второй вариант схемы четырехполюсника. С этой целью сначала реализуем нуль —2 функции W и сдвиг нулей Z осуществим включением емкости C_1. Определим необходимое значение этой емкости:

$$\left[\frac{1}{C_1 s}\right]_{s=-2} = Z(-2) = \frac{1{,}6 \cdot 3 \cdot 0{,}5}{(-2)\cdot 2} = -0{,}6;$$

$$C_1 = \frac{5}{6} \text{ мкФ}.$$

Включим C_1 в виде последовательной ветви (рис. П4.11, *а*) и определим оставшееся полное сопротивление

$$Z_a = Z - \frac{1}{C_1 s} = \frac{1{,}6\,(s^2+7{,}5s+12{,}5)}{s\,(s+4)} - \frac{6}{5s} =$$

$$= \frac{1{,}6s^2+10{,}8s+15{,}2}{s\,(s+4)} = \frac{1{,}6\,(s+2)\,(s+4{,}75)}{s\,(s+4)}.$$

Обращаем функцию Z_a:

$$\frac{1}{Z_a} = Y_a = \frac{\frac{5}{8}\,s\,(s+4)}{(s+2)\,(s+4{,}75)}.$$

Разложим Y_a на простые дроби, пользуясь формулами (П4.5) и (П4.6):

$$B_1 = \left[\frac{5/8\,(s+4)}{(s+4{,}75)}\right]_{s=-2} = \frac{5/8\cdot 2}{2{,}75} = \frac{5}{11};$$

$$B_2 = \left[\frac{5/8\,(s+4)}{(s+2)}\right]_{s=-4{,}75} = \frac{5/8\,(-0{,}75)}{-2{,}75} = \frac{15}{88};$$

$$Y_a = \frac{5s/11}{s+2} + \frac{15s/88}{s+4{,}75}.$$

Реализуем первое слагаемое полученного разложения параллельной ветвью, состоящей из сопротивления R_1 и емкости C_2 (рис. П4.11, *б*). Согласно рис. П4.2

$$R_1 = \frac{11}{5} \text{ МОм и } C_2 = \frac{5}{22} \text{ мкФ}.$$

Оставшуюся часть полной проводимости

$$Y_b = Y_a - \frac{5/11s}{s+2} = \frac{15s/88}{s+4{,}75}$$

обращаем:

$$\frac{1}{Y_b} = Z_b = \frac{88\,(s + 4{,}75)}{15s}\,.$$

Теперь реализуем другой нуль функции W, равный —10. Определим сопротивление R_2, которое обеспечит необходимый сдвиг нуля Z_b, и оставшуюся часть Z_b:

$$R_2 = Z_b\,(-10) = \frac{88\,(-5{,}25)}{15\,(-10)} = \frac{77}{25}\,;$$

$$Z_c = Z_b - R_2 = \frac{88\,(s + 4{,}75)}{15s} - \frac{77}{25} = \frac{209\,(s + 10)}{75s}\,.$$

Полученная схема представлена на рис. П4.11, *в*.

Обращаем функцию Z_c:

$$\frac{1}{Z_c} = Y_c = \frac{75s}{209\,(s + 10)}\,,$$

и реализуем Y_c параллельной ветвью, состоящей из резистора сопротивлением R_3 и конденсатора емкостью C_3. Их значения в соответствии с рис. П4.1:

$$R_3 = \frac{209}{75}\ \text{МОм} \ \text{и} \ C_3 = \frac{75}{209 \cdot 10} = \frac{15}{418}\ \text{мкФ}.$$

Полная проводимость Y_c реализована полностью. Полная проводимость другой параллельной ветви равна нулю, т. е. на выходе четырехполюсника нагрузка с бесконечно большим сопротивлением. Полная схема четырехполюсника показана на рис. П4.11, *г*.

Для проверки расчета составим по схеме четырехполюсника его передаточную функцию. Полные сопротивления отдельных ветвей имеют следующие значения:

$$Z_1 = \frac{1}{C_1 s} = \frac{6}{5s}\,; \quad Z_2 = R_2 = \frac{77}{25}\,;$$

$$Z_3 = R_1 + \frac{1}{C_2 s} = \frac{11}{5} + \frac{22}{5s} = \frac{11\,(s + 2)}{5s}\,;$$

$$Z_4 = R_3 + \frac{1}{C_3 s} = \frac{209}{75} + \frac{418}{15s} = \frac{209\,(s + 10)}{75s}\,.$$

Подставив значения Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 в формулу п. 4 табл. 8.1 и сделав упрощения, получим

$$W = \frac{0{,}76\,(0{,}1s + 1)\,(0{,}5s + 1)}{(0{,}2s + 1)\,(0{,}4s + 1)}\,.$$

Составим еще один вариант схемы четырехполюсника и для этого выберем полином Q так, чтобы он содержал один из нулей функции W:

$$Q = (s + 2)\,(s + 4).$$

Тогда

$$Z = \frac{1{,}6\,(s + 5)\,(s + 2{,}5)}{(s + 2)\,(s + 4)}\,.$$

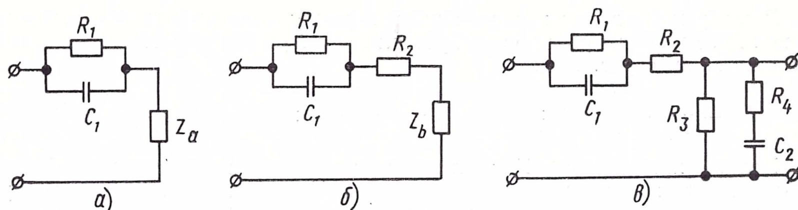


Рис. П4.12. Третий вариант реализации передаточной функции примера П4.3

Разложим Z на простые дроби, пользуясь формулами (П4.2), (П4.3) и (П4.4):

$$A_1 = \left[\frac{1{,}6\,(s+5)\,(s+2{,}5)}{s+4} \right]_{s=-2} = \frac{6}{5};$$

$$A_2 = \left[\frac{1{,}6\,(s+5)\,(s+2{,}5)}{s+2} \right]_{s=-4} = \frac{6}{5};$$

$$A = Z(\infty) = \frac{8}{5};$$

$$Z = \frac{6}{5\,(s+2)} + \frac{6}{5\,(s+4)} + \frac{8}{5}.$$

Реализуем первый член разложения последовательной ветвью, состоящей из сопротивления R_1 и емкости C_1, соединенных параллельно (рис. П4.12, *а*). Их значения в соответствии с рис. П4.1:

$$R_1 = \frac{6}{5 \cdot 2} = \frac{3}{5} \text{ МОм}; \quad C_1 = \frac{5}{6} \text{ мкФ}.$$

Оставшаяся часть полного сопротивления

$$Z_a = Z - \frac{6}{5\,(s+2)} = \frac{6}{5\,(s+4)} + \frac{8}{5} = \frac{8\,(s+19/4)}{5\,(s+4)}.$$

Теперь нужно реализовать второй нуль функции W, равный —10. Определим, при каком сопротивлении R_2 будет нужный сдвиг нуля Z_a:

$$R_2 = Z_a(-10) = \frac{8\,(-21/4)}{5\,(-6)} = \frac{7}{5} \text{ МОм}.$$

Оставшееся полное сопротивление

$$Z_b = Z_a - R_2 = \frac{8\,(s+19/4)}{5\,(s+4)} - \frac{7}{5} = \frac{s+10}{5\,(s+4)},$$

схема показана на рис. П.4.12, *б*.

Обращаем функцию Z_b:

$$\frac{1}{Z_b} = Y_b = \frac{5\,(s+4)}{s+10}.$$

Разложим Y_b на простые дроби, пользуясь формулами (П4.5) и (П4.6):

$$B_0 = \left[\frac{5\,(s+4)}{s+10} \right]_{s=0} = 2; \quad B_1 = \left[\frac{5\,(s+4)}{s} \right]_{s=-10} = 3;$$

$$Y_b = 2 + \frac{3s}{s+10}.$$

Реализуем Y_b двумя параллельными ветвями: одна из резистора сопротивлением R_3, другая из резистора сопротивлением R_4 и конденсатора емкостью C_2. В соответствии с рис. П4.2

$$R_3 = \frac{1}{B_0} = \frac{1}{2}\ \text{МОм};\quad R_4 = \frac{1}{B_1} = \frac{1}{3}\ \text{МОм};\quad C_2 = \frac{B_1}{10} = \frac{3}{10}\ \text{мкФ}.$$

Полная проводимость Y_b реализована полностью и остаток, равный нулю, соответствует полной проводимости между выходными клеммами четырехполюсника. Схема четырехполюсника дана на рис. П4.12, *в*.

По схеме четырехполюсника составим его передаточную функцию, пользуясь формулой № 1 табл. 8.1:

$$Z_1 = \frac{1}{1/R_1 + C_1 s} + R_2 = \frac{1}{5/3 + 5s/6} + \frac{7}{5} = \frac{7s + 20}{5\,(s + 2)};$$

$$Z_2 = \frac{1}{1/R_3 + 1/\left(R_4 + \dfrac{1}{C_2 s}\right)} = \frac{1}{2 + \dfrac{1}{1/3 + 10/3s}} = \frac{s + 10}{5\,(s + 4)};$$

$$W = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{0{,}2\,(0{,}1s + 1)\,(0{,}5s + 1)}{(0{,}2s + 1)\,(0{,}4s + 1)}.$$

Составлены три схемы (см. рис. П4.10, *г*, П4.11, *г* и П4.12, *в*) четырехполюсника, реализующего (с точностью до постоянного множителя) заданную передаточную функцию. Выбирая другие значения полинома Q, также изменяя порядок реализации нулей функции W, можно составить еще большое число таких схем. Кроме того, расчет можно вести не по полному сопротивлению, а по полной проводимости.

Мостовой четырехполюсник (рис. П4.13) имеет специфические свойства. В частности, им можно реализовать передаточную функцию с положительными нулями, т. е. получить неминимально-фазовый элемент.

Передаточная функция уравновешенного мостового четырехполюсника

$$W_{\text{м}} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}, \qquad (\text{П}4.19)$$

где Z_1 и Z_2 — операторные выражения полного сопротивления плеч моста.

Для реализации передаточной функции W, определяемой равенством (П4.13), необходимо иметь

$$Z_1 = \frac{N + M}{2Q} \quad \text{и} \quad Z_2 = \frac{N - M}{2Q}. \qquad (\text{П}4.20)$$

Полином $Q = Q\,(s)$ в этих формулах нужно выбирать так, чтобы Z_1 и Z_2 были физически реализуемыми.

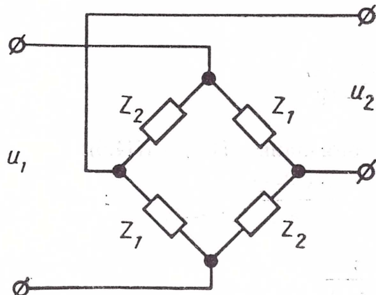


Рис. П4.13. Схема мостового четырехполюсника

Если передаточная функция, определяемая равенством (П4.13), оказывается нереализуемой, то следует выяснить возможность реализации передаточной функции, определяемой равенством (П4.16).

В этом случае следует иметь

$$Z_1 = \frac{N + \mu M}{2Q} \text{ и } Z_2 = \frac{N - \mu M}{2Q}. \quad \text{(П4.21)}$$

Синтез нагруженного четырехполюсника

Во многих случаях источник входного напряжения имеет внутреннее сопротивление $R_{вн}$, а на выходе четырехполюсника включена нагрузка $R_н$, (рис. П4.14, *а*). Эти сопротивления можно считать элементами четырехполюсника (рис. П4.14, *б*). Следовательно, изложенный ранее порядок синтеза четырехполюсника должен быть дополнен требованием иметь на входе и выходе заданные сопротивления $R_{вн}$ и $R_н$. Тогда передаточная функция нагруженного четырехполюсника будет иметь требуемое значение (с точностью до постоянного множителя).

Нужный результат, т. е. схему четырехполюсника с последовательным сопротивлением R_1 на входе и шунтирующим сопротивлением R_l на выходе, можно получить, предъявив соответствующие требования к Z. Значение Z, определяемое формулой (П4.18), не должно иметь нулевого полюса и иметь полюс, равный нулю реализуемой передаточной функции.

Такому требованию удовлетворяет Z в третьем варианте примера П4.3. Полученная при синтезе схема четырехполюсника (см. рис. П4.12, *в*) принимает нужный вид, если поменять местами R_2 и цепочку параллельного соединения R_1 и C_1, а также R_3 и цепочку последовательного соединения R_4 и C_2. Такое преобразование схемы не изменит ее передаточной функции.

Пусть четырехполюсник имеет последовательное сопротивление R_1 на входе и шунтирующее сопротивление R_l на выходе.

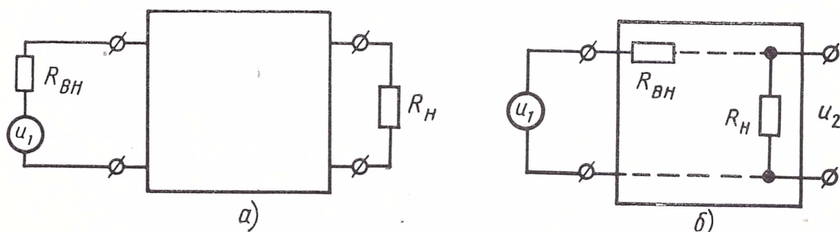


Рис. П4.14. Схемы нагруженного четырехполюсника:

а — действительная; *б* — эквивалентная

Если $R_l < R_н$ и $R_1 > R_{вн}$, то все сопротивления четырехполюсника нужно увеличить в $\alpha = \frac{R_н}{R_l}$ раз и все емкости уменьшить в α раз. Тогда на выходе четырехполюсника шунтирующее сопротивление не нужно. Его роль выполняет сопротивление нагрузки, а последовательное сопротивление на входе четырехполюсника должно быть равным $\alpha R_1 - R_{вн}$.

Если $R_l > R_н$ и $R_1 < R_{вн}$, то все сопротивления следует увеличить, а емкости уменьшить в $\alpha = \frac{R_{вн}}{R_1}$ раз. При этом на входе четырехполюсника последовательное сопротивление не нужно. Его роль выполняет внутреннее сопротивление источника входного напряжения, а шунтирующее сопротивление на выходе четырехполюсника нужно выполнить равным $\frac{R_l R_н}{R_н - R_l}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Автоматизация,** приборы контроля и регулирования производственных процессов в нефтяной и нефтехимической промышленности. Книга пятая: Автоматическое регулирование. Телемеханика. М., «Недра», 1967, 956 с.

2. **Агейкин Д. И., Костина Е. Н., Кузнецова Н. Н.** Датчики контроля и регулирования. М., «Машиностроение», 1965, 928 с.

3. **Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р.** Условия существования областей устойчивости у одноконтурных систем автоматического регулирования, содержащих воздействия по производным. — «Прикладная математика и механика», 1954, № 1, с. 103—122.

4. **Алексеев К. Б., Бебенин Г. Г.** Управление космическими летательными аппаратами. М., «Машиностроение», 1974, 343 с.

5. **Аранович Б. И., Шамрай Б. В.** Электромагнитные устройства автоматики. М., «Энергия», 1965, 484 с.

6. **Арменский Е. В., Фалк Г. Б** Электрические микромашины. М., «Высшая школа», 1968. 213 с.

7. **Ахметжанов А. А.** Системы передачи угла повышенной точности. М., «Энергия», 1966, 272 с.

8. **Балакирев В. С.** Методы исследования статики и динамики объектов регулирования и выбора настроек регуляторов. М., изд. Всесоюзного заочного энергетического института, 1966, 124 с.

9. **Балакирев В. С , Дудников Е. Г., Цирлин А. М** Экспериментальное определение динамических характеристик промышленных объектов управления. М., «Энергия», 1967, 232 с.

10. **Балашов М. А., Елагин Е. Б., Конев Ю. И.** Электронные и полупроводниковые устройства систем автоматического управления. М., «Машиностроение», 1966, 440 с.

11. **Барковский В. В., Захаров В. Н., Шаталов А. С.** Методы синтеза систем управления. М., «Машиностроение», 1969, 327 с.

12. **Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф.** Траектории корней линейных автоматических систем. М., «Наука», 1964, 160 с.

13. **Берендс Т. К., Ефремова Т. К., Тагаевская А. А.** Элементы и схемы пневмоавтоматики. М., «Машиностроение», 1968, 312 с.

14. **Бесекерский В. А., Орлов В. П., Полонская Л. В., Федоров С. М.** Проектирование следящих систем малой мощности. Л., Судпромгиз, 1958, 508 с.

15. **Бесекерский В. А., Востоков С. Б., Цейтлин Я. М.** Электромеханические сглаживающие устройства. Л., «Судостроение», 1964, 146 с.

16. **Бесекерский В. А., Фабрикант Е. А.** Динамический синтез систем гироскопической стабилизации. Л., «Судостроение», 1968, 351 с.

17. **Бесекерский В. А.** Динамический синтез систем автоматического регулирования. М., «Наука», 1970, 576 с.

18. **Бесекерский В. А., Попов Е. П.** Теория систем автоматического регулирования. Изд. 2-е. М., «Наука», 1972, 768 с.

19. **Блох З. Ш.** Переходные процессы в линейных системах автоматического регулирования. М., Физматгиз, 1961, 492 с.
20. **Боднер В. А.** Теория систем управления полетом. М., «Наука», 1964, 698 с.
21. **Васильев Д. В., Филиппов Г. С.** Основы теории и расчета следящих систем. М.—Л., Госэнергоиздат, 1959, 428 с.
22. **Васильев Д. В., Чуич В. Г.** Системы автоматического управления. М., «Высшая школа», 1967, 418 с.
23. **Воронов А. А.** К приближенному построению кривых переходного процесса по вещественной частотной характеристике. — «Автоматика и телемеханика», т. XIII, 1952, № 6, с. 747—749.
24. **Воронов А. А.** Основы теории автоматического управления. Ч. I. Линейные системы регулирования одной величины. М.—Л., «Энергия», 1965, 396 с.
25. **Воронов А. А.** Основы теории автоматического управления. Ч. II. Специальные линейные и нелинейные системы регулирования одной величины. М.—Л., «Энергия», 1966, 372 с.
26. **Воронов А. А.** Основы теории автоматического управления, Ч. III. Оптимальные, многосвязанные и адаптивные системы. М.—Л., «Энергия», 1970, 328 с.
27. **Ганулич А. К.** Электронные моделирующие устройства. М.—Л., Госэнергоиздат, 1961, 78 с.
28. **Голубничий Н. И., Зайцев Г. Ф., Иващенко М. А., Чинаев П. И. Чумаков Н. М.** Беседы по автоматике. Киев, «Техніка», 1971, 232 с.
29. **Государственная** система приборов. Унифицированная система пневматических и электрических датчиков теплоэнергетических параметров. М., Изд. ЦНИИТЭИ приборостроения, 1970, 76 с.
30. **Динамика** электромашинных следящих систем. Под ред. Н. М. Якименко. М., «Энергия», 1967, 408 с.
31. **Диткин В. А., Прудников А. П.** Справочник по операционному исчислению. М., «Высшая школа», 1965, 466 с.
32. **Джеймс Х., Никольс Н., Филлипс Р.** Теория следящих систем. Изд. 2-е. М., Изд-во иностр. лит., 1951, 464 с.
33. **Дмитриев В. Н., Городецкий В. Г.** Основы пневмоавтоматики. М., «Машиностроение», 1973, 360 с.
34. **Догановский С. А., Иванов В. А.** Устройства запаздывания и их применение в автоматических системах. М., «Машиностроение», 1966, 280 с.
35. **Дудников Е. Г.** Основы автоматического регулирования тепловых процессов. М.—Л., Госэнергоиздат, 1965, 244 с.
36. **Дудников Е. Г.** Определение коэффициентов передаточной функции линейной системы по начальному участку экспериментальной амплитудно-фазовой характеристики. — «Автоматика и телемеханика», т. XX, 1959, № 5, с. 576—582.
37. **Егоров К. В.** Основы теории автоматического регулирования. М., «Энергия», 1967, 648 с.
38. **Загускин Л. В.** Справочник по численным методам решения уравнений. М., Физматгиз, 1960. 216 с.
39. **Зайцев Г. Ф.** Синтез следящих систем высокой точности. Киев, «Техніка», 1971, 202 с.
40. **Залманзон Л. А.** Пневмоника, струйная автоматика, М., «Наука», 1965, 64 с.
41. **Захаров В. К.** Электронные элементы автоматики. Л., «Энергия», 1967, 352 с.
42. **Иващенко Н. Н.** Автоматическое регулирование. Изд. 3-е, перераб. и доп. М., «Машиностроение», 1973, 608 с.
43. **Изъюрова Г. И.** Усилители переменного тока. М., Изд. Московского института радиотехники, электроники и автоматики, 1973, 142 с.
44. **Каргу Л. И.** Системы угловой стабилизации космических аппаратов. М., «Машиностроение», 1973, 176 с.

45. **Кардашев А. А., Карнюшин Л. В.** Определение параметров системы по экспериментальным (заданным) частотным характеристикам. — «Автоматика и телемеханика», т. XIX, 1958, № 4, с. 334—345.
46. **Касьянов А. И.** Автоматизация радиопередающих устройств. М., изд. ВЗЭИсвязи, 1973, 109 с.
47. **Каталог** «Государственная система промышленных приборов и средств автоматизации». Т. I, вып. I. М., изд. ЦНИИТЭИприборостроения, 1973, 36 с.
48. **Каталог.** Комплекс «Спектр». М., изд. ЦНИИТЭИприборостроения, 1968, 88 с.
49. **Каталог** «Универсальная система элементов промышленной пневмоавтоматики». М., изд. ЦНИИТЭИприборостроения, 1972, 42 с.
50. **Каталог** «Унифицированная система пневматических и электрических датчиков теплоэнергетических параметров». М., изд. ЦНИИТЭИприборостроения, 1972, 68 с.
51. **Кинг Л. Г.** Снижение установившейся динамической ошибки в замкнутых следящих системах. — «Прикладная механика и машиностроение», 1954, № 2, с. 3—14.
52. **Кисельников В. Б., Плоткин А. Г.** Системы автоматизации силового дизельного привода. Л., «Машиностроение», 1973, 239 с.
53. **Клюев А. С.** Автоматическое регулирование. Изд. 2-е. М., «Энергия», 1973, 391 с.
54. **Колесников К. С.** Жидкостная ракета как объект регулирования. М., «Машиностроение», 1969, 298 с.
55. **Колосов С. П., Калмыков И. В., Нефедова В. И.** Элементы автоматики. Изд. 3-е. М., «Машиностроение», 1970, 392 с.
56. **Котченко Ф. Ф.** Следящие системы автоматических компенсаторов. М., «Недра», 1965, 322 с.
57. **Красовский А. А., Поспелов Г. С.** Основы автоматики и технической кибернетики. М.—Л., Госэнергоиздат, 1962, 600 с.
58. **Крассов И. М.** Гидравлические элементы в системах управления. Изд. 2-е, М., «Машиностроение», 1967, 255 с.
59. **Кривоносов А. И.** Полупроводниковые датчики температуры. М., «Энергия», 1974, 185 с.
60. **Крутов В. И.** Автоматическое регулирование двигателей внутреннего сгорания. Изд. 2-е. М., Машгиз, 1963, 624 с.
61. **Крыжановский О. М.** Об итерационном методе определения приближенных корней уравнений. — «Автоматика и телемеханика», т. XI, 1950, № 5, с. 347—360.
62. **Кузовков Н. Т.** Теория автоматического регулирования, основанная на частотных методах. М., Оборонгиз, 1960, 446 с.
63. **Кузовков Н. Т.** Динамика систем автоматического управления. М., «Машиностроение», 1968, 428 с.
64. **Кулебакин В. С.** Высококачественные инвариантные системы регулирования. — В кн.: Теория инвариантности и ее применение в автоматических устройствах. М., Изд. АН СССР, 1959, с. 11—39.
65. **Куропаткин П. В.** Теория автоматического управления. М., «Высшая школа», 1973, 528 с.
66. **Курош А. Г.** Курс высшей алгебры. Изд. 9-е. М., «Наука», 1968, 432 с.
67. **Ланцош К.** Практические методы прикладного анализа. М., Физматгиз, 1961. 524 с.
68. **Лебедев А. А., Карабанов В. А.** Динамика систем управления беспилотными летательными аппаратами. М., «Машиностроение», 1965, 528 с.
69. **Лебедев И. В., Трескунов С. Л., Яковенко В. С.** Элементы струйной автоматики. М., «Машиностроение», 1973, 360 с.
70. **Летов А. М.** Динамика полета и управление. М., «Наука», 1969, 359 с.
71. **Макаров И. М.** Аналитическое исследование устойчивости движения электромеханического преобразующего устройства. — «Автоматика и телемеханика», т. XVIII, 1957, № 4, с. 315—323.

72. **Макаров И. М.** Электромашинный усилитель с поперечным полем. — В кн.: Энциклопедия измерений, контроля и автоматизации. М., Госэнергоиздат, 1962, с. 219—220.

73. **Макаров И. М., Смирнов Н. А.** Преобразующие устройства. — В кн.: Автоматизация производства и промышленная электроника. Т. 3. М., «Советская энциклопедия», 1964, с. 85—86.

74. **Матвеев Н. М.** Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Высшая школа», 1963, 548 с.

75. **Мееров М. В.** Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности. М., Физматгиз, 1959, 284 с.

76. **Мелкозеров П. С.** Энергетический расчет систем автоматического управления и следящих систем. М., «Энергия», 1968, 304 с.

77. **Менский Б. М.** Номограмма для определения фазы по асимптотической логарифмической амплитудно-частотной характеристике. — «Автоматика и телемеханика», т. XXII, 1961, № 3, с. 400—402.

78. **Менский Б. М.** Принцип инвариантности в автоматическом регулировании и управлении. М., «Машиностроение», 1972, 248 с.

79. **Миловзоров В. П.** Электромагнитная техника. М., «Высшая школа», 1966, 470 с.

80. **Морозовский В. Т., Синдеев И. М., Рунов К. Д.** Системы электроснабжения летательных аппаратов. М., «Машиностроение», 1973, 420 с.

81. **Наумов Б. Н.** Переходные процессы в линейных системах автоматического регулирования. М., Госэнергоиздат, 1960, 224 с.

82. **Наумов Б. Н.** Косвенные методы анализа и синтеза качества линейных систем автоматического управления. М., изд. Всесоюзного заочного энергетического института, 1967, 172 с.

83. **Оппельт В.** Основы техники автоматического регулирования. М.—Л., Госэнергоиздат, 1960, 606 с.

84. **Основы** автоматического регулирования. Теория. Под ред. В. В. Солодовникова. М., Машгиз, 1954, 1118 с.

85. **Основы** автоматического регулирования. Под ред. В. В. Солодовникова. Т. II, ч. 2. Корректирующие элементы и элементы вычислительных машин. М., Машгиз, 1959, 454 с.

86. **Основы** автоматического управления. Под ред. В. С. Пугачева. Изд. 2-е. М., «Наука», 1968, 679 с.

87. **Основы** автоматического управления. Под ред. В. С. Пугачева. Изд. 3-е. М., «Наука», 1974, 720 с.

88. **Панасенко В. Д.** Элементы автоматических устройств и вычислительной техники. М., Оборонгиз, 1962, 300 с.

89. **Печорина И. Н.** Расчет систем автоматического управления. Справочное пособие. Москва—Свердловск, Машгиз, 1962, 112 с.

90. **Плетнев Г. П.** Автоматическое регулирование и защита теплоэнергетических установок электрических станций. М., «Энергия», 1970, 408 с.

91. **Попов Е. П.** Автоматическое регулирование. Основные понятия. М., Гостехиздат, 1956, 296 с.

92. **Приборы** для измерения и регулирования температуры. Номенклатурный справочник. М., изд. ЦНИИТЭИприборостроения, 1973, 164 с.

93. **Рабинович Л. В., Петров Б. И., Терсков В. Г.** Проектирование следящих систем. М., «Машиностроение», 1969, 499 с.

94. **Расчет** автоматических систем. Под ред. А. В. Фатеева. М., «Высшая школа», 1973, 336 с.

95. **Регуляторы** прямого действия, датчики-реле, механизмы исполнительные. М., изд. ЦНИИТЭИприборостроения, 1973, 208 с. (Номенклатурный справочник).

96. **Розенблат М. А.** Магнитные элементы автоматики, вычислительной техники. М., «Наука», 1966, 716 с.

97. **Ротач В. Я.** Расчет динамики промышленных автоматических систем регулирования. М.—Л., «Энергия», 1973, 440 с.

98. **Рудаков В. В.** Электромашинные усилители в системах автоматики. М.—Л., Госэнергоиздат, 1961, 376 с.

99. **Рязанов Ю. А.** Проектирование систем автоматического регулирования. М., «Машиностроение», 1968, 360 с.

100. **Санковский Е. А.** Вопросы теории автоматического управления. М., «Высшая школа», 1971, 231 с.

101. **Сегал Б. И., Семендяев К. А.** Пятизначные математические таблицы. М., Изд-во АН СССР, 1950, 464 с.

102. **Симою М. П** Определение коэффициентов передаточных функций линеаризованных звеньев и систем регулирования. — «Автоматика и телемеханика», т. XVIII, 1957, № 6, с. 514—528.

103. **Симою М. П.** Определение передаточных функций по временным характеристикам линеаризованных систем. — «Приборостроение», 1958, № 3, с. 8—11.

104. **Скаржепа В. А., Морозов А. А.** Устройства автоматики на тиристорах, Киев, «Техніка», 1974, 224 с.

105. **Слободкин М. С., Смирнов П. Ф., Казинер Ю. А** Исполнительные устройства регуляторов. М., «Недра», 1972, 304 с.

106. **Солодовников В. В.** Анализ устойчивости и качества следящих систем по их амплитудно-фазовым характеристикам. — «Известия АН СССР. Отделение технических наук», 1949, № 4, с. 473—491.

107. **Солодовников В. В.** Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. М., Физматгиз, 1960, 656 с.

108. **Сотсков Б. С.** Основы расчета и проектирования электромеханических элементов автоматических и телемеханических устройств. М.—Л., «Энергия», 1965, 576 с.

109. **Сотсков Б. С.** Тенденции и перспективы развития основ построения ГСП. — «Приборы и системы управления», 1972, № 8, с. 1—7.

110. **Справочное** пособие по теории систем автоматического регулирования и управления. Под ред. Е. А. Санковского. Минск, «Вышэйшая школа», 1973, 584 с.

111. **Степаненко И. П.** Основы теории транзисторов и транзисторных схем. М.—Л., «Энергия», 1967, 616 с.

112. **Стрелков С. П.** К общей теории линейных усилителей. — «Автоматика и телемеханика», ч. I, т. IX, 1948, № 3, с. 233—244; ч. II, т. X, 1949, № 4, с. 274—289.

113. **Теория** автоматического регулирования. Кн. 1. Математическое описание, анализ устойчивости и качества систем автоматического регулирования. Под ред. д-ра техн. наук проф. В. В. Солодовникова. М., «Машиностроение», 1967, 768 с. (Серия инженерных монографий «Техническая кибернетика»).

114. **Теория** автоматического регулирования. Кн. 2. Анализ и синтез линейных непрерывных и дискретных систем автоматического регулирования. Под ред. д-ра техн. наук проф. В. В. Солодовникова. М., «Машиностроение», 1967, 680 с.

115. **Теория** автоматического регулирования. Кн. 3. Теория нестационарных, нелинейных и самонастраивающихся систем автоматического регулирования. Под ред. д-ра техн. наук проф. В. В. Солодовникова. М., «Машиностроение», ч. I, 1969, 608 с; ч. II, 1969, 368 с.

116. **Техника** проектирования систем автоматизации. Под ред. Л. И. Шипетина, М., «Машиностроение», 1966, 704 с.

117. **Удерман Э. Г.** Метод корневого годографа в теории автоматических систем. М., «Наука», 1972, 448 с.

118. **Урманов А. С.** Основы моделирования на АВМ. М., «Наука», 1974, 320 с.

119. **Фатеев А. В.** Основы линейной теории автоматического регулирования. М.—Л., Госэнергоиздат, 1954, 296 с.

120. **Фролов Л. Б.** Измерение крутящего момента. М., «Энергия», 1967, 120 с.

121. **Хохлов В. А.** Электрогидравлический следящий привод. М., «Наука», 1964, 200 с.

122. **Честнат Г., Майер Р.** Проектирование и расчет следящих систем и систем регулирования, ч. I. М.—Л., Энергоиздат, 1959, 488 с.

123. **Шаталов А. С.** Структурные методы в теории управления и электроавтоматике. М., Энергоиздат, 1962, 408 с.

124. **Шаталов А. С.** Обобщенные методы исследования непрерывных линейных систем автоматического управления. — В кн.: Современные методы проектирования систем автоматического управления. М., «Машиностроение», 1967, с. 265—286.

125. **Шаталов А. С., Топчеев Ю. И., Кондратьев В. С.** Летательные аппараты как объекты управления. М., «Машиностроение», 1972, 239 с.

126. **Шевяков А. А.** Автоматика авиационных и ракетных силовых установок. М., «Машиностроение», 1965, 548 с.

127. **Шегал Г. Л.** Электрические исполнительные механизмы. М.—Л., Госэнергоиздат, 1961, 98 с.

128. **Шишкин О. П., Парфенов А. Н.** Основы автоматики и автоматизация производственных процессов. М., «Недра», 1973, 408 с.

129. **Штейнберг Ш. Е., Хвилевицкий Л. О., Ястребенецкий М. А.** Промышленные автоматические регуляторы. М., «Энергия», 1973, 586 с.

130. **Яворский В. Н.** и др. Проектирование инвариантных следящих приводов. М., «Высшая школа», 1963, 476 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ИБ № 233

Игорь Михайлович Макаров,
Борис Михайлович Менский

ЛИНЕЙНЫЕ АВТОМАТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Редактор издательства инж. *З. С. Баранова*
Технический редактор *А. И. Захарова*
Корректор *Н. И. Шарунина*
Переплет художника *Е. В. Бекетова*

Сдано в набор 29/VII 1976 г. Подписано к печати 24/III 1977 г. Т-02172.
Формат $60\times90^{1}/_{16}$. Бумага типографская № 1.
Усл. печ. л. 29,0. Уч.-изд. л. 30,3.
Тираж 9000 экз. Заказ 1174. Цена 1 р. 42 к.

Издательство «Машиностроение», 107885, ГСП, Москва, 1-й Басманный пер., 3

Ленинградская типография № 6 Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
193144, Ленинград, С-144, ул. Моисеенко, 10.

1 р. 12 к.



Издательство
«Машиностроение»

И. М. Макаров
Б. М. Менский

Линейные автоматические системы